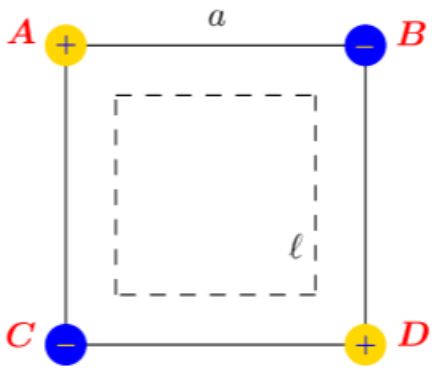
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 4

Problema 1

Cuatro partículas, dos de las cuales poseen carga $+q$ y las otras dos $-q$, están ubicadas como indica la figura. Si cada una tiene una masa m y se suelta de los vértices del cuadrado a partir del reposo, calcule la velocidad de las partículas cuando el largo del cuadrado vale ℓ. Suponga que todas las cargas se mueven con la misma rapidez.



SOLUCION:

Por el principio de la conservación de energía, se cumple que

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

Si calculamos la energía inicial, notaremos que posee una contribución cinética y otra potencial, por lo que

$$E_{\text{inicial}} = K_{\text{inicial}} + U_{\text{inicial}}$$

Como el sistema parte del reposo, se tiene que $K_{\text{inicial}} = 0$. La energía potencial inicial está dada por:

$$\begin{aligned} U_{\text{inicial}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_A q_B}{r_{A,B}} + \frac{q_A q_C}{r_{A,C}} + \frac{q_A q_D}{r_{A,D}} + \frac{q_B q_C}{r_{B,C}} + \frac{q_B q_D}{r_{B,D}} + \frac{q_C q_D}{r_{C,D}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-4\cdot\frac{q^2}{a} + 2\cdot\frac{q^2}{\sqrt{2}a}\right) \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\sqrt{2}-4}{a}\right) \end{aligned}$$

Para la situación final, si cada una se mueve con velocidad v y poseen masa m, la energía cinética final es:

$$K_{\text{final}} = \sum_{i=1}^{4}\frac{m_i}{2}v_i^2 = 4\frac{mv^2}{2} = 2mv^2$$

La energía potencial final se consigue cambiando a por ℓ, por lo que:

$$U_{\text{final}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{2}-4}{\ell}$$

Así,

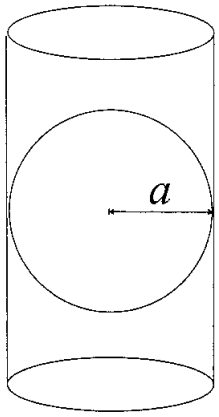
$$U_{\text{inicial}} = 2mv^2 + U_{\text{final}} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{U_{\text{inicial}} - U_{\text{final}}}{2m}}$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{8m\pi\epsilon_0}(\sqrt{2}-4)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\ell}\right)}$$

Problema 2

Considere un cilindro muy largo, de radio a, con densidad volumétrica de carga uniforme ρ_0, al que se le ha practicado una cavidad esférica de radio a como se ve en la figura. Calcule el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio exterior al cilindro.



SOLUCION:

Para resolver este problema conviene usar le principio de superposición: el campo creado por el cilindro con la cavidad es igual al campo creado por un cilindro uniforme de densidad ρ_0 **menos** el campo creado por una esfera también con densidad ρ_0. Ambos se calculan fácilmente con ley de Gauss.

Para calcular el campo fuera del cilindro consideremos como superficie gaussiana un cilindro de altura h, concéntrico con el cilindro original, con un radio $r > a$. Por simetría sabemos que el campo sera de la forma $\vec{E_c} = E_c\hat{r}$, de modo que tenemos

$$\int \vec{E_c} \cdot d\vec{A} = E_c 2\pi r h = \frac{\pi a^2 h \rho_0}{\epsilon_0}$$

De modo que el campo eléctrico resulta en

$$\vec{E_c} = \frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$$

El potencial creado por el cilindro también tiene simetría cilíndrica y lo obtenemos integrando

$$V_c = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0 r} dr = -\frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0}\ln r + C$$

Para la esfera, el campo eléctrico es

$$\int \vec{E_c} \cdot d\vec{A} = E_c 4\pi\rho^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow \ \vec{E_c} = \frac{a^3\rho_0}{3\epsilon_0\rho^2}\hat{\rho}$$

y el potencial es

$$V_e = \frac{a^3\rho_0}{3\epsilon_0\rho} + C$$

No confundir la coordenada esférica ρ con la densidad de carga uniforme ρ_0.

Ahora, para obtener el resultado deseado, restamos estos campos. El problema tiene simetría cilíndrica, por lo que debemos expresar el campo de la esfera en estas coordenadas. Tenemos que $\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{z}$ [1], por lo que $\rho^2 = r^2 + z^2$ y el vector unitario $\hat{\rho}$ es:

$$\hat{\rho} = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\hat{r} + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\hat{z}$$

Ahora, expresamos todo en coordenadas cilíndricas

$$\vec{E} = \vec{E_c} - \vec{E_e} = \left(\frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0 r} - \frac{\rho_0 a^3 r}{3\epsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\right)\hat{r} - \frac{\rho_0 a^3 z}{3\epsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

De la misma forma, el potencial resulta

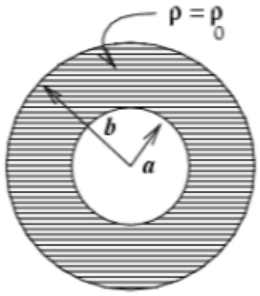
$$V(r,z) = V_c - V_e = -\frac{a^2\rho_0}{2\epsilon_0}\ln r - \frac{a^3\rho_0}{3\epsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} + C$$

donde esta constante la podemos determinar eligiendo como referencia un punto de potencial nulo.

[1] Explicación en la última página.

Problema 3

Considere una región esférica de radio b, que tiene una distribución de carga uniforme $\rho(r) = \rho_0$ para la región determinada por $a < r < b$ y densidad nula para $r < a$. Determine el potencial eléctrico en todo el espacio.



SOLUCION:

Lo que haremos primero será calcular el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en todo el espacio y con este resultado obtendremos el potencial utilizando:

$$V_p = -\int_{\infty}^{p} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Considerando el potencial igual a cero en el infinito. El problema tiene simetría esférica y por lo tanto se tendrá que $\vec{E} = E\,\hat{r}$. Consideraremos 3 regiones: I) $r < a$, II) $a < r < b$ y III) $r > b$.

I) $r < a$: Consideremos como superficie gaussiana un cascaron esférico de radio $r < a$. Se tiene que el vector normal a esta superficie es paralelo a $\hat{r}$. De esta manera se tendrá que el campo $\vec{E}$ es paralelo al vector normal $\hat{n}$ de la superficie S por lo que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ y por lo tanto:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E \int_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

Por otro lado la carga en el interior de la superficie es nula ya que esta contenida en el conductor: $q_{\text{int}} = 0$. Aplicando la Ley de Gauss se tendrá que:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

Y por lo tanto $E = 0$, si r < a.

II) $a < r < b$: Consideremos ahora como superficie gaussiana una cascara esférica de radio r. Al igual que en el caso anterior se tendrá que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ y por lo tanto

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E 4\pi r^2$$

La carga interior q_{int} se puede calcular fácilmente ya que la densidad de carga es constante. Se tendrá que $q_{\text{int}} = \rho_0 V$, donde V es el volumen entre la esfera de radio r y la esfera de radio a con lo que resulta

$$q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - a^3\right)$$

Aplicando la ley de Gauss:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3\epsilon_0}\pi \left(r^3 - a^3\right)$$

Con lo que se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \left(r^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

donde la dirección viene dada nuevamente por la simetría esférica.

III) $r > b$: Procediendo de igual manera que en la región II) veremos que la carga almacenada en la distribución que rodea al conductor será:

$$q_{int} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 \left(b^3 - a^3\right)$$

De esta manera aplicando la ley de Gauss tendremos que:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \left(b^3 - a^3\right)}{3r\epsilon_0}$$
$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 \left(b^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Resumiendo, el campo eléctrico en todo el espacio resulta

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\rho_0\left(r^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & a < r < b \\ \frac{\rho_0\left(b^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > b \end{cases}$$

Ahora que tenemos el campo eléctrico en todo el espacio podemos calcular el potencial eléctrico. Debemos elegir una trayectoria para tener una expresión para el vector $d\vec{\ell}$. Elegimos

una línea recta que vaya desde el infinito hasta una distancia $r > b$ Como podemos ver $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = Edr$. De esta manera el potencial eléctrico será:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r} Edr = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho_0 \left(b^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r^2} dr$$

Integrando se obtiene que:

$$V(r) = \frac{\rho_0 \left(b^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r}, \quad \text{si} \quad r > b$$

Ahora queremos calcular el potencial a una distancia r, donde $a < r < b$. Por definición tenemos que

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Descomponemos esta integral de línea separando la trayectoria desde el infinito hasta r, en las trayectorias desde infinito hasta b mas la trayectoria desde b hasta r.

$$V(r) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + -\int_{b}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La primera integral resulta de evaluar el potencial anterior en $r = b$:

$$V(b) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\rho_0 \left(b^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 b}$$

Por otro lado, para la otra integral tendremos

$$\begin{aligned} -\int_{b}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\int_{b}^{r} \frac{\rho_0 \left(r^3 - a^3\right)}{3\epsilon_0 r^2} dr \\ &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(\int_{\infty}^{b} r dr - a^3 \int_{b}^{r} \frac{1}{r^2} dr \right) \\ &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(\left(\frac{r^2}{2} \Big|_{b}^{r} \right) - a^3 \left(-\frac{1}{r} \Big|_{b}^{r} \right) \right) \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \cdot \left(\frac{b^2 - r^2}{2} + a^3 \frac{(r-b)}{rb} \right) \end{aligned}$$

De esta manera, el potencial en r resulta ser

$$V(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{b^3 - a^3}{b} + \frac{b^2 - r^2}{2} + a^3 \frac{(r-b)}{rb} \right), \quad \text{si} \quad a < x < b$$

Para la región $r < a$ descomponemos la trayectoria desde el infinito hasta r en 3 trayectorias. Tendremos que el potencial es

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + -\int_{b}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{r} + -\int_{a}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Al ser nulo el campo eléctrico para $r < a$ tendremos que

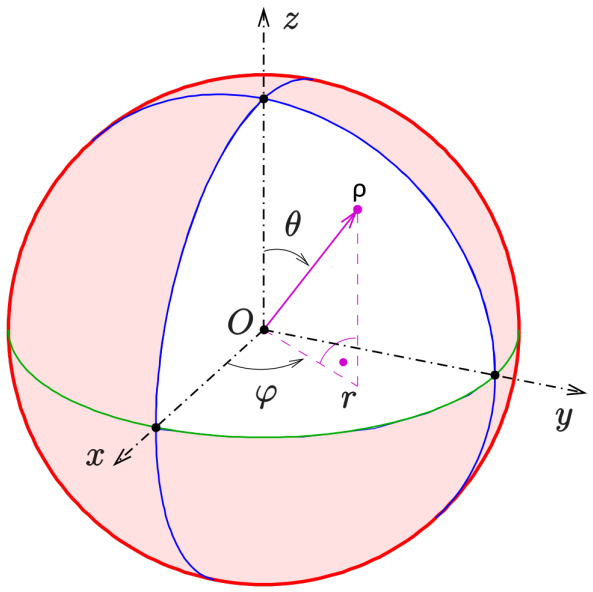
$$-\int_{a}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Y de esta manera el potencial resulta ser:

$$V(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(\frac{b^3 - a^3}{b} + \frac{b^2 - a^2}{2} + a^3\frac{(a-b)}{ab}\right), \quad \text{si} \quad r < a$$

Coordenadas esféricas a cilíndricas

Consideremos el siguiente enfoque geométrico: en una superficie esférica, un punto se ubica a una distancia ρ del origen. Si proyectamos este punto sobre el plano xy, obtenemos un radio r. Esto se ejemplifica en la siguiente imagen



Es directo notar que esta proyección corresponde al cateto opuesto del angulo polar θ (el cual se mide desde el eje z, con $0 \leq \theta \leq \pi$), es decir

$$r = \rho \sin\theta \tag{1}$$

y la coordenada vertical es el cateto adyacente, por lo tanto

$$z = \rho \cos\theta \tag{2}$$

El angulo φ es compartido en ambos sistemas, pues mide la rotación alrededor del eje z.

Observemos que $\hat{\rho}$ está en el plano generado por $\hat{r}$ (horizontal, radial en el plano xy) y $\hat{z}$ (vertical). Por lo que podemos escribirlo como una combinación lineal

$$\hat{\rho} = a\hat{r} + b\hat{z},$$

con $\hat{r} \perp \hat{z}$ y $|\hat{\rho}| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Como θ es el angulo entre $\hat{\rho}$ y $\hat{z}$, notemos que

$$\cos\theta = \hat{\rho} \cdot \hat{z} = (a\hat{r} + b\hat{z}) \cdot \hat{z} = a(\hat{r} \cdot \hat{z}) + b(\hat{z} \cdot \hat{z}) = 0 + b = b$$

Y como se debe cumplir que $a^2 + b^2 = 1$, entonces $a = \pm \sin\theta$. Ahora, como la proyección radial de $\hat{\rho}$ apunta en la misma dirección de $\hat{r}$, conservamos el signo positivo. Obtenemos

$$\hat{\rho} = \sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{z}$$

Multiplicando la expresión por un radio ρ, tenemos

$$\rho\hat{\rho} = \vec{\rho} = \rho\sin\theta\hat{r} + \rho\cos\theta\hat{z}$$

Reemplazando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos finalmente

$$\vec{\rho} = r\hat{r} + z\hat{z}$$
$$\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{z}$$