Pauta I1 - Electricidad y Magnetismo

Instituto de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Segundo Semestre 2017

Problema 1. Dada la distribución de cargas en la figura calcule (notar la carga $3q$ se encuentra en el origen)

a) El campo eléctrico en el punto P, ubicado a una distancia r del origen, y la fuerza que siente una carga $+q$ en este punto.

b) El potencial eléctrico en el punto P.

c) El trabajo necesario para mover una carga $Q = +4q$ desde el punto $\vec{P} = r\hat{x}$ hasta el punto $\vec{P_1} = -r\hat{x}$

Solución:

a)
- Por superposición: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$
- Por simetría: $\vec{E} = E\hat{x}$
- $\vec{E}_{1,x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qr}{(r^2+d^2)^{3/2}}$
- Por simetría $\vec{E}_{3,x} = \vec{E}_{1,x}$
- $\vec{E}_{2,x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3q}{r^2}$

Por lo tanto: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2r}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{3}{r^2}\right)\hat{x}$ y $\vec{F} = q\vec{E}$

b) $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{r^2+d^2}} - \frac{3}{r}\right)$

c) $\Delta W = -q\int_P^{P_1}\vec{E}\cdot\vec{s} = q(V(\vec{P_1}) - V(\vec{P})) = 0$ ya que por simetría $V(\vec{P_1}) = V(\vec{P})$

Problema 2. Una cáscara esférica conductora de radio interior a y radio exterior b contiene una carga neta Q. Se distribuye una carga en el volumen interior del cascarón de radio a de manera que el campo eléctrico en el volumen interior del cascarón está dado por:

$$\vec{E}(r) = K\left(\frac{r}{a}\right)^4 \hat{r} \quad , (r < a) \quad con \;\; K \;\; constante \;\; conocida. \tag{1}$$

Se ha puesto una película que impide que la carga interior distribuida en r ¡ a se transfiera al conductor.

a) Qué unidades tiene K?

b) Calcule la distribución de carga $\rho(r)$ que produce este campo y la carga total q en el interior del cascarón.

c) Qué carga se induce sobre la superficie interior del conductor?

d) Qué carga se induce sobre la superficie exterior del conductor?

e) Calcule el campo en todo el espacio.

f) Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.

Exprese todos los resultados de las preguntas c) en adelante en términos de a, b, Q, q (además, por supuesto, de π, ϵ_0 y r.)

Solución:

a) $[E] = \left[\frac{Newton}{Coulomb}\right]$

b) $\rho(r) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0 K}{a^4} 6r^3$

$$q = \int_V \rho(r) dV = \int_\Omega \int_0^a \left(\frac{\epsilon_0 K}{a^4} 6r^3\right) r^2 dr d\Omega = 4\pi\epsilon_0 a^2 K$$

c) Sobre la superficie interior del conductor se induce una carga $-q$

d) La carga inducida sobre la superficie exterior es q, y por conservación de la carga, la carga total sobre dicha superficie es $Q + q$

e) $$\vec{E} = \begin{cases} K\left(\frac{r}{a}\right)^4 \hat{r} & \text{si } r < a \\ \vec{0} & \text{si } a < r < b \\ \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } r > b \end{cases}$$

f) Para $r > b$ es el potencial de una carga puntual

$$V(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Para $a \leq r \leq b$ es constante ya que es el interior de un conductor

$$V(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

Y para $r < a$

$$V(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{K}{5a^4}(r^5 - a^5)$$

Problema 3. Considere un disco de espesor despreciable y radio a ubicado en el plano xy y centrado en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano. La parte central del disco $0 < r < a/2$ tiene una densidad de carga positiva uniforme + y la parte externa $a/2 < r < a$ tiene densidad de carga superficial .

a) Calcule el campo eléctrico sobre el eje de simetría del disco (eje z).

b) Evalué el campo muy cerca del disco ($z \ll a$) y muy lejos del disco ($z \gg a$). Puede responder esto calculando los límites del campo calculado en a) o usando argumentos adecuados.

c) Usando los resultados de b) justifique, sin calcular, si existe un punto sobre el eje z en el que el campo eléctrico se anula.

d) Calcule el trabajo necesario para traer una carga q desde el infinito hasta $z = 0$.

Solución:

a) El campo del disco se puede obtener como la superposición del campo de un disco de radio a y densidad $-\sigma$ con el campo de un disco de radio $a/2$ y densidad de carga superficial 2σ. De este modo:

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} + \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\hat{z} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} + \frac{z}{\sqrt{z^2+(a/2)^2}}\right)\hat{z}$$

b) Cuando se está muy cerca ($z \ll a$), el disco se ve como un plano infinito de densidad $+\sigma$ y por lo tanto el campo será:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} Sign(z)\hat{z}$$

Cuando se está muy lejos ($z \gg a$) el campo se puede aproximar por el de una carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 z^2}\hat{z}$$

Donde

$$Q_T = \sigma\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (-\sigma)\pi\left(a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{-\sigma\pi a^2}{2} < 0 \text{ Por lo tanto el campo será:}$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma\pi a^2}{8\pi\epsilon_0 z^2}\hat{z}$$

c) Como se puede ver, sobre el disco y muy cerca, el campo apunta según $+\hat{z}$, mientras que lejos el campo apunta según $-\hat{z}$. Esto implica que el campo se anula en algún punto sobre el disco.

d) $$W = -q\int_0^\infty \vec{E}\cdot\vec{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\int_0^\infty dz + \int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}dz - 2\int_0^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2+(a/2)^2}}dz\right) = 0$$

Por lo tanto $W = 0$