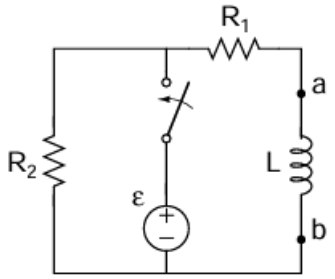
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 28

Problema 1

En la figura, el interruptor se cierra en $t < 0$ y se establece una condición de estado estable. El interruptor se abre después en $t = 0$.



a) ¿Cuál es la energía almacenada en la bobina justo antes de abrir el interruptor?

b) Encuentre la diferencia de potencial en la bobina justo después de abrir el interruptor ¿Cuál extremo de la bobina está a mayor potencial, a o b?

c) Realice gráficas a mano de las corrientes en las resistencias, como funciones del tiempo.

d) ¿Cuánto tiempo después de $t = 0$ la corriente en R_2 es $\mathbf{i}$?

SOLUCION:

a) Cuando se ha alcanzado un equilibrio estable, la corriente en un circuito LR ya no varía en el tiempo, y por ende ya no hay diferencia de potencial entre los extremos del inductor. Decimos en ese caso que el inductor se comporta como un cortocircuito y el circuito de la figura es simplemente una pila con dos resistencias. Suponiendo que la

corriente circula en sentido horario en la malla derecha, y anti-horario en la izquierda, la ley de las mallas -aplicada a la malla derecha- implica que:

$$\varepsilon - I_1 R_1 = 0$$

en donde I_1 es la corriente que pasa por R_1. Esta es la misma corriente que pasa por el inductor, $I_L = \varepsilon / R_1$. La energía en el inductor es, entonces,

$$U_L = \frac{L {I_L}^2}{2} = \frac{L\varepsilon^2}{2{R_1}^2}$$

b) Justo después de cambiar el estado del circuito abriendo el interruptor, la corriente a través del inductor es la misma que justo antes, pues el inductor se opone a los cambios en la corriente circulante. Esta es, por ende, la corriente que circula en toda la malla exterior. Note que la corriente en R_2 se ha invertido. La ley de mallas nos indica entonces que, en $t = 0^+$,

$$\varepsilon_L\left(0^+\right) - I\left(0^+\right) R_1 - I\left(0^+\right) R_2 = 0$$

con $I\left(0^+\right) = \varepsilon / R_1$. Despejando la diferencia de potencial,

$$\varepsilon_L\left(0^+\right) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\varepsilon$$

y como la corriente circula en sentido horario -en la malla externa-, el potencial en b es mayor que en a.

c) Para un instante $t > 0$, la ley de las mallas nos dice que

$$\varepsilon_L - I\left(R_1 + R_2\right) = 0$$

en donde $\varepsilon_L = -L\dot{I}$, por Lenz. La ecuación queda

$$\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0 \quad \longrightarrow \quad (D + \alpha) I = 0$$

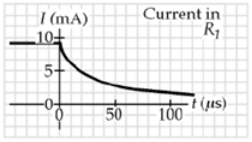
con $\alpha = R/L$ y $R = R_1 + R_2$. Usando el Método del operador diferencial aprendido en el curso de Ecuaciones Diferenciales,

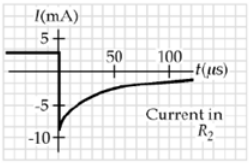
$$I(t) = Ke^{-\alpha t}$$

Reemplazando $I(0) = \varepsilon / R_1$,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\alpha t}$$

Este resultado era el esperado: en ausencia de una fem externa, la corriente decae exponencialmente en un circuito LR. Toda la energía almacenada en el inductor es disipada por la resistencia. Esta corriente es la misma que circula en ambas resistencias. Un bosquejo de ambas corrientes es parecido al que aparece a continuación. Los números corresponden a $\varepsilon = 18$ V, $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 6$ kΩ y $L = 0{,}4$ H.





Note que, en R_2, la corriente se vuelve negativa. Esto es porque el sentido se ha invertido respecto de su sentido original.

d) Sea t^* el instante en el cual la corriente vale **i**. Matemáticamente, $I(t^*) = \mathbf{i}$. Reemplazando en la ecuación de la corriente, podemos despejar el tiempo en función de la corriente deseada,

$$\mathbf{i} = I(t^*) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\alpha t^*} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathbf{i} R_1}{\varepsilon} = e^{-\alpha t^*}$$

Tomando logaritmo y despejando el tiempo,

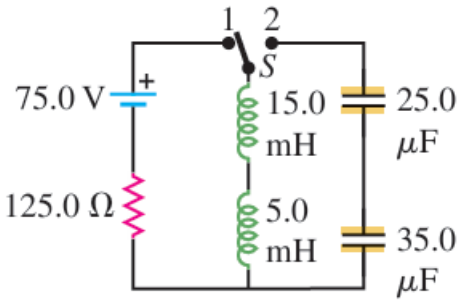
$$t^* = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\mathbf{i} R_1}{\varepsilon}\right) = \frac{L}{R_1 + R_2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\mathbf{i} R_1}\right)$$

Problema 2

En el circuito de la figura, ni la batería ni los inductores tienen una resistencia apreciable, los condensadores están inicialmente descargados y el interruptor S ha estado en la posición 1 durante mucho tiempo.

a) ¿Cuál es la corriente en el circuito?

b) De repente, el interruptor se coloca en la posición 2. Encontrar la carga máxima que recibirá cada condensador y el tiempo que tardarán en adquirirla después de accionar el interruptor.



SOLUCION:

a) En estado estacionario con el interruptor en posición 1, no fluye corriente a los condensadores y los inductores pueden sustituirse por cables. Por lo tanto

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{75\ \text{V}}{125\ \Omega} = 0{,}6\ \text{A}$$

b) Una vez el interruptor se encuentra en la posición 2, el problema puede reducirse calculando las capacitancias e inductancias equivalentes del circuito

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{25\ \mu\text{F}} + \frac{1}{35\ \mu\text{F}} \quad \longrightarrow \quad C_{\text{eq}} = 14{,}6\ \mu\text{F}$$
$$L_{\text{eq}} = 15\ \text{mH} + 5\ \text{mH} = 20\ \text{mH}$$

Para obtener la carga máxima, consideremos conservación de energía

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} L i_0^2$$

Resolviendo por q, obtenemos

$$q = i_0 \sqrt{LC} = 3{,}24 \times 10^{-4}\ \text{C}$$

Ahora, con el interruptor en la posición 2, el circuito equivalente toma la forma de un circuito LC, cuya corriente oscila en el tiempo de la forma

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) = Q\cos(\omega t - \pi/2)$$

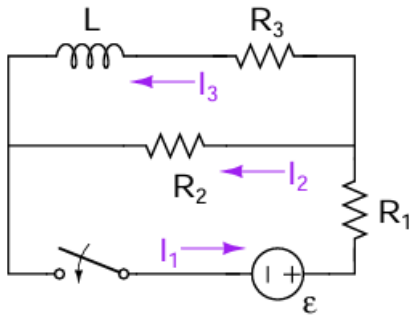
con $\phi = -\pi/2$ ya que los condensadores están en un principio descargados para después cargarse y $\omega = \sqrt{1/LC}$.

Notemos que esta función tiene su máximo cuando $t = T/4$, por lo tanto

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} = 8{,}49 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

Problema 3

Considere el circuito de la figura



Determine la corriente por cada resistencia:

a) Inmediatamente después de cerrar el interruptor.

b) Después que ha pasado mucho tiempo de cerrado el interruptor.

c) Suponga que el interruptor es reabierto después que ha estado mucho tiempo cerrado, encuentre nuevamente las corrientes:

   I. Inmediatamente después que es abierto.

   II. Después de un largo tiempo.

SOLUCION:

a) Inmediatamente después de que el interruptor es cerrado, la corriente a través de la inductancia es cero ya que la *fem* autoinducida evita que la corriente crezca abruptamente. Así, $I_3 = 0$.

   Debido a que $I_1 = I_2 + I_3$, se tiene que $I_1 = I_2$. Utilizando las reglas de Kirchhoff,

$$\epsilon - I_1 R_1 - I_1 R_2 = 0$$
$$\Rightarrow \; I_1 = I_2 = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2}$$

b) Después de un largo tiempo, no hay *fem* autoinducida en la inductancia y las corrientes pasan a ser constantes. Para la malla inferior, se tiene ahora

$$\epsilon - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

y para la malla superior,

$$I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0$$

por último, por regla de nodos, $I_1 = I_2 + I_3$. Resolviendo, se obtiene

$$I_1 = \frac{\epsilon(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$
$$I_2 = \frac{\epsilon R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$
$$I_3 = \frac{\epsilon R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

c) I. Inmediatamente después de que el interruptor es abierto nuevamente, la corriente a través de R_1 es 0. Esto implica que $I_2 + I_3 = 0$. La malla superior ahora forma un circuito RL que decae e I_3 tiende a mantenerse en el tiempo. Así

$$I_3 = -I_2 = \frac{\epsilon R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

II. Despues de mucho tiempo, toda la energía se disipa, por lo que

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0$$