Solución I2: FIS1523 - Termodinámica

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs. Mario Favre, Hernán Chuaqui y Griselda García
Segundo Semestre 2010

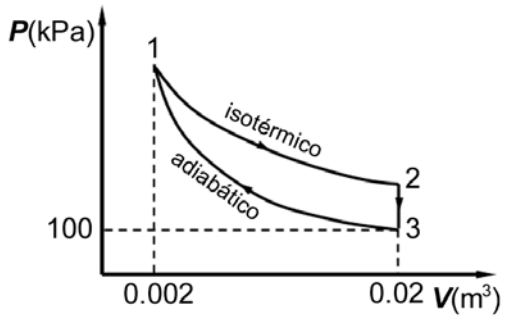
1. 0.15 kg de aire, en un sistema formado por un pistón y un cilindro, realizan el ciclo termodinámico que muestra la figura. Encuentre:

   a) El trabajo desarrollado por el aire en un ciclo.

   b) La eficiencia termodinámica del ciclo.

   c) La eficiencia del ciclo de Carnot equivalente.

   Datos: $M_{aire} = 28.97$ g/mol (masa molecular del aire), $R = 8.314$ J/mol·K (constante de los gases ideales).



solución

a) Se realiza trabajo en los tramos $1 \to 2$ y $3 \to 1$, por lo que

$$W = W_{12} + W_{31}$$

Tramo $1 \to 2$ es isotérmico: el trabajo es

$$W_{12} = \int_1^2 P dV$$

Ecuación de Estado de Gas ideal,

$$PV = nRT$$

por lo que

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Como la temperatura es constante en el tramo,

$$W_{12} = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR}$$

Reemplazando en W_{12},

$$W_{12} = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

con $V_1 = 0.002$ m^3 y $V_2 = 0.02$ m^3.

P_1 se puede obtener del hecho que el tramo $3 \to 1$ es adiabático y satisface la ecuación

$$PV^\gamma = cte$$

Para el aire $\gamma = 1.4$. Como V_1, $V_3 = V_2$ y P_3 son conocidos,

$$P_1 = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma P_3$$

Reemplazando,

$$P_1 = \left(\frac{0.01}{0.002}\right)^{1.4} 10^5 = 10^{1.4} 10^5 = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Reemplazando en W_{12},

$$W_{12} = 2.5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \ln(10) = 11513 \text{ J}$$

En el tramo $3 \to 1$, usando la ecuación para proceso adiabático,

$$W_{31} = P_3 V_3^\gamma \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_3 V_3^\gamma}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \Big|_{V_3}^{V_1}$$

Reemplazando,

$$W_{31} = \frac{10^5 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^{1.4}}{-0.4} \left[\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^{-0.4} - \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^{-0.4}\right] = -7555 \text{ J}$$

Luego, el trabajo es

$$W = W_{12} + W_{31} = 11513 - 7555 = 3958 \text{ J}$$

b) La eficiencia termodinámica es

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{out}|}{\Delta Q_{in}}$$

La primera Ley de la Termodinámica establece que

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

con

$$\Delta U = nc_v \Delta T$$

Como el tramo $1 \to 2$ es isotérmico, $\Delta U_{12} = 0$. Luego,

$$\Delta Q_{12} = W_{12} = 11513 \text{ J}$$

Como el tramo $2 \to 3$ es a volumen constante, $W_{23} = 0$ y

$$\Delta Q_{23} = \Delta U_{23} = nc_v \left(T_3 - T_2\right)$$

Se tiene que como el aire es gas ideal diatómico, $c_v = (5/2)R$, y

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR}$$

por lo que

$$\Delta Q_{23} = \frac{5}{2}\left(P_3 V_3 - P_2 V_2\right)$$

Usando la ecuación de estado en el proceso isotérmico $1 \to 2$,

$$P_2 = \frac{V_1}{V_2} P_1 = \frac{0.002}{0.02} 2.5 \cdot 10^6 = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Reemplazando,

$$\Delta Q_{23} = \frac{5}{2}\left(10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} - 2.5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\right) = -7500 \text{ J}$$

Como el tramo $3 \to 1$ es adiabático, no hay flujo de calor.

Así,

$$\Delta Q_{in} = \Delta Q_{12} = 11513 \text{ J}$$
$$\Delta Q_{out} = \Delta Q_{23} = -7500 \text{ J}$$

Luego,

$$\eta = 1 - \frac{7500}{11513} = 0.348$$

c) La eficiencia del ciclo de Carnot equivalente es

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$$

donde T_{min} y T_{max} son la mínima y máxima temperatura en el ciclo. En este caso, usando la ecuación de estado,

$$T_1 = T_2 = \frac{P_1 V_1}{nR}$$

El número de moles es

$$n = \frac{M}{M_{aire}} = \frac{150}{28.97} = 5.18 \text{ moles}$$

Luego,

$$T_1 = \frac{2.5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5.18 \cdot 8.134} = 118.7 \text{ K}$$

Adicionalmente,

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{5.18 \cdot 8.134} = 47.5 \text{ K}$$

Reemplazando,

$$\eta_C = 1 - \frac{47.5}{118.7} = 0.6$$

2. Un sistema formado por un cilindro y pistón ideal, sin roce, se mantiene a presión constante. En su interior hay 1.0 kg de agua con una calidad del 5 %, a 150°C. Se transfiere calor de modo tal que agua líquida se transforma en vapor, a una tasa de 1.0 g/s. Encuentre:

   a) La tasa de variación de la energía interna en el interior del cilindro.

   b) La tasa de variación del volumen del cilindro.

   c) La tasa de transferencia de calor.

Solución

a) Se trata de un proceso estacionario, en que las tasas de variación temporal se mantienen constantes. La Primera Ley de la Termodinámica,

$$dU = \delta Q - \delta W$$

Derivando respecto del tiempo,

$$\dot{U} = \dot{Q} - \dot{W}$$

Ecuación de continuidad de masa,

$$m_T = m_{vap} + m_{liq} = cte$$

Derivando,

$$\dot{m}_T = \dot{m}_{vap} + \dot{m}_{liq} = 0$$

por lo que

$$\dot{m}_{liq} = -\dot{m}_{vap}$$

con $\dot{m}_{vap} = 1$ g/s $= 0.001$ kg/s. La energía interna tiene dos componentes, la del líquido saturado y la del vapor saturado. Así,

$$U = U_{liq} + U_{vap} = m_{liq}u_f + m_{vap}u_g$$

donde u_f y u_g son la energía interna del líquido y vapor saturado rspectivamente, en la condición de temperatura correspondiente. Luego, como u_f y u_g son constantes a una condición dada,

$$\dot{U} = \dot{m}_{liq}u_f + \dot{m}_{vap}u_g = \dot{m}_{vap}\left(u_g - u_f\right) = \dot{m}_{vap}u_{fg}$$

De la tabla respectiva, para $T = 150$°C, se tiene $u_f = 631.7$ kJ/kg y u_g 2559.5 kJ/kg, por lo que $u_{fg} = 1926.8$ kJ/kg.
Reemplazando,

$$\dot{U} = 0.001 \cdot 1926.9 \approx 1.93 \text{ kJ/s}$$

b) El volumen total en cada instante de tiempo es

$$V = V_{liq} + V_{vap}$$

Con el mismo razonamiento anterior,

$$V = m_{liq} v_f + m_{vap} v_g = m_{vap} \left(v_g - v_f \right) = m_{vap} v_{fg}$$

Derivando,

$$\dot{V} = \dot{m}_{vap} v_{fg}$$

De la tabla respectiva, para $T = 150°\text{C}$, se tiene $v_f = 0.00109$ m^3/kg y $v_g = 0.3928$ m^3/kg, por lo que $v_{fg} = 0.30171$ m^3/kg. Reemplazando,

$$\dot{V} = 0.001 \cdot 0.30171 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

c) La tasa de transferencia de calor, $\dot{Q}$, se obtiene de la Primera Ley. Resta por encontrar $\dot{W}$. Como

$$dW = PdV$$

con $P = cte$, derivando respecto del tiempo,

$$\dot{W} = P\dot{V} = P\dot{m}_{vap} v_{fg}$$

Usando la Primera Ley y resultados anteriores,

$$\dot{Q} = \dot{m}_{vap} u_{fg} + \dot{m}_{vap} v_{fg} = \dot{m}_{vap} \left(u_{fg} + P v_{fg} \right)$$

La entalpía específica(entalpía por unidad de masa) es

$$h = u + Pv$$

por lo que

$$\dot{Q} = \dot{m}_{vap} h_{fg}$$

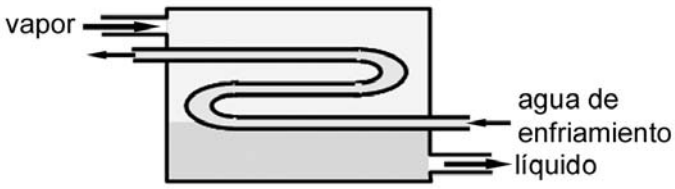
De la tabla respectiva, para $T = 150°\text{C}$, se tiene $h_{fg} = 2114.2$ kJ/kg. Reemplazando,

$$\dot{Q} = 0.001 \cdot 2114.2 \approx 2.1 \text{ kJ/kg}$$

3. Un condensador en una planta generadora de potencia recibe 5 kg/s de vapor a 15 kPa, con una calidad del 90 % y transfiere calor a agua que circula en el interior a una temperatura promedio de 17°C, en un proceso a presión constante. Encuentre

   a) La tasa de transferencia de calor al agua de enfriamiento.

   b) La tasa de generación de entropía, suponiendo que el agua a la salida del condensador es líquido saturado.



Solución

a) El proceso ocurre en estado estacionario. No se realiza trabajo y contribuciones de energía cinética y potencial son despreciables y se conserva la masa.

$$\dot{m}_e = \dot{m}_s = \dot{m}$$

donde los sufijos e y s se refieren a entrada y salida del v.c., respectivamente. En estas condiciones, la Primera Ley de la Termodinámiva para un v.c. se escribe como

$$\dot{m}h_e + \dot{Q} = \dot{m}h_s$$

La entalpía de entrada corresponde a vapor a 15 kPa, con una calidad del 90 %. Luego,

$$h_e = h_f + 0.9 \cdot h_{fg}$$

La presión en el condensador es $P = 15$ kPa, constante. La tabla respectiva no incluye valores a esa presión, por lo que es necesario interpolar entre valores vecinos. De la tabla,

P(kPa)	h_f(kJ/kg)	h_{fg}(kJ/kg)
14	220.0	2376.6
16	231.5	2369.9

En este caso los valores interpolados correspondientes a $P = 15$ kPa corresponden al promedio de los de la tabla. Luego, $h_f = 225.75$ kJ/kg y $h_{fg} = 2373.25$ kJ/kg.
Luego, la entalpía de entrada es

$$h_e = 225.75 + 0.9 \cdot 2373.25 = 2361.67 \text{ kJ/kg}$$

La entalpía de salida corresponde a la de líquido saturado a 15 kPa, es decir, $h_e = h_f = 225.75$ kJ/kg.
Reemplazando, con $\dot{m} = 5$ kg/s,

$$\dot{Q} = \dot{m}\,(h_s - h_e) = 5 \cdot (225.75 - 2361.67) = -10679.6\text{kJ/kg}$$

donde el signo negativo indica que se cede calor al agua circulante.

b) La Segunda Ley de la Termodinámica aplicada a un v.c., en un proceso estacionario, con las consideraciones anteriores, está dada por

$$\dot{m}s_e + \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_{gen} = \dot{m}s_s$$

con la misma definición de índices anterior, y siendo T la tamperatura en la frontera del medio al cual se transfiere calor desde el v.c.

En particular, se tiene,

$$s_e = s_f + 0.9 \cdot s_{fg}$$

Para obtener las entropías específicas se debe interpolar entre los valores de tabla.

P(kPa)	s_f(kJ/kg·K)	s_{fg}(kJ/kg·K)
14	0.7365	7.2968
16	0.7719	7.2149

Interpolando como en el caso anterior, resulta $s_f = 0.7542$ kJ/kg·K y $s_{fg} = 7.2558$ kJ/kg·K, por lo que

$$s_e = 0.7542 + 0.9 \cdot 7.2558 = 7.2844 \text{ kJ/kg·K}$$

Con la condición de líquido saturado, $s_s = s_f = 0.7542$ kJ/kg·. Reemplazando, con $T = 17°\text{C} = 290$ K,

$$\dot{S}_{gen} = \dot{m}\,(s_s - s_e) - \frac{\dot{Q}}{T} = 5 \cdot (0.754 - 7.2844) + \frac{10679.6}{290} = 4.174 \text{ kJ/K·s}$$