FIS1523 ⋆ Termodinámica
✓ **Ayudante:** *Sebastián Urrutia Quiroga*
✓ **Correo:** sgurruti@uc.cl
✓ **Página Web:** www.sgurruti.cl/termo

Ayudantía ⋆ Desigualdad de Clausius

1. Una turbina a vapor opera con una temperatura de entrada de 400° C, y una temperatura de salida de 150° C. ¿Cuál es la máxima cantidad de trabajo que la turbina puede hacer para una cantidad de calor Q de ingreso? ¿Bajo qué condiciones se alcanza el máximo?

   Solución:

   De la Desigualdad de Clausius,

   $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

   donde el subíndice (1) corresponde a la entrada, y el subíndice (2) a la salida de la turbina. Así,

   $$W = Q_1 + Q_2 \leq \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_1$$

   Sustituyendo $Q_1 = Q$, $T_1 = 673\,\mathrm{K}$ y $T_2 = 423\,\mathrm{K}$ en la expresión anterior,

   $$W_{max} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q = 0.37Q$$

   El signo igual de la desigualdad de Clausius es válida si y solo si el ciclo es reversible, cuando y solo cuando la turbina de vapor es un motor reversible se alcanza el máximo trabajo dadas las temperaturas de operación. ■

2. Dos cuerpos idénticos tienen energía interna $U = NCT$, con N el número de partículas, T la temperatura y C una constante. Los valores de N y C son los mismos para cada cuerpo. Las temperaturas iniciales de ambos cuerpos son T_1 y T_2, y son usados como fuente de energía al conectarlos a una máquina térmica de Carnot que los lleva a una temperatura común final T_f.

   a) ¿Cuál es el valor de la temperatura final T_f?

   b) ¿Cuánto es el trabajo producido por la máquina térmica?

   Solución:

   a) Ambos cuerpos son capaces de cambiar su energía interna de forma $dU = NC\,dT$. Por la Primera Ley de la Termodinámica aplicada a dichos cuerpos:

   $$dQ_1 = NC\,dT_1 \qquad \wedge \qquad dQ_2 = NC\,dT_2$$

De la Desigualdad de Clausius aplicada al ciclo de Carnot, que es reversible,

$$\frac{dQ_1}{T_1}+\frac{dQ_2}{T_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dQ_1}{T_1}=-\frac{dQ_2}{T_2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dT_1}{T_1}=-\frac{dT_2}{T_2}$$

Integrando,

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_f}\frac{dT_1}{T_1} &= -\int_{T_2}^{T_f}\frac{dT_2}{T_2}\\ \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) &= -\ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)\\ \therefore\ T_f &= \sqrt{T_1T_2}\end{aligned}$$

b) Si pérdida de generalidad, supondremos que $T_1 > T_2$. Notemos que:

$$\begin{aligned}T_f &= \sqrt{T_1T_2}\\ {T_f}^2 &= T_1T_2 < {T_1}^2\\ T_f &< T_1\end{aligned}$$

De manera análoga se puede probar que $T_f > T_2$. Así, el calor que ingresa y sale de la máquina térmica es:

$$Q_{in}=NC(T_1-T_f)>0 \qquad \wedge \qquad Q_{out}=NC(T_2-T_f)<0$$

Por la Primera Ley de la Termodinámica,

$$W_{ciclo}=Q_{in}+Q_{out}=NC(T_1+T_2-2T_f)$$

■

3. Un aire acondicionado es un dispositivo usado para enfriar el interior de una casa. Es, es esencia, un refrigerador en sobre el cual se hace trabajo mecánico y se remueve calor del interior (más frío) hacia el exterior (más caliente). Supongamos que un sistema de aire acondicionado opera en un ciclo de Carnot reversible entre el interior (a temperatura T_2) y el exterior (a temperatura $T_1 > T_2$) consumiendo P unidades de energía por segundo del sistema eléctrico. En un segundo, el aire acondicionado absorbe $Q_2 > 0$ unidades de energía de la casa y emite $|Q_1|$ unidades de energía al exterior. Desarrolle una fórmula para la eficiencia $\eta = Q_2/P$ en términos de T_1 y T_2.

Solución:

De la Primera Ley de la Termodinámica,

$$P+Q_2=|Q_1|$$

A partir de la Desigualdad de Clausius,

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{Q_2}{T_2}=-\frac{Q_1}{T_1}=\frac{|Q_1|}{T_1}$$

Con ello,

$$\eta=\frac{Q_2}{P}=\frac{T_2}{T_1-T_2}$$

■