Solución I1: FIS1523 - Termodinámica

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs. Mario Favre y Griselda García
Primer Semestre 2011

1. Un cilindro hueco de aluminio de 20 cm de profundidad tiene un volumen interno de 3.0 litros, a 10°C. El cilindro es llenado completamente con aguarrás, que tiene un coeficiente de expansión térmica volumétrica $9.0{\cdot}10^{-4}(^{\circ}C)^{-1}$. Luego el cilindro lleno es calentado lentamente, hasta alzanzar la temperatura de 90°C.

   a) ¿Cuánto aguarrás se derrama en el proceso?

   b) Si luego el cilindro es enfriado a los 10°C originales, ¿cuál será la altura del aguarrás en el interior del cilindro?

$\alpha_{Al} = 2.4{\cdot}10^{-5}(^{\circ}C)^{-1}$

Solución

a) Se debe calcular los cambios de volumen del líquido y el cilindro contenedor. Si V_c es el volumen inicial del cilindro, r_c su radio y h su altura,

$$V_c = \pi r_c^2 h$$

El volumen inicial de aguarrás es $V_a = V_c$. Al cambiar la temperatura en ΔT, el volumen de aguarrás cambia a

$$V_a' = V_c\,(1 + \beta\Delta T)$$

El volumen interno del cilindro cambia a

$$V_c' = \pi {r'}_c^{\,2} h' = \pi r_c^2\,(1+\alpha\Delta T)^2\,h\,(1+\alpha\Delta T)$$

$$V_c' = \pi r_c^2 h\,(1+\alpha\Delta T)^3 = V_c\,(1+\alpha\Delta T)^3$$

Como en general $\alpha\Delta T << 1$, expandiendo en serie de Taylor,

$$V_c' = V_c\,(1+3\alpha\Delta T)$$

El volumen de aguarrás derramada en el proceso es

$$\Delta V = V_a' - V_c'$$

Reemplazando,

$$\Delta V = V_c\,(\beta - 3\alpha)\,\Delta T$$

Reemplazando con $V_c = 3.0$ lt, $\beta = 9.0{\cdot}10^{-4}(^{\circ}C)^{-1}$, $\alpha = 2.4{\cdot}10^{-5}(^{\circ}C)^{-1}$ y $\Delta T =$ 80°C, resulta

$$\Delta V = 0.1987 \text{ lt}$$

b) Reemplazando valores, el volumen interior del cilindro a 90°C es

$$V_c' = V_c\,(1 + 3\alpha\Delta T) = 2.8 \text{ lt}$$

que corresponde también al volumen de aguarrás que quedó en su interior. Al bajar la temperatura de 90° a 10°, el aguarrás se enfría y contrae, a un volumen

$$V"_a = V_c'\,(1 + \beta\Delta T)$$

siendo ahora ΔT = -80°C. Reemplazando,

$$V"_a = 2.8 \text{ lt}$$

la altura original del cilindro era $h = 0.2$ m y su radio está dado por

$$r_c = \left(\frac{V_c}{\pi h}\right)^{1/2}$$

Con $V_c = 3.0$ lt $= 0.003$ m^3, reemplazando,

$$r_c = 0.069 \text{ m}$$

La ltura del aguarrás en el interior del cilindro es ahora

$$h_a' = \frac{V"_a}{\pi r_c^2}$$

Reemplazando, con $V"_a = 2.8$ lt $= 0.0028$ m^3, la altura del aguarrás en el interior del cilindro es

$$h_a' = 0.1872 \text{ m}$$

2. Un contenedor esférico de hierro, cuyo diámetro interior es 20 cm y el espesor de su pared es 0.5 cm, está totalmente lleno con una mezcla de agua y hielo a 0°C, como muestra la figura. La temperatura exterior es 5°C. Determine,

   a) El flujo de calor al exterior de la esfera.

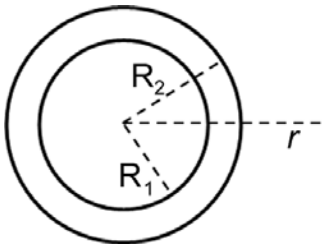
   b) La tasa a la cual se funde hielo en el interior del contenedor, expresando el resultado en kg/s.

   Nota: resuelva el problema de manera exacta, sin usar como aproximación que el espesor de la pared del contenedor es mucho menor que el radio del mismo.

   Conductividad térmica del hierro: $k_{Fe} = 79.5\ W/m{\cdot}°\text{C}$, calor latente de fusión del hielo, $L_{hielo} = 3.33{\cdot}10^5\ J/kg$.

Solución

a) Considerando la geometría que muestra la figura,



La ecuación prara transfeencia de calor en la dirección radial, a través de la pared de hierro es

$$\dot{Q} = -k_{Fe} A \frac{dT}{dr}$$

donde $A = 4\pi r^2$ es el área a distancia r del centro de la esfera, en el interior de la pared. Reemplazando,

$$\dot{Q} = -4\pi k_{Fe} r^2 \frac{dT}{dr}$$

En estado estacionario $\dot{Q}$ no depende de r. Integrando entre el radio interior y exterior de la pared,

$$\dot{Q} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k_{Fe} \int_{T_1}^{T_2} dT$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas en las superficies interior y exterior de la pared, respectivamente. Integrando,

$$\dot{Q} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -4\pi k_{Fe} \left(T_2 - T_1 \right)$$

Despejando, el flujo de calor resulta ser

$$\dot{Q} = \frac{4\pi k_{Fe} R_1 R_2 \left(T_1 - T_2\right)}{R_2 - R_1}$$

Los datos, $R_1 = 0.1$ m, $R_2 = 0.105$ m, $T_1 = 0°$C, $T_2 = 5°$C, $k_{Fe} = 79.5\ W/m{\cdot}°$C. Reemplazando,

$$\dot{Q} = 10490 \text{ J/s} = 10.49 \text{ kW}$$

b) La ecuación que describe la fusión del hielo en el interior de la esfera es

$$Q = mL_{hielo}$$

donde m es la masa de hielo que se funde, L_{hielo} es el calor latente de fusión del hielo, y Q la cantidad de calor necesario para fundirlo. Derivando respecto del tiempo,

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = L_{hielo}\frac{dm}{dt}$$

por lo que la tasa a la cual se funde hielo es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\dot{Q}}{L_{hielo}}$$

Con $L_{hielo} = 3.33{\cdot}10^5\ J/kg$ y $\dot{Q} = 10.49$ kW, resulta

$$\frac{dm}{dt} = 0.0315 \text{ kg/s}$$

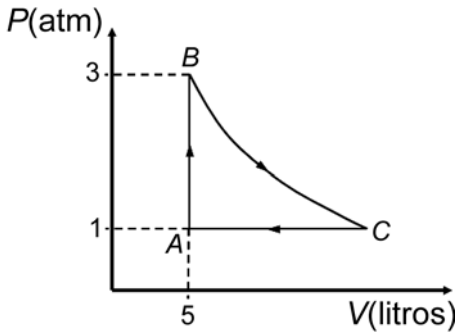
3. Un gas monoatómico ideal ocupa 5.0 litros a presión atmosférica y a 27°C (punto A de la figura). El gas es calentado a volumen constante, hasta que la presión llega a 3.0 atmósferas (punto B en la figura). Luego el gas se expande isotérmicamente, hasta volver a la presión de una atmósfera (punto C de la figura). Finalmente es comprimido isobáricamente, para volver a la condición original.

   a) Determine el número de moles del gas.

   b) Encuentre la temperatura en B y C, y el volumen en C.

   c) Determine la energía interna del gas en los puntos A, B y C.

   d) Para los procesos $A \to B$, $B \to C$ y $C \to A$, encuentre el flujo de calor, el trabajo realizado por el gas, y el cambio en la energía interna.



Solución

a) La Ecuación de Estado de los gases ideales es

$$PV = nRT$$

luego, el número de moles es

$$n = \frac{PV}{RT}$$

En el punto A se conoce $T_A = 27°\text{C} = 300$ K, $V_A = 5.0$ lt $= 0.005$ m^3, $P_A = 1$ atm $= 1.01{\cdot}10^5$ Pa. Reemplazando, con $R = 8.314 J/mol \cdot K$,

$$n = 0.202 \text{ moles}$$

b) De la Ec. de Estado, la temperatura es

$$T = \frac{PV}{nR}$$

En el punto B, $P_B = 3$ atm $= 3.03{\cdot}10^5$ Pa, $V_B = 5.0$ lt $= 0.005$ m^3 y $n = 0.202$ moles. Reemplazando,

$$T_B = 902 \text{ K}$$

El proceso $B \to C$ es isotérmico, luego $T_C = T_B = 902$ K.
De la Ec. de Estado,

$$V = \frac{nRT}{P}$$

En C, $P_C = P_A = 1$ atm $= 1.01{\cdot}10^5$ Pa. Reemplazando con los otros valores,

$$V_C = 0.015 \text{ m}^3 = 15 \text{ lt}$$

c) La energía interna de un gas monoatómico de n moles a temperatura T es

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

Usando los valores de temperatura correspondientes, resulta

$$U_A = 755.7 \text{ J}$$

$$U_B = U_C = 2272.3 \text{ J}$$

d) La Primera ley de la Termodinámica es

$$dU = \delta Q - \delta W$$

Integrando sobre un proceso,

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

con

$$W = \int P dV$$

y

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

Proceso $A \to B$:

En este caso $V_A = V_V = \text{cte}$, por lo que $W_{AB} = 0$. Luego,

$$\Delta Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}nR\Delta T_{AB} = \frac{3}{2}nR\left(T_B - T_A\right)$$

Reemplazando,

$$\Delta Q_{AB} = \Delta U_{AB} = 1516.5 \text{ J}$$

Proceso $B \to C$:

El proceso es isotérmico, luego $T_C = T_B$, por lo que $\Delta U_{BC} = 0$. Así,

$$\Delta Q_{BC} = W_{BC} = \int_B^C P dV$$

De la Ec. de Estado,

$$\Delta Q_{BC} = W_{BC} = nRT_B \int_B^C \frac{dV}{V} = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

Reemplazando,

$$\Delta Q_{BC} = W_{BC} = 1664.2 \text{ J}$$

Proceso $C \to A$:

$$\Delta U_{CA} = \frac{3}{2} nR\Delta T_{CA} = \frac{3}{2} nR\left(T_A - T_C\right)$$

Reemplazando,

$$\Delta U_{CA} = -1516.5 \text{ J}$$

En el proceso $P = P_A = \text{cte}$, luego

$$W_{CA} = \int_C^A P dV = P_A\left(V_a - V_C\right)$$

Reemplazando,

$$W_{CA} = -1010 \text{ J}$$

Usando la Primera Ley,

$$\Delta Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA}$$

Remmplazando,

$$\Delta Q_{CA} = -2526.5 \text{ J}$$

Notar que

$$\Delta Q_{AB} + \Delta QBC + \Delta Q_{CA} = W_{BC} + W_{CA}$$

como era de esperar.