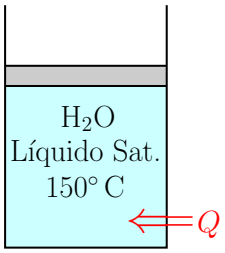
FIS1523 ⋆ Termodinámica
✓ **Ayudante:** *Sebastián Urrutia Quiroga*
✓ **Correo:** sgurruti@uc.cl
✓ **Página Web:** www.sgurruti.cl/termo

Ayudantía ⋆ Entropía

1. Un sistema cilindro-pistón esta lleno de agua saturada en estado líquido a 150° C. Se agrega calor desde afuera y el agua pasa al estado de vapor saturado. Durante este proceso, el pistón actúa con fuerza constante. Asuma que el proceso es reversible.



   a) ¿Cuánto vale el trabajo neto por unidad de masa?

   b) ¿Cuánto cambia la entropía del agua por unidad de masa?

   c) ¿Cuánto vale el calor agregado por unidad de masa?

Solución:

a) Como el proceso es reversible,

$$w = \frac{W}{m} = \int_{v_1}^{v_2} P\, dv = P(v_2 - v_1)$$

De la *Tabla de Agua Saturada*,

$$\begin{array}{rcll} P & = & P_{\text{Sat@150° C}} & = 476.16\,\text{kPa} \\ v_1 & = & v_{f\text{@150° C}} & = 0.001091\,\text{m}^3/\text{kg} \\ v_2 & = & v_{g\text{@150° C}} & = 0.39248\,\text{m}^3/\text{kg} \end{array}$$

Por tanto,

$$w = 186.3637862\,\text{kJ/kg}$$

b) El cambio de entropía se puede calcular como:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = s_{g\text{@150° C}} - s_{f\text{@150° C}} = s_{fg\text{@150° C}} = 4.9953\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$$

c) El proceso se realiza a temperatura constante. Además, se trata de un proceso reversible. Por tanto,

$$q = \int_{s_1}^{s_2} T\, ds = T\,\Delta s = (150 + 273\,\mathrm{K})(4.9953\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}) = 2113.0119\,\mathrm{kJ/kg}$$

■

2. 1 kg de agua ($c_a = 4.18\,\mathrm{J/g\cdot K}$) a 0° C es puesto en contacto con un reservorio de calor a 100° C. Cuando el agua alcanza los 100° C,

   a) ¿Se trata de un proceso reversible? Justifique su respuesta

   b) ¿Cuál es el cambio de entropía del agua?

   c) ¿Cuánta entropía se genera en el proceso?

   d) ¿Cómo se podría calentar el agua hasta los 100° C de modo tal que la entropía generada sea cero?

Solución:

a) Como existe transferencia de calor debido a una diferencia finita de temperatura, el proceso es **irreversible**.

b) Para calcular el cambio de entropía del agua y de todo el sistema, debemos construir un proceso reversible que tenga los mismo estados inicial y final que el proceso de este problema. Para dicho proceso,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{mc_a\,dT}{T} \quad\Longrightarrow\quad \Delta S_{agua} = \int_{273\,\mathrm{K}}^{373\,\mathrm{K}} mc_a \frac{dT}{T} = mc_a \ln\left(\frac{373}{273}\right) = 1304.605689\,\mathrm{J/K}$$

c) La entropía generada corresponde al cambio total de entropía, el cual se calcula como la suma de cada cambio de entropía (agua y reservorio), dado que ambos objetos forman un sistema adiabático. El cambio de entropía del reservorio se calcula de la siguiente forma:

$$\Delta S_{reservorio} = \frac{Q}{T} = \frac{(1000\,\mathrm{g})(4.18\,\mathrm{J/g\cdot K})(-100\,\mathrm{K})}{(373\,\mathrm{K})} = -1120.643432\,\mathrm{J/K}$$

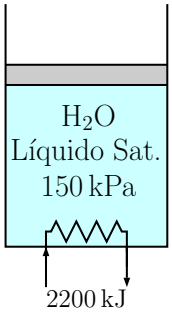
dado que el reservorio experimenta un proceso isotérmico. Así,

$$S_{gen} = \Delta S = \Delta S_{agua} + \Delta S_{reservorio} = 183.962257\,\mathrm{J/K}$$

d) Podemos imaginar infinitas fuentes de calor que poseen diferencias de temperatura infinitesimales entre dos fuentes adyacentes, yendo desde 0° C hasta 100° C. El agua toma contacto con las infinitas fuentes de calor de modo tal que aumenta su temperatura. Este proceso es reversible, por lo que $S_{gen} = 0$.

■

3. Un dispositivo pistón-cilindro aislado contiene 5 L de agua líquida saturada sometida a una presión constante de 150 kPa. Una resistencia eléctrica al interior del líquido es encendida, y 2200 kJ de energía es transferida al agua. Determine el cambio de entropía del agua durante este proceso.



Solución:

De la *Tabla de Agua Saturada*,

$$\left.\begin{array}{rcl} P_1 & = & 150\,\text{kPa} \\ x_1 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} v_1 & = & v_{f@150\,\text{kPa}} = 0.001053\,\text{m}^3/\text{kg} \\ h_1 & = & h_{f@150\,\text{kPa}} = 467.13\,\text{kJ/kg} \\ s_1 & = & s_{f@150\,\text{kPa}} = 1.4337\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K} \end{array}$$

Además,

$$m = \frac{V_1}{v_1} = \frac{(0.005\,\text{m}^3)}{(0.001053\,\text{m}^3/\text{kg})} = 4.75\,\text{kg}$$

Tomamos el contenido del cilindro como un sistema. Este es un sistema cerrado porque no entra ni sale masa. Así, el balance de energía toma la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} E_e - E_s & = & \Delta E_{sistema} \\ W_{res} - W_{pis} & = & m(u_2 - u_1) \end{array}$$

donde W_{pis} corresponde al trabajo realizado sobre el pistón para moverlo y $W_{res} = 2200\,\text{kJ}$ es la energía suministrada por la resistencia. Como el proceso se hace a presión constante,

$$W_{pis} = P(V_2 - V_1) = mP(v_2 - v_1) = m(P_2v_2 - P_1v_1)$$

con $P = P_1 = P_2$ es la presión constante a la que está sometida el agua. Así,

$$W_{res} = m(u_2 - u_1) + m(P_2v_2 - P_1v_1) = m(h_2 - h_1) \quad \Longrightarrow \quad h_2 = h_1 + \frac{W_{res}}{m} = 930.33\,\text{kJ/kg}$$

Notemos que:

$$h_2 = 930.33\,\text{kJ/kg} < 2693.1\,\text{kJ/kg} = h_{g@150\,\text{kPa}}$$

Por tanto, el estado final corresponde a una mezcla saturada. Calculando la calidad,

$$x_2 = \frac{h_2 - h_{f@150\,\text{kPa}}}{h_{fg@150\,\text{kPa}}} = \frac{930.33 - 467.13}{2226.0} = 0.2081$$

y con ello:

$$s_2 = s_{f@150\,\mathrm{kPa}} + x_2\, s_{fg@150\,\mathrm{kPa}} = 1.4337\,\mathrm{kJ/kg\cdot K} + (0.2081)(5.7894\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}) = 2.6384\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}$$

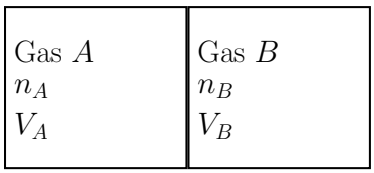
Finalmente, reemplazando,

$$\Delta S = m(s_2 - s_1) = 5.72\,\mathrm{kJ/K}$$

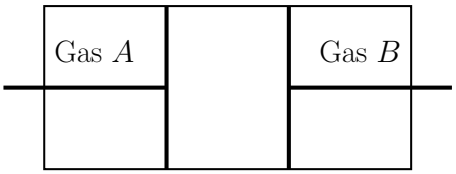
■

4. Considere dos formas de mezclar dos gases ideales:

   - **Forma 1:**
     Un contenedor adiabáticamente aislado es dividido en dos cámaras con gas de tipo A en la cámara de la izquierda y gas tipo B en la cámara de la derecha. La mezcla se realiza abriendo un agujero en la pared divisoria
   - **Forma 2:**
     Un contenedor es dividido por dos membranas rígidas perfectamente selectivas. La membrana de la izquierda es perfectamente permeable al gas tipo A pero impermeable al gas tipo B; la membrana de la derecha, el complemento. Las dos membranas están conectadas mediante varas al exterior y todo el contenedor está sumergido en un baño térmico a temperatura T. Los gases pueden ser mezclados, en este caso, haciendo retroceder cada membrana hasta topar con el borde del contenedor



Forma (1)



Forma (2)

   a) Calcule el cambio en la entropía del contenedor y su contenido para el segundo caso

   b) Calcule el cambio en la entropía del contenedor y su contenido para el primer caso

Solución:

a) Notemos que, dada la permeabilidad selectiva de cada membrana, el proceso es **reversible**. Así,

$$\Delta S_2 = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{\delta Q}{T}\bigg|_A + \int \frac{\delta Q}{T}\bigg|_B$$

Dado que el proceso se efectúa inmerso en un baño térmico, la temperatura del sistema permanece constante; así, $dT = 0$. Esto implica, que $dU = 0$, dado que se trata de gases ideales. Luego, por la Primera Ley de la Termodinámica,

$$\delta Q = \delta W = P\,dV = nRT\,\frac{dV}{V}$$

Haciendo uso de lo anterior, el cambio de entropía del sistema queda como:

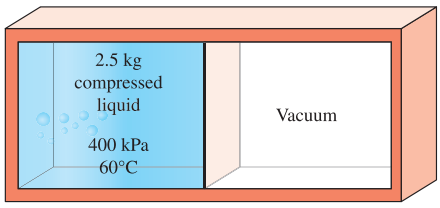
$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= \int_{V_A}^{V_A+V_B} \frac{n_A R\, dV}{V} + \int_{V_B}^{V_A+V_B} \frac{n_B R\, dV}{V} \\ &= R\left[n_A \ln\left(\frac{V_A+V_B}{V_A}\right) + n_B \ln\left(\frac{V_A+V_B}{V_B}\right)\right]\end{aligned}$$

b) En este caso, el proceso es **irreversible**. Como la energía se conserva y la energía interna de un gas ideal se relaciona con su temperatura, la temperatura de los estados inicial y final son las iguales. Por tanto, el estado inicial y final de los gases es idéntico en ambos casos. Por tanto, dado que la entropía es una función de estado, ΔS_1 satisface que:

$$\Delta S_1 = \Delta S_2$$

■

5. Un tanque rígido es dividido en dos partes iguales por una membrana impermeable. Una parte del tanque contiene 2.5 kg de agua líquida comprimida a 400 kPa y 60° C, mientras que la otra parte está vacía. La membrana es removida, y el agua se expande hasta ocupar el tanque entero. Determine el cambio de entropía del agua durante este proceso si la presión final del tanque es 40 kPa.



Solución:

Dado que no tenemos una tabla para agua comprimida con los datos del problema, aproximaremos las variables termodinámicas a sus valores de agua líquida saturada a la misma temperatura. Así,

$$\left.\begin{array}{rcl} P_1 &=& 400\,\text{kPa} \\ T_1 &=& 60^\circ\,\text{C} \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} v_1 &=& v_{f@60^\circ\,\text{C}} = 0.001017\,\text{m}^3/\text{kg} \\ s_1 &=& s_{f@60^\circ\,\text{C}} = 0.8313\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K} \end{array}$$

Notemos que

$$v_2 = 2v_1 = 0.002034\,\text{m}^3/\text{kg}$$

dado que la masa se conserva en el sistema cerrado. Por tanto,

$$\left.\begin{array}{rcl} P_2 &=& 40\,\text{kPa} \\ v_2 &=& 0.002034\,\text{m}^3/\text{kg} \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} x_2 &=& \dfrac{v_2 - v_{f@40\,\text{kPa}}}{v_{fg@40\,\text{kPa}}} = 0.0002524 \\ s_2 &=& s_{f@40\,\text{kPa}} + x_2\, s_{sg@40\,\text{kPa}} = 1.0278\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K} \end{array}$$

Finalmente,

$$\Delta S = m(s_2 - s_1) = (2.5\,\text{kg})(1.0278\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K} - 0.8313\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K}) = 0.492\,\text{kJ/K}$$

■

6. n moles de un gas ideal siguen una expansión isotérmica reversible desde un volumen V_1 hasta $2V_1$.

   a) ¿Cuál es el cambio de entropía del gas?

   b) ¿Cuál es el cambio de entropía del universo?

   c) Suponga que la misma expansión se realiza como una expansión adiabática libre. Conteste las mismas preguntas antes formuladas, aplicadas a este caso

Solución:

a) En la expansión isotérmica, el trabajo realizado por el gas viene dado por:

$$W = \int_{V_1}^{2V_1} P\, dV = nRT \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V} = nRT \ln(2)$$

Dado que la energía interna del gas no cambia (temperatura constante), el trabajo realizado por el gas corresponde a la cantidad de calor absorbida desde el medio. Así, dado que el proceso es reversible,

$$\Delta S_{gas} = \frac{Q}{T} = \frac{W}{T} = nR \ln(2)$$

b) El cambio de entropía en la fuente de calor es:

$$\Delta S_{fuente} = \frac{-Q}{T} = -\Delta S_{gas}$$

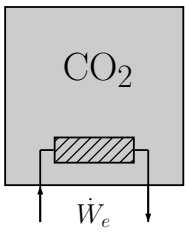
Por tanto, el cambio de entropía en el universo es:

$$\Delta S = \Delta S_{gas} + \Delta S_{fuente} = 0$$

c) Un gas en expansión libre no hace trabajo y no absorbe calor, por lo que su energía interna permanece constante. Al tratarse de un gas ideal, si $dU = 0$ entonces la temperatura permanece constante durante el proceso y es igual en ambas expansiones. Como los estados inicial y final de ambas expansiones son iguales, podemos usar el hecho de que la entropía es una propiedad termodinámica. Así, el cambio de entropía en la expansión libre es igual al cambio de entropía en la expansión isotérmica. Como la segunda expansión es adiabática, la fuente de calor no sufre un cambio en la entropía. Por tanto, el cambio de entropía en el universo en una expansión libre es $\Delta S = nR \ln(2) > 0$, y el proceso es **irreversible**.

■

7. Un tanque rígido de $0.8\,\mathrm{m}^3$ contiene dióxido de carbono (CO_2) gaseoso a $250\,\mathrm{K}$ y $100\,\mathrm{kPa}$. Un calentador a resistencia eléctrica de $500\,\mathrm{W}$, que está colocado en el tanque, se mantiene encendido durante 40 minutos. Después de ese tiempo, se mide la presión del gas y resulta ser $175\,\mathrm{kPa}$.



Suponga que el entorno está a 300 K y que el dióxido de carbono es un gas ideal con calores específicos constantes, donde:

$$c_p = 0.846\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K}\ , \quad c_v = 0.657\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K}\ , \quad \mathcal{R} = 0.1889\,\text{kJ/kg}\cdot\text{K}\ , \quad \gamma = 1.289$$

Determine:

a) La temperatura final del CO_2

b) El calor neto transferido desde el tanque al entorno

c) La entropía generada durante el proceso

Solución:

a) De la ecuación de estado de los gases ideales,

$$Pv = P\frac{V}{m} = \mathcal{R}T$$

donde m es la masa del gas, la cual se puede determinar a partir de las condiciones iniciales:

$$m = \frac{V}{v_i} = \frac{P_i V}{\mathcal{R}T_i} = 1.694017999\,\text{kg}$$

Con $P_f = 175\,\text{kPa}$ se obtiene:

$$T_f = \frac{P_f V}{\mathcal{R}m} = 437.5\,\text{K}$$

b) El calor neto transferido desde el tanque es la diferencia entre el calor entregado por la resistencia al circular la corriente eléctrica y el calor absorbido por el gas a volumen constante:

$$Q_{out} = \dot{W}_e \Delta t - mc_v(T_f - T_i) = 985.6008471\,\text{kJ}$$

c) El sistema formado por el tanque y el entorno forman un sistema adiabático, por lo cual la entropía generada es igual al cambio de entropía en ambos elementos:

$$S_{gen} = \Delta S = \Delta S_{\text{CO}_2} + \Delta S_{medio}$$

Es fácil calcular que:

$$\Delta S_{medio} = \frac{Q_{out}}{T_{med}} = 3.285336157\,\text{kJ/K}$$

En el caso del gas, se trata de un proceso a volumen constante. Por tanto,

$$\Delta S_{\mathrm{CO_2}} = m\left[c_p \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - \mathcal{R}\ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)\right] = 0.6229302857\,\mathrm{kJ/K}$$

Así,

$$S_{gen} = 3.908266443\,\mathrm{kJ/K}$$

■

8. 0.7 kg de refrigerante R-134a sufren una expansión isentrópica desde 800 kPa y 50° C hasta 140 kPa. Determine la cantidad de calor transferido y el trabajo realizado por esta expansión. Asuma que el proceso es completamente reversible.

Solución:

Mediante una inspección en las tablas del refrigerante, notaremos que éste se encuentra en la región sobrecalentada. Así, de la tabla respectiva,

$$\left.\begin{array}{rcl} P_1 &=& 800\,\mathrm{kPa} \\ T_1 &=& 50^\circ\,\mathrm{C} \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} u_1 &=& 263.87\,\mathrm{kJ/kg} \\ s_1 &=& 0.9803\,\mathrm{kJ/kg\cdot K} \end{array}$$

La entropía es constante durante el proceso, por lo que $s_2 = s_1 = 0.9803\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}$. Notemos que:

$$s_{g@140\,\mathrm{kPa}} = 0.94467\,\mathrm{kJ/kg\cdot K} < s_2 = 0.9803\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}$$

y el estado final también corresponde a refrigerante sobrecalentado. De la tabla respectiva,

$T\,[^\circ\,\mathrm{C}]$	$u\,[\mathrm{kJ/kg}]$	$s\,[\mathrm{kJ/kg\cdot K}]$
-10	225.93	0.9724
0	233.25	1.0032

Como la tabla no posee el valor exacto de la entropía específica que deseamos, tendremos que **interpolar**:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_a + \left(\frac{u_b - u_a}{s_b - s_a}\right)(s_2 - s_a) \\ &= 225.93 + \left(\frac{233.25 - 225.93}{1.0032 - 0.9724}\right)(0.9803 - 0.9724) \\ &= 227.8075325\,\mathrm{kJ/kg} \end{aligned}$$

Dado que el proceso es isentrópico y reversible, la transferencia de calor es cero. Por tanto,

$$Q = 0\,\mathrm{kJ}$$

Para determinar el trabajo realizado, tomamos el contenido del cilindro como sistema. Este es un sistema cerrado dado que no hay ingreso o salida de masa. El balance de energía toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_e - E_s &= \Delta E_{sistema} \\ -W &= m(u_2 - u_1) \\ W &= m(u_1 - u_2) \\ &= (0.7\,\mathrm{kg})(263.87\,\mathrm{kJ/kg} - 227.8075325\,\mathrm{kJ/kg}) \\ &= 25.24372725\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

■