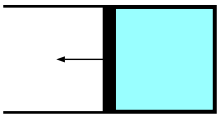
FIS1523 ⋆ Termodinámica
✓ **Ayudante:** *Sebastián Urrutia Quiroga*
✓ **Correo:** sgurruti@uc.cl
✓ **Página Web:** web.ing.puc.cl/~sgurruti/termo

Ayudantía ⋆ Primera Ley de la Termodinámica

1. Una cámara cilíndrica aislada térmicamente contiene en su interior un mol de un gas ideal monoatómico, que ocupa un volumen V_0 a temperatura T_0. Una de las tapas del cilindro es un pistón móvil que desliza sin roce, como muestra la figura. La presión inicial del gas es P_0.



a) El gas absorbe desde fuentes externas un cierta cantidad de calor gas tal que se expande isobáricamente aumentando al doble su volumen. Determine la cantidad de calor absorbida

b) A continuación el gas experimenta una compresión adiabática, recuperando el volumen original. Encuentre la temperatura final

Solución:

a) Como el número de moles satisface $n = 1$, entonces la ecuación de estado de los gases ideales se escribe de la siguiente forma: $PV = RT$. Sean T' y V' la temperatura y el volumen final del gas. Así, como la expansión se realiza a presión constante,

$$\frac{T'}{V'} = \frac{T_0}{V_0} \quad \longrightarrow \quad T' = T_0 \left(\frac{V'}{V_0}\right) = 2T_0$$

El trabajo realizado por el gas es:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P\, dV = P_0(V' - V_0) = P_0 V_0 = RT_0$$

donde hemos utilizado la ecuación de estado. Por otra parte, el cambio en la energía interna depende solo de los estados inicial y final:

$$\Delta U = nc_v \Delta T = c_v(T' - T_0) = c_v T_0$$

como se trata de un gas ideal monoatómico (tres grados de libertad),

$$c_v = \frac{3}{2}R \quad \longrightarrow \quad \Delta U = \frac{3RT_0}{2}$$

De la Primera Ley de la Termodinámica, $\Delta U = Q - W$. Así,

$$Q = \frac{3RT_0}{2} + RT_0 = \frac{5RT_0}{2}$$

Una forma alternativa de obtener el resultado anterior es considerar que la expansión se realiza a presión constante, por lo que el flujo de calor es:

$$Q = nc_p\Delta T = c_pT_0 = \frac{5RT_0}{2}$$

donde $c_p = \dfrac{5}{2}$ (por ser un gas ideal monoatómico).

b) Como la compresión es adiabática, $PV^\gamma = P_0(2V_0)^\gamma$. Así, la presión en cualquier isntante de tiempo durante la compresión viene dada por:

$$P = \frac{P_0(2V_0)^\gamma}{V^\gamma} = 2^\gamma P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma$$

Como se trata de una compresión adiabática, $\Delta U = -W$, con:

$$\begin{aligned} W &= \int_{2V_0}^{V_0} P\,dV \\ &= 2^\gamma P_0 {V_0}^\gamma \int_{2V_0}^{V_0} \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= -\frac{2^\gamma P_0 {V_0}^\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{{V_0}^{\gamma-1}} - \frac{1}{(2V_0)^{\gamma-1}}\right) \\ &= -\frac{2(2^{\gamma-1}-1)}{\gamma-1}P_0V_0 \end{aligned}$$

Al tratarse de un gas ideal monoatómico,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$$

y por tanto

$$W = -3P_0V_0(2^{2/3} - 1) = -3RT_0(2^{2/3} - 1)$$

Además,

$$\Delta U = nc_v\Delta T = \frac{3}{2}R(T_f - T_i) = \frac{3}{2}R(T_f - 2T_0)$$

donde $T_i = 2T_0$. Reemplazando en la Primera Ley de la Termodinámica,

$$\begin{aligned} \Delta U &= -W \\ \frac{3}{2}R(T_f - 2T_0) &= 3RT_0(2^{2/3} - 1) \\ \frac{1}{2}(T_f - 2T_0) &= T_0(2^{2/3} - 1) \\ T_f - 2T_0 &= 2T_0(2^{2/3} - 1) \\ T_f &= 2^{5/3}T_0 \end{aligned}$$

Una forma alternativa de realizar el problema es la siguiente: de la ecuación de estado, $PV = RT$. Reemplazando en la definición de proceso adiabático,

$$TV^{\gamma-1} = (2T_0)(2V_0)^{\gamma-1} \quad \longrightarrow \quad T = 2^{\gamma}T_0 = 2^{5/3}T_0$$

■

2. 10 moles de un gas ideal diatómico se encuentran a presión $P_A = 5 \times 10^5\,\text{Pa}$, ocupando un volumen $V_A = 249 \times 10^{-3}\,\text{m}^3$. El gas se expande adiabáticamente hasta ocupar un volumen $V_B = 479 \times 10^{-3}\,\text{m}^3$. Luego experimenta una transformación isotérmica, hasta alcanzar la presión $P_C = 1 \times 10^5\,\text{Pa}$. En seguida, el gas se comprime isobáricamente hasta un volumen $V_D = V_A$. Finalmente el gas experimenta una transformación a volumen constante que lo devuelve al estado inicial.

   a) Represente gráficamente, en un diagrama P *vs* V, el proceso experimentado por el gas

   b) Encuentre los valores de las variables termodinámicas desconocidas en los puntos A, B, C y D del proceso

   c) Encuentre el flujo de calor, el trabajo realizado por el gas y la variación de energía interna en cada etapa del proceso. Explique el sentido físico de los signos asociados a los valores encontrados

Solución:

a) El tramo $A \to B$ es adiabático, por lo que $PV^{\gamma} = \text{cte}$. El valor de dicha constante lo conseguimos reemplazando en el punto inicial del ciclo. Así,

$$PV^{\gamma} = P_A V_A{}^{\gamma} \quad \longrightarrow \quad P = P_A \left(\frac{V_A}{V}\right)^{\gamma}$$

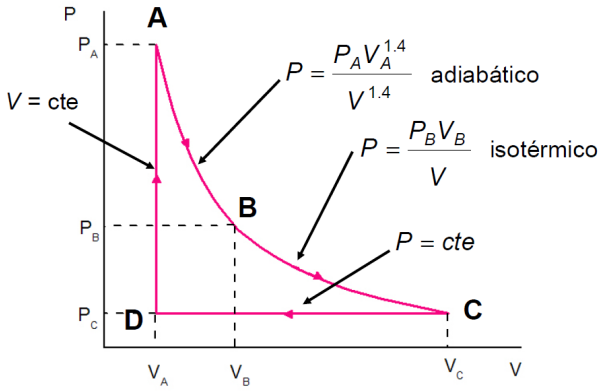
Notar que, como se trata de un gas diatómico,

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$$

El tramo $B \to C$ es isotérmico, por lo que $T = \text{cte} = T_B$. Así, por la ecuación de estado,

$$PV = nRT = nRT_B = P_B V_B \quad \longrightarrow \quad P = \frac{P_B V_B}{V}$$

El tramo $C \to D$ es isobárico, por lo que $P = \text{cte}$. Finalmente, el tramo $D \to A$ es isocórico. Finalmente, la representación gráfica del ciclo viene dada por:



b) Punto A:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 1479.43\,\mathrm{K}$$

con $n = 10\,\mathrm{mol}$ y $R = 8.314\,\mathrm{J/mol\cdot K}$.

Punto B:

$$P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{1.4} = 1.97\times 10^5\,\mathrm{Pa} \quad \longrightarrow \quad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 1134.99\,\mathrm{K}$$

Punto C:
Como $B \to C$ es isotérmico,

$$T_C = T_B = 1134.99\,\mathrm{K}$$
$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = 0.94\,\mathrm{m}^3$$

Punto D:
Como $C \to D$ es isobárico,

$$P_D = P_C = 10^5\,\mathrm{Pa}$$
$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 295.89\,\mathrm{K}$$

c) De la Primera Ley de la Termodinámica,

$$\Delta U = Q - W$$

Tramo $A \to B$:
El proceso es adiabático, por lo que $Q_{AB} = 0$. Ahora,

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v \Delta T_{AB} = 71591.85\,\mathrm{J}$$

El gas pierde energía interna en el tramo y realiza trabajo sobre el medio.

Tramo $B \to C$:
El proceso es isotérmico, i.e. $T_B = T_C$, por lo que $\Delta T_{BC} = 0$. Así, $\Delta U_{BC} = nc_v \Delta T_{BC} = 0$. De este modo,

$$Q_{BC} = W_{BC} = \int_B^C P\,dV = nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = 63617.63\,\mathrm{J}$$

La energía interna del gas se mantiene constante, el gas absorbe calor del medio y realiza trabajo sobre éste.

Tramo $C \to D$:
El proceso es isobárico, i.e. $P_C = P_D$, por lo que

$$W_{CD} = P_C \Delta V_{CD} = -69400\,\text{J}$$

$$\Delta U_{CD} = nc_v \Delta T_{CD} = \frac{5nR\Delta T_{CD}}{2} = -174406.94\,\text{J}$$

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = -243806.94\,\text{J}$$

Aumenta la energía interna, el gas absorbe calor y realiza trabajo sobre el medio.

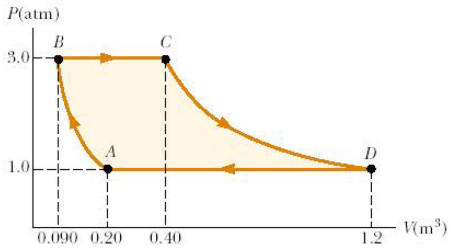
Tramo $D \to A$:
El proceso es isocórico, por lo que $W_{DA} = 0$. Además,

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = nc_v \Delta T_{DA} = 245998.79\,\text{J}$$

Disminuye la energía interna del gas y cede calor al medio.

■

3. Una muestra de gas ideal sigue el proceso indicado en la figura. De A a B el proceso es adiabático; de B a C, es isobárico con 100 kJ de flujo de energía por calor hacia el sistema. De C a D el proceso es isotérmico; de D a A, es isobárico con 150 kJ de flujo de energía por calor hacia el medio. Determine la diferencia en la energía interna $\Delta U_{AB} = U_B - U_A$.



Solución:

Notemos que el proceso $A \to B$ es adiabático, por lo que $Q_{AB} = 0$, de manera que:

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = -W_{AB}$$

Ya que el proceso completo es cíclico, $\Delta U_{total} = 0$ y podemos escribir:

$$W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} - Q_{AB} - Q_{BC} - Q_{CD} - Q_{DA} = 0$$

Luego,

$$\Delta U_{AB} = W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} - Q_{BC} - Q_{CD} - Q_{DA}$$

El proceso $C \to D$ es isotérmico, i.e. $\Delta U_{CD} = 0$ (para un gas ideal), por lo que,

$$W_{CD} - Q_{CD} = 0$$

y luego,

$$\Delta U_{AB} = W_{BC} + W_{DA} - Q_{BC} - Q_{DA}$$

Sabemos que $Q_{BC} = 100\,\text{kJ}$ y $Q_{DA} = -150\,\text{kJ}$. Los trabajos en los procesos isobáricos son:

$$\begin{aligned} W_{BC} &= P_B \Delta V_{BC} \\ &= 3\,\text{atm} \cdot 101.3\,\frac{\text{kPa}}{\text{atm}} \cdot (0.4 - 0.09)\,\text{m}^3 \\ &= 94.2\,\text{kJ} \end{aligned}$$

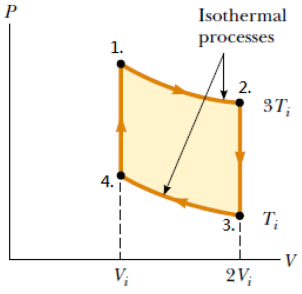
$$\begin{aligned} W_{DA} &= P_D \Delta V_{DA} \\ &= 1\,\text{atm} \cdot 101.3\,\frac{\text{kPa}}{\text{atm}} \cdot (0.2 - 1.2)\,\text{m}^3 \\ &= -101.3\,\text{kJ} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Delta U_{AB} = 42.9\,\text{kJ}$$

■

4. La siguiente figura representa n moles de un gas diatómico ideal sometidos a un ciclo termodinámico, que consiste de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_i$ y T_i, y de dos procesos a volumen constante. Si se define la *eficiencia del ciclo termodinámico* como el cociente entre el trabajo realizado por el ciclo completo y el calor absorbido por el ciclo, i.e. $\eta = W_{ciclo}/Q_{in}$, determine la eficiencia del ciclo descrito.



Solución:

Para calcular el trabajo realizado, así como el calor absorbido, notamos que:

- Proceso $1 \to 2$
  Esta etapa corresponde a un proceso isotérmico. Como se trata de un gas ideal, la energía interna de dicho gas depende únicamente de la temperatura del estado en que se encuentra.

Como la temperatura es constante, $\Delta U_{12} = 0$. Aplicando la Primera Ley de la Termodinámica,

$$Q_{12} = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV = 3nRT_i \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 3nRT_i \ln(2) > 0$$

y el ciclo absorbe calor y realiza trabajo sobre el medio.

- Proceso $2 \to 3$
  Como esta etapa se trata de un proceso isocórico, $W_{23} = 0$. Aplicando la Primera Ley de la Termodinámica,
  $$Q_{23} = \Delta U_{23} = nv_c \Delta T_{23}$$
  donde $c_v = \dfrac{5R}{2}$ para un gas ideal diatómico, y $\Delta T_{23} = T_i - 3T_i = -2T_i$. Luego,
  $$Q_{23} = \Delta U_{23} = -5nRT_i < 0$$
  y el ciclo emite calor al medio sin realizar trabajo.
- Proceso $3 \to 4$
  El proceso es isotérmico, por lo que el razonamiento es idéntico a lo que realizamos en el primer tramo del ciclo:
  $$Q_{34} = W_{34} = nRT_i \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = -nRT_i \ln(2) < 0$$
  y el ciclo emite calor al medio, y éste realiza trabajo sobre el gas.
- Proceso $4 \to 1$
  Análogamente al segundo tramo del ciclo,
  $$Q_{41} = \Delta U_{41} = 5nRT_i > 0$$
  y el ciclo absorbe calor del medio sin realizar trabajo.

Tabulando estos datos,

Proceso	Q	W	ΔU
$1 \to 2$	$3nRT_i \ln(2)$	$3nRT_i \ln(2)$	0
$2 \to 3$	$-5nRT_i$	0	$-5nRT_i$
$3 \to 4$	$-nRT_i \ln(2)$	$-nRT_i \ln(2)$	0
$4 \to 1$	$5nRT_i$	0	$5nRT_i$
Total	$2nRT_i \ln(2)$	$2nRT_i \ln(2)$	0

El trabajo realizado por el gas sobre el ambiente corresponde a la suma de los trabajos en cada proceso:

$$W_{ciclo} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = 2nRT_i \ln(2) > 0$$

El calor que ingresa al sistema corresponde a la suma de todos los calores positivos, vale decir:

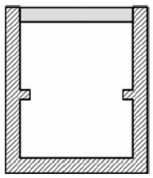
$$Q_{in} = Q_{12} + Q_{41} = 3nRT_i \ln(2) + 5nRT_i$$

De la definición de eficiencia,

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{in}} = \frac{2nRT_i \ln(2)}{3nRT_i \ln(2) + 5nRT_i} = \frac{2\ln(2)}{3\ln(2)+5} \approx 0.1958$$

y el ciclo tiene una eficiencia del 19.58 %. ■

5. Considere un sistema cilidro/pistón, como el que muestra la figura. Los topes dividen el cilindro en dos volúmenes idénticos. En el interior hay aire, con condiciones iniciales 400° C y 150 kPa. Se permite que el aire se enfríe, alcanzando una temperatura de 20° C. Suponga que, en las condiciones descritas, el aire se puede modelar como un gas ideal.



a) Determine si en el estado final el pistón está o no apoyado sobre los topes del interior del cilindro

b) Encuentre la presión en el estado final

c) Encuentre el trabajo específico hecho por el aire en el proceso

d) Represente el proceso en diagramas $P - v$ y $T - v$

Solución:

a) La ecuación de estado para gases ideales toma la siguiente forma:

$$Pv = \mathcal{R}T \ , \qquad \mathcal{R} = 0.287\,\mathrm{kJ/kg \cdot K}$$

Si el pistón no está apoyado sobre los topes del cilindro, $P_f = P_i$. Así, el volumen específico sería:

$$v_f = \frac{T_f}{T_i} v_i = \left(\frac{293\,\mathrm{K}}{693\,\mathrm{K}}\right) v_i = 0.43 v_i$$

Como $v_f < 0.5 v_i$, el pistón está apoyado sobre los topes del interior del cilindro.

b) En este caso, $v_f = 0.5 v_i$ y por tanto:

$$\frac{P_i v_i}{T_i} = \frac{P_f v_f}{T_f} \quad \longrightarrow \quad P_f = 2\left(\frac{T_f}{T_i}\right) P_i = 130.6\,\mathrm{kPa}$$

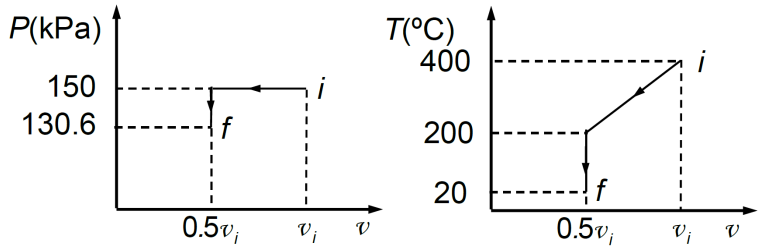
c) El trabajo específico se define como

$$w = \int_i^f P\, dv$$

Durante su compresión, el aire está sometido a una presión constante: $Pdv = \mathcal{R}dT$. Por tanto,

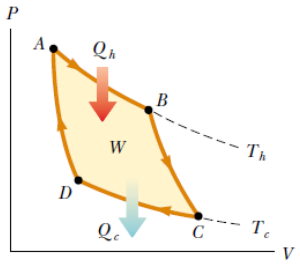
$$w = \mathcal{R}\int_{T_i}^{T_f} dT = -109.06\,\mathrm{J/kg}$$

d) Los diagramas son:



■

6. Considere el ciclo mostrado en la figura. En el punto A, 2.34 moles de un gas monoatómico ideal tiene una presión de 1400 kPa, un volumen de 10.0 L y una temperatura de 720 K. Se expande isotérmicamente hacia un punto B, y luego, se expande adiabáticamente hacia un punto C, donde su volumen es de 24.0 L. Una compresión isotérmica lo lleva a un punto D, donde su nuevo volumen es 15.0 L. Un proceso adiabático devuelve el gas al punto A.



a) Determine todas las presiones, volúmenes y temperaturas desconocidas

b) Encuentre la energía añadida a través de calor, el trabajo realizado, y el cambio en la energía interna de cada una de las etapas del ciclo

c) Verifique que este ciclo satisface la siguiente relación para la eficiencia:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{in}} = 1 - \frac{T_C}{T_A}$$

Solución:

a) De acuerdo a los datos que tenemos, es conveniente partir analizando el proceso $D \to A$:

- Proceso $D \to A$
  Este proceso es adiabático, por lo cual se satisface que

$$P_D V_D{}^{\gamma} = P_A V_A{}^{\gamma} \quad \longrightarrow \quad P_D = P_A \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma} = 712.27\,\text{kPa}$$

  donde $\gamma = 5/3$ para un gas ideal monoatómico. De la ecuación de estado,

$$P_D V_D = nRT_D \quad \longrightarrow \quad T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 549.17\,\text{K}$$

- Proceso $C \to D$
  Este proceso es isotérmico, por lo cual se satisface que $T_C = T_D$. Además,

$$P_C V_C = P_D V_D \quad \longrightarrow \quad P_C = P_D \left(\frac{V_D}{V_C}\right) = 445.17\,\text{kPa}$$

- Proceso $A \to B$
  Este proceso es isotérmico, por lo cual se satisface que $T_A = T_B$. Además,

$$P_A V_A = P_B V_B \quad \longrightarrow \quad V_B = V_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right) \qquad (*)$$

- Proceso $B \to C$
  Este proceso es adiabático, por lo cual se satisface que

$$P_B V_B{}^{\gamma} = P_C V_C{}^{\gamma} \quad \longrightarrow \quad P_B = P_C \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma} \qquad (**)$$

  Reemplazando $(*)$ en $(**)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} P_B = P_C \left(\frac{V_C P_B}{V_A P_A}\right)^{\gamma} \quad &\longrightarrow \quad P_B{}^{\gamma-1} = \frac{1}{P_C}\left(\frac{P_A V_A}{V_C}\right)^{\gamma} \\ &\longrightarrow \quad P_B = \left[\frac{1}{P_C}\left(\frac{P_A V_A}{V_C}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &\longrightarrow \quad P_B = 874.99\,\text{kPa} \end{aligned}$$

  Por la ecuación $(*)$,

$$V_B = 16\,\text{L}$$

A modo de resumen, elaboramos la siguiente pauta:

Estado	P [kPa]	V [L]	T [K]
A	1400	10	720
B	874.99	16	720
C	445.17	24	549.17
D	712.27	15	549.17

b) A continuación encontraremos el calor, el trabajo y el cambio en la energía interna en cada una de las etapas. Para facilitar los cálculos, introducimos la siguiente notación: $T_h = T_A = T_B$ para la temperatura superior del ciclo, y $T_c = T_C = T_D$ para la temperatura inferior del ciclo.

- Proceso $A \to B$
  Como este proceso es isotérmico, $\Delta U_{AB} = 0$. Por otra parte, se cumple que:
  $$Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV = nRT_h \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 6.58\,\text{kJ}$$
- Proceso $B \to C$
  Como este proceso es adiabático, $Q_{BC} = 0$. Por otra parte, se cumple que:
  $$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_v(T_c - T_h) = 4.99\,\text{kJ}$$
- Proceso $C \to D$
  Como este proceso es isotérmico, $\Delta U_{CD} = 0$. Por otra parte, se cumple que:
  $$Q_{CD} = W_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} P\,dV = nRT_c \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -5.02\,\text{kJ}$$
- Proceso $D \to A$
  Como este proceso es adiabático, $Q_{DA} = 0$. Por otra parte, se cumple que:
  $$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_v(T_h - T_c) = -4.99\,\text{kJ}$$

Al tabular estos datos,

Proceso	Q [kJ]	W [kJ]	ΔU [kJ]
$A \to B$	6.58	6.58	0
$B \to C$	0	4.99	-4.99
$C \to D$	-5.02	-5.02	0
$D \to A$	0	-4.99	4.99
Total	1.56	1.56	0

c) Sabemos que la eficiencia de un ciclo termodinámico está dada por:
$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{in}}$$
Donde Q_{in} es el calor que ingresa al sistema (la suma de todos los calores positivos). Luego, evaluando:
$$\eta = \frac{1.56}{6.58} = 0.237$$
Denotemos por η_C al siguiente término:
$$\eta_C = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - \frac{549.17}{720} = 0.237$$
Podemos ver que, en el caso particular de este ciclo, se cumple que $\eta = \eta_C$.

■