Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Física
FIS1523 Termodinámica
21 de abril del 2017

P1	P2	P3	Nota

Se puede usar calculadora (no programable).
No se puede usar celular. Guárdelo.
No se puede prestar nada.
Preguntas de enunciado en voz alta.
Si usa lápiz mina no podrá pedir recorrección.

Nota a los correctores: si el resultado numérico no es el correcto pero el planteamiento (o parte del planteamiento) sí, otorgar hasta 3/4 del puntaje asignado a ese resultado.

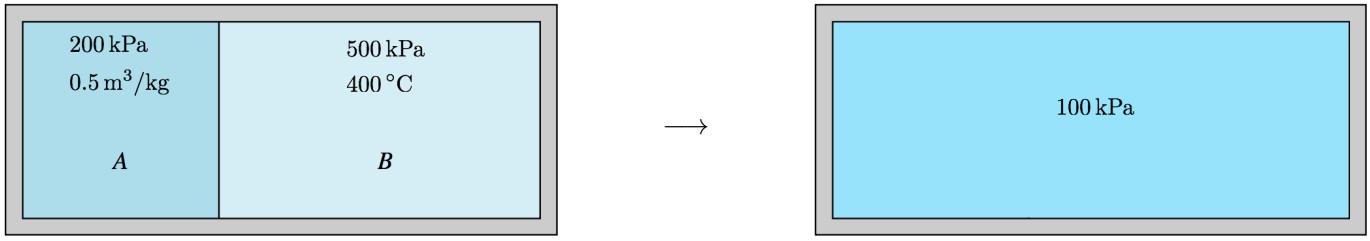
Interrogación Nro. 1

Tiempo: 120 minutos.

Nombre: _____ **Sección:** _____ **Nº:**_____

Problema 1

Un tanque rígido se divide en dos compartimientos, A y B, separados por una membrana, como muestra la figura. Ambos contienen agua (H_2O). El compartimiento A tiene un volumen $V_A = 1\,\mathrm{m}^3$ y se encuentra inicialmente a 200 kPa y $\nu = 0{,}5\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$. El compartimiento B contiene 3,5 kg de agua a 0,5 MPa y 400 °C. La membrana se rompe y el agua de ambos contenedores se mezcla hasta alcanzar el equilibrio termodinámico a una presión de 100 kPa. En el proceso, el sistema intercambia calor con el entorno.



a) Determine la fase en la que el agua del compartimiento A se encuentra inicialmente (líquido comprimido, mezcla saturada o vapor sobrecalentado). Si se trata de una mezcla saturada, especifique la calidad. Calcule también la energía interna. *(1.5 pts.)*

b) Determine la fase en la que el agua del compartimiento B se encuentra inicialmente (líquido comprimido, mezcla saturada o vapor sobrecalentado). Si se trata de una mezcla saturada, especifique la calidad. Calcule también la energía interna. *(1.5 pts.)*

c) Determine la fase en la que el agua del tanque se encuentra una vez alcanzado el estado final (líquido comprimido, mezcla saturada o vapor sobrecalentado). Si se trata de una mezcla saturada, especifique la calidad. Calcule también la energía interna. *(1.5 pts.)*

d) Determine el calor intercambiado por el sistema con el entorno, asegurándose de indicar la dirección del flujo. *(1.5 pts.)*

Nota: a pesar de que el sistema pasa por un breve periodo en el que está fuera del equilibrio, tanto los estados iniciales de A y B como el estado final del sistema son de equilibrio.

Solución:

a) De la tabla A-5 leemos

$$\nu_{f\,@\,200\,\mathrm{kPa}} = 0{,}001061\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\,, \qquad \nu_{g\,@\,200\,\mathrm{kPa}} = 0{,}88578\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\,.$$

Vemos que

$$\nu_{f\,@\,200\,\mathrm{kPa}} < \nu_A < \nu_{g\,@\,200\,\mathrm{kPa}}\,.$$

Esto nos dice que A está en estado de mezcla. La calidad se puede obtener de

0.5

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{\nu_A - \nu_{f\,@\,200\,\mathrm{kPa}}}{\nu_{g\,@\,200\,\mathrm{kPa}} - \nu_{f\,@\,200\,\mathrm{kPa}}} \\ &= 0{,}56395\,. \end{aligned}$$

0.5

Extrayendo,

$$u_{f\,@\,200\,\mathrm{kPa}} = 504{,}50\,\mathrm{kJ}/\mathrm{kg}\,, \qquad u_{g\,@\,200\,\mathrm{kPa}} = 2529{,}1\,\mathrm{kJ}/\mathrm{kg}\,.$$

calculamos

$$\begin{aligned} u_A &= x_A u_{g\,@\,200\,\mathrm{kPa}} + (1 - x_A) u_{f\,@\,200\,\mathrm{kPa}} \\ &= 1646{,}3\,\mathrm{kJ}/\mathrm{kg}\,. \end{aligned}$$

0.5 (sea la específica o la total)

Esta es la energía interna específica. Para calcular la energía total necesitamos la masa, la que se determina a partir del volumen:

$$\begin{aligned} m_A &= \frac{V_A}{\nu_a} \\ &= 2\,\mathrm{kg}\,. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} U_A &= m_A u_A \\ &= 3292{,}6\,\mathrm{kJ}\,. \end{aligned}$$

b) De la tabla A-5 vemos que

$$T_{\mathrm{sat}\,@\,500\,\mathrm{kPa}} = 151{,}83\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Como el compartimiento B se encuentra por encima de esta temperatura, concluimos que está en la región de vapor sobrecalentado. De la tabla A-6 leemos

0.5

$$u_B = 2963{,}7\,\mathrm{kJ}/\mathrm{kg}\,.$$

Como $m_B = 3{,}5$ kg, la energía total es

$$U_B = 10373\,\mathrm{kJ}\,.$$

1.0 (sea la específica o la total)

c) Al ser rígido el contenedor, el volumen total del sistema se conserva. Es decir,

$$V = V_A + V_B\,.$$

De la tabla A-6 vemos que

$$\nu_B = 0{,}61731\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\,,$$

de donde calculamos

$$V_B = 2{,}16059\,\mathrm{m}^3\,.$$

Así,

$$V = 3{,}16059\,\mathrm{m}^3\,.$$

El volumen específico final del sistema entonces queda

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{V}{m_A + m_B} \\ &= 0{,}57465\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\,. \end{aligned}$$ ← 0.5

Ahora, de la tabla A-5 leemos

$$\nu_{f\,@\,100\,\mathrm{kPa}} = 0{,}001043\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\,, \qquad \nu_{g\,@\,100\,\mathrm{kPa}} = 1{,}6941\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\,.$$

Vemos que

$$\nu_{f\,@\,100\,\mathrm{kPa}} < \nu < \nu_{g\,@\,100\,\mathrm{kPa}}\,.$$

Por lo tanto, el agua está saturada. La calidad correspondiente es

$$\begin{aligned}x &= \frac{\nu - \nu_{f\,@\,100\,\mathrm{kPa}}}{\nu_{g\,@\,100\,\mathrm{kPa}} - \nu_{f\,@\,100\,\mathrm{kPa}}} \\ &= 0{,}33880\,. \end{aligned}$$ ← 0.5

Con esto, la energía interna específica del estado final da

$$\begin{aligned}u &= x u_{g\,@\,100\,\mathrm{kPa}} + (1-x) u_{f\,@\,100\,\mathrm{kPa}} \\ &= 1124{,}9\,\mathrm{kJ/kg}\,, \end{aligned}$$ ← 0.5 (sea la total o la específica)

mientras que la energía total queda

$$\begin{aligned}U &= (m_A + m_b)u \\ &= 6186{,}9\,\mathrm{kJ}\,. \end{aligned}$$

d) Como el contenedor es rígido, el sistema no hace trabajo y el calor es igual a la variación de energía interna,

$$\Delta U = Q\,.$$

Así,

$$\begin{aligned}Q &= U - (U_A + U_B) \\ &= -7478{,}6\,\mathrm{kJ}\,. \end{aligned}$$ ← 1.0

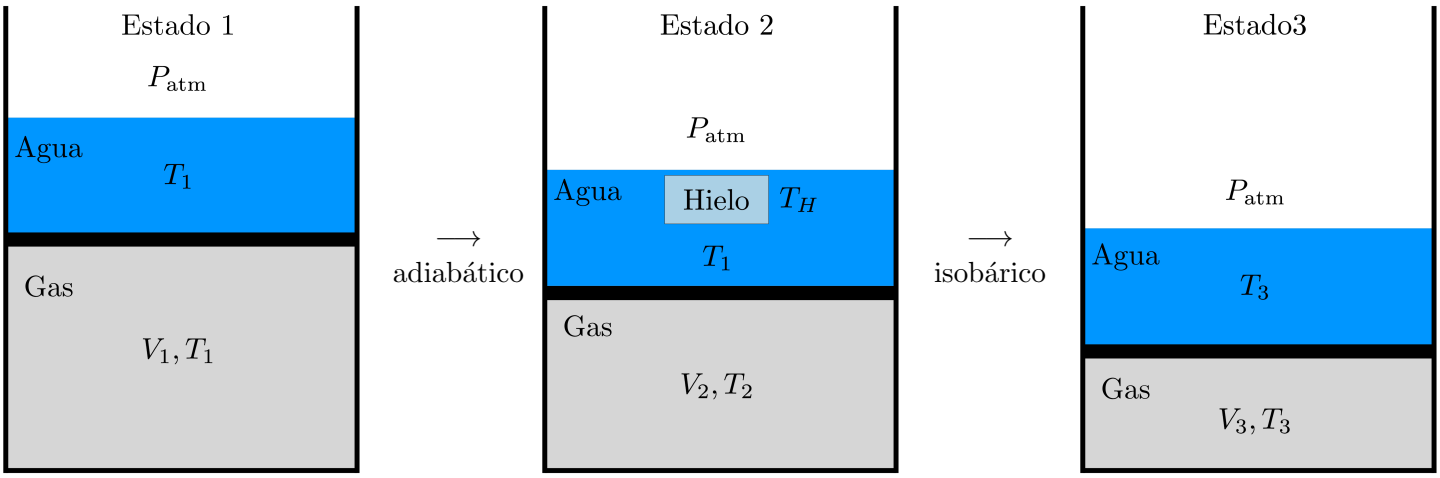
Este calor sale desde el sistema hacia el entorno. ← 0.5

Nombre: _____ **Sección:** _____ **Nº:**_____

Problema 2

Considere un recipiente cilíndrico de área $A = 0{,}001\,\mathrm{m}^2$ con un pistón de masa despreciable que se mueve libremente (sin roce). Dentro del pistón se tienen 10 moles de un gas ideal monoatómico, mientras que sobre éste hay 10 kg de agua líquida. Si bien el agua está en contacto con la atmósfera (actúa P_{atm}), despreciaremos cualquier intercambio de calor del sistema con el ambiente. Sin embargo, sí puede fluir calor entre el agua y el gas a través del pistón.

Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio térmico a $20\,^\circ\mathrm{C}$ (estado 1). Luego se depositan 2 kg de hielo a $-5\,^\circ\mathrm{C}$ en el agua, lo que hace que el gas cambie su volumen hasta un estado intermedio (estado 2). Este proceso es lo suficientemente lento como para que sea cuasi-estático y, a la vez, lo suficientemente rápido como para que sea adiabático; el pistón está siempre en equilibrio y no hay transferencia de calor entre el agua y el hielo o entre el agua y el gas (el agua y el hielo permanecen a $20\,^\circ\mathrm{C}$ y $-5\,^\circ\mathrm{C}$, respectivamente). Finalmente, se espera hasta que el hielo se derrita completamente y todo el sistema alcance el equilibrio térmico (estado 3). Esta parte del proceso es isobárica.



a) Calcule la presión y el volumen del gas en el estado 1. *(1.5 pts.)*

b) Calcule la presión, el volumen y la temperatura del gas en el estado 2. *(2 pts.)*

c) Usando que el calor total transferido entre el gas, el agua y el hielo debe ser cero, determine la temperatura final del sistema. Calcule además el volumen del gas en el estado 3. *(1 pto.)*

d) Calcule el cambio en la energía interna del gas y el trabajo realizado por éste en el proceso $2-3$. *(1.5 pts.)*

Datos: $R = 8{,}31447\ [\mathrm{J/(mol\cdot K)}]$, $c_V = (3/2)\,R$, $c_P = (5/2)\,R$, $\gamma = c_P/c_V$, $c_{\mathrm{hielo}} = 2090\ [\mathrm{J/(kg\cdot\,^\circ C)}]$, $c_{\mathrm{agua}} = 4186\ [\mathrm{J/(kg\cdot\,^\circ C)}]$, $L_f = 334\ [\mathrm{kJ/kg}]$, $P_{\mathrm{atm}} = 101{,}325\ \mathrm{kPa}$. **Ponga atención a las unidades**.

Solución:

a) Por equilibrio mecánico, la presión del gas debe ser igual a

$$P_1 = P_{atm} + \frac{m_a g}{A}\,,$$

donde m_a es la masa de agua sobre el pistón. Así,

$$P_1 = 199{,}325\,\text{kPa}\,. \longleftarrow 1$$

El volumen lo podemos obtener de la ecuación de estado:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{nRT_1}{P_1} \\ &= 0{,}1222\,\text{m}^3\,, \end{aligned} \longleftarrow 0.5$$

donde hemos usado que la temperatura inicial es $T_1 = 293{,}15$ K.

b) Al ser un estado de equilibrio, la presión en 2 está dada por

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{atm} + \frac{(m_a + m_h)g}{A} \\ &= P_1 + \frac{m_h g}{A}\,, \end{aligned}$$

donde m_h es la masa de hielo que se agregó. Así,

$$P_2 = 218{,}925\,\text{kPa}\,. \longleftarrow 0.75$$

Ahora, el proceso $1-2$ es adiabático y cuasiestático. Para un gas ideal esto implica

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} V_2 &= V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= 0{,}1156\,\text{m}^3\,, \end{aligned} \longleftarrow 0.75$$

donde hemos usado que $\gamma = \frac{5}{3}$. La temperatura se puede obtener de la ecuación de estado:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{P_2 V_2}{nR} \\ &= 304{,}36\,\text{K}\,. \end{aligned} \longleftarrow 0.5$$

c) Para determinar la temperatura final usamos que el calor total transferido entre el hielo, el agua y el gas en el proceso $2-3$ debe ser cero:

$$Q_h + Q_a + Q_g = 0\,.$$

La masa de hielo debe subir desde $-5\,^\circ$C hasta $0\,^\circ$C para comenzar a derretirse. Una vez terminada la transición de fase, sube desde $0\,^\circ$C hasta la temperatura de equilibrio T_3. Por lo tanto,

$$Q_h = m_h C_h\,(T_f - T_h) + m_h L_f + m_h C_a (T_3 - T_f)\,,$$

donde $T_f = 273{,}15$ K es la temperatura de fusión, $T_h = 268{,}15$ K es la temperatura inicial del hielo, C_a y C_h son los calores específicos del agua y hielo, respectivamente, y L_f es el calor latente de fusión. Similarmente,

$$Q_a = m_a C_a\,(T_3 - T_a)\,,$$

con $T_a = T_1 = 293{,}15$ K y

$$Q_g = nC_P\,(T_3 - T_2)\,.$$

En esta última relación hemos usado que el proceso fue isobárico, por eso la aparición de C_P y no C_V para el gas. Así, despejando T_3 de la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} T_3 &= 276{,}22\,\mathrm{K} \\ &= 3{,}07\,^\circ\mathrm{C}\,. \end{aligned}$$ ← 0.75

El volumen del gas lo calculamos de la ecuación de estado:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{nRT_3}{P_3} \\ &= 0{,}1049\,\mathrm{m}^3\,, \end{aligned}$$ ← 0.25

donde hemos usado que $P_3 = P_2$.

d) La variación de energía interna del gas en el proceso $2-3$ es

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2}nR\,(T_3 - T_2) \\ &= -3509{,}3\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$ ← 0.75

Por último, el trabajo se puede obtener tanto de la primera ley como de la definición:

0.75 (con el método que sea)

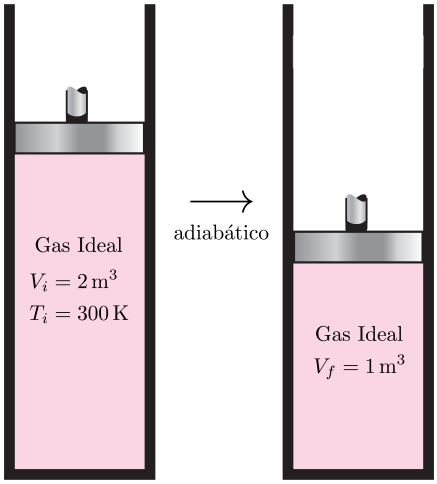
$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta U \\ &= \frac{5}{2}nR\,(T_3 - T_2) - \frac{3}{2}nR\,(T_3 - T_2)\,, \\ &= -2339{,}5\,\mathrm{J}\,. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} W &= \int P dV \\ &= P_2\,(V_3 - V_2) \\ &= -2339{,}5\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

Por supuesto, podríamos haber calculado el trabajo primero y usado la primera ley para encontrar ΔU.

Nombre: _____ **Sección:** _____ **Nº:**_____

Problema 3

Se tiene un gas ideal dentro de un recipiente de material aislante con un pistón movible. Inicialmente el gas se encuentra a un volumen $V_i = 2$ m^3 y una temperatura $T_i = 300$ K. Luego se comprime adiabática y cuasiestáticamente hasta un volumen final $V_f = 1$ m^3.



a) Determine la temperatura final y el trabajo realizado en el proceso cuando el recipiente contiene

   i) 4 moles de un gas ideal monoatómico ($c_V = (3/2)R$ y $c_P = (5/2)R$),

   ii) 2 moles de un gas ideal diatómico ($c_V = (5/2)R$ y $c_P = (7/2)R$).

   Grafique ambos procesos en un único diagrama $T - V$. *(2.5 pts.)*

   Suponga ahora que el recipiente contiene una *mezcla* de 4 moles de un gas ideal monoatómico y 2 moles de un gas ideal diatómico. Recuerde que los gases en una mezcla en equilibrio ocupan el mismo volumen y están a la misma temperatura.

b) Calcule, usando la ley de presiones parciales, la presión de la mezcla en el estado inicial. Calcule también la energía interna en dicho estado. *(2 pts.)*

c) Determine la temperatura final de la mezcla. Incluya este proceso en el diagrama $T-V$ del inciso a) y compare los resultados. *(1.5 pts.)*
   Ayuda: use la primera ley en forma diferencial para la mezcla y encuentre la ecuación que obedece este proceso.

d) **Bono**: determine el flujo de calor desde el gas monoatómico al gas diatómico durante el proceso. *(1.5 pts.)*
   Ayuda: aplique la primera ley en forma diferencial para un sólo gas (monoatómico o diatómico) y use la ecuación obtenida en el inciso anterior.

Solución:

a) En un proceso adiabático y cuasiestático, un gas ideal puro satisface la relación

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \qquad \Rightarrow \qquad T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} .$$

Para el gas ideal monoatómico se tiene $\gamma = 5/3$, mientras que para el diatómico $\gamma = 7/5$. Así, usando los datos del enunciado encontramos

$$T_f = \begin{cases} 476{,}2\,\text{K} & \text{monoatómico} \\ 395{,}9\,\text{K} & \text{diatómico} \end{cases} .$$

0.5 ← monoatómico; 0.5 ← diatómico

Como el proceso es adiabático, el trabajo realizado es igual a la variación de energía interna:

$$|W| = |\Delta U| .$$

Por su parte sabemos que para un gas ideal

$$U = \begin{cases} \dfrac{3}{2} nRT & \text{monoatómico} \\ \dfrac{5}{2} nRT & \text{diatómico} \end{cases} .$$

Con esto obtenemos

$$|W| = \begin{cases} 8791{,}1\,\text{J} & \text{monoatómico} \\ 3984{,}8\,\text{J} & \text{diatómico} \end{cases} .$$

0.5 (con cualquier método) ← monoatómico; 0.5 (con cualquier método) ← diatómico

Es evidente que el trabajo se hace sobre el sistema. El mismo resultado se obtiene si calculamos el trabajo según

$$\begin{aligned} W &= -\int_{V_i}^{V_f} P dV \\ &= -K \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV , \qquad \left(K = P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma}\right) \\ &= \frac{K}{\gamma - 1} \left(V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{C_P}{C_V} - 1} \left(P_f V_f - P_i V_i\right) \\ &= \frac{nRC_V}{C_P - C_V} \left(T_f - T_i\right) \qquad (C_P - C_V = R) \\ &= nC_V \left(T_f - T_i\right) \\ &= \Delta U . \end{aligned}$$

0.5 por diagrama correcto

b) Según la Ley de Presiones Parciales de Dalton, la presión total de la mezcla es la suma de las presiones individuales de las componentes monoatómica y diatómica. De la ecuación de estado obtenemos

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{n_1 RT}{V} \\ P_2 &= \frac{n_2 RT}{V} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= \frac{(n_1 + n_2) RT}{V} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P_i &= \frac{(n_1 + n_2) RT_i}{V_i} \\ P_i &= 7483{,}0\,\text{Pa} . \end{aligned}$$

1.0 ←

Asimismo, la energía interna total es

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{2} n_1 RT \\ U_2 &= \frac{5}{2} n_2 RT \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= \left(\frac{3}{2} n_1 + \frac{5}{2} n_2\right) RT \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} U_i &= \left(\frac{3}{2} n_1 + \frac{5}{2} n_2\right) RT_i \\ &= 27437{,}8\,\text{J} . \end{aligned}$$

1.0 ←

c) Para derivar la relación que satisfacen las variables termodinámicas durante el proceso consideramos la Primera Ley en forma diferencial

$$dU = \delta Q - \delta W\,.$$

Para un proceso adiabático $\delta Q = 0$, mientras que si el cambio es cuasiestático, $\delta W = PdV$. En el caso de la mezcla tenemos

$$\left(\frac{3}{2}n_1 + \frac{5}{2}n_2\right) RdT = -PdV\,.$$

Pero con la ecuación de estado esto se puede escribir como

$$\left(\frac{3}{2}n_1 + \frac{5}{2}n_2\right) dT = -\left(n_1 + n_2\right)\frac{dV}{V}\,.$$

Definiendo

$$\alpha = \frac{n_1 + n_2}{\frac{3}{2}n_1 + \frac{5}{2}n_2} = \frac{6}{11}\,,$$

e integrando la ecuación obtenemos

$$\frac{dT}{T} = -\alpha\frac{dV}{V} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\alpha\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \qquad \Rightarrow \qquad T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\alpha}\,.$$

Evaluando numéricamente encontramos que la temperatura final de la mezcla es

$$T_f = 437{,}8\,\mathrm{K}\,.$$ ← 1.0

Observe que este es el mismo comportamiento que tendría un gas ideal puro de constante adiabática

$$\gamma = \alpha + 1 = \frac{\frac{5}{2}n_1 + \frac{7}{2}n_2}{\frac{3}{2}n_1 + \frac{5}{2}n_2}\,.$$

0.5 si lo bosqueja correctamente en el diagrama del a)

Esto se puede intepretar como

$$C_V = \frac{\frac{3}{2}n_1R + \frac{5}{2}n_2R}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}C_{V1} + \frac{n_2}{n_1 + n_2}C_{V2}\,,$$
$$C_P = \frac{\frac{5}{2}n_1R + \frac{7}{2}n_2R}{n_1 + n_2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}C_{P1} + \frac{n_2}{n_1 + n_2}C_{P2}\,.$$

Es decir, los calores específicos equivalentes de la mezcla corresponden al promedio ponderado de los calores específicos de cada componente.

d) Para calcular el calor transferido entre los gases usamos la primera ley, esta vez aplicada sólo al gas monoatómico (se puede hacer lo mismo con el gas diatómico):

$$\frac{3}{2}n_1RdT = \delta Q - P_1dV\,.$$

La ecuación de estado nos permite escribir

$$\delta Q = n_1R\left(\frac{3}{2}dT + T\frac{dV}{V}\right)\,.$$

Pero del inciso anterior sabemos que durante el proceso

$$\frac{dT}{T} = -\alpha\frac{dV}{V}\,.$$

Luego, la primera ley queda

$$\delta Q = n_1 R \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) dT \, .$$

Integrando la ecuación llegamos a

$$\begin{aligned} Q &= n_1 R \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) \Delta T \\ &= -\frac{4}{3} R \left(T_f - T_i \right) \, . \end{aligned}$$

Con los valores de temperatura anteriores (se debe usar el T_f de la mezcla) encontramos

$$Q = -1528{,}1 \, \mathrm{J} \, . \longleftarrow 1.5$$

El signo nos indica que efectivamente el calor fue cedido por gas monoatómico al gas diatómico. De habernos enfocado el el gas diatómico, el resultado sería

$$\begin{aligned} Q &= n_2 R \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) \Delta T \\ &= \frac{4}{3} R \left(T_f - T_i \right) \\ &= 1528{,}1 \, \mathrm{J} \, . \end{aligned}$$