PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
FIS1523 — Termodinámica
Segundo Semestre 2022
Profesores: L. Gence, A. Meza, A. Varas

Interrogación 1

5 octubre 2022

Tiempo: 2 horas 15 minutos

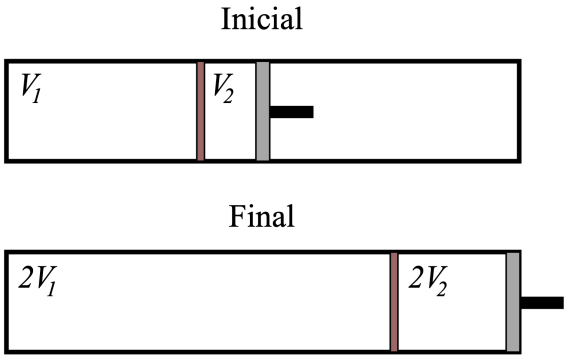
Reglas generales:

1. Escriba su nombre y RUT de manera clara y legible en cada hoja.
2. Está prohibido el uso de celulares y tablets.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. Está permitido el uso de lápiz mina, pero pierde el derecho a recorrección.
5. La interrogación es individual, no debe consultar a terceros.
6. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Problema 1 [6 puntos]

Considere un recipiente con dos subsistemas de volúmenes iniciales $V_1 = 10$ litros y $V_2 = 2$ litros, que contienen un gas ideal en equilibrio termodinámico. Los subsistemas están separados entre sí por una pared móvil. La temperatura del gas es constante e igual a 0°C. El subsistema 1 contiene 10 moles del gas. Luego, a través de un proceso isotérmico reversible, el volumen de cada subsistema se aumenta al doble.

Nota: La constante universal de los gases es $R = 8{,}3145$ J·mol^{-1}·K^{-1}.



(a) Encuentre el cambio en la energía interna y el trabajo realizado por cada subsistema (*3 puntos*).

(b) ¿Cuánto calor se suministra al sistema entero? (*3 puntos*).

Solución:

(a) El sistema está en equilbrio termodinámico, entonces la presión y la temperatura en los dos subsistemas es la misma, tanto en el estado inicial como en el estado final.

En el estado inicial se tiene (0.5 puntos)

$$\begin{aligned} P_i V_1 &= n_1 RT \\ P_i V_2 &= n_2 RT \end{aligned}$$

donde P_i es la presión inicial, $T = 0°\text{C} = 273$ K, $n_1 = 10$ mol y n_2 es el número de moles en el subsistema 2.

De estas ecuaciones se tiene

$$\frac{P_i V_2}{P_i V_1} = \frac{n_2 RT}{n_1 RT} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

entonces

$$n_2 = n_1 \frac{V_2}{V_1} = (10 \text{ mol}) \left(\frac{2 \text{ litros}}{10 \text{ litros}} \right) = 2 \text{ mol} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Para un proceso isotermal, T es constante, por lo tanto para un gas ideal $\Delta U = 0$ (0.5 puntos).

El trabajo realizado por el subsistema 1 es

$$W_1 = -\int_{V_1}^{2V_1} P dV = -n_1 RT \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V} = -n_1 RT \ln \left(\frac{2V_1}{V_1} \right) = -n_1 RT \ln 2 = -15741 \text{ J} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Analogamente, el trabajo realizado por el subsistema 2 es

$$W_2 = -\int_{V_2}^{2V_2} P dV = -n_2 RT \int_{V_2}^{2V_2} \frac{dV}{V} = -n_2 RT \ln \left(\frac{2V_2}{V_2} \right) = -n_2 RT \ln 2 = -3148 \text{ J} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

b) Dado que $\Delta U = 0$ (1 punto), por la primera ley de la termodinámica

$$Q = \Delta U - W = -W = 18889 \text{ J} \qquad \text{(1 punto)}$$

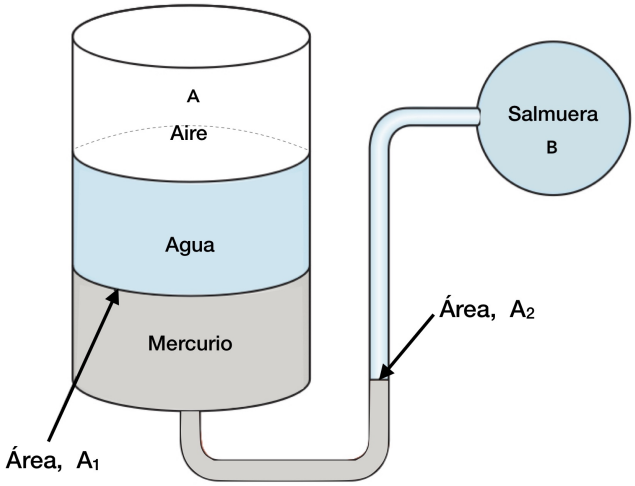
donde $W = W_1 + W_2$ es el trabajo total realizado por el sistema entero (1 punto).

´

Problema 2 [6 puntos]

Considere el sistema que se muestra en la figura. Se sabe que una disminución de 0,7 kPa en la presión del aire (Punto A) genera una disminución de 5 mm en la altura de la interfase salmuera-mercurio de la columna de la derecha, mientras la presión en la tubería de salmuera (Punto B) permanece constante.

Nota: Puede usar los siguientes valores para la densidad del agua $\rho_{\text{agua}} = 1000$ kg/m^3 y las gravedades específicas del mercurio y de la salmuera $DE_{\text{Hg}} = 13{,}56$ y $DE_{\text{salmuera}} = 1{,}10$, respectivamente. Recuerde que la densidad específica de un fluido $DE = \rho g/\rho_{\text{agua}}$, donde ρ es la densidad del fluido y g es la aceleración de gravedad. Suponga que $g = 10$ m/s^2.



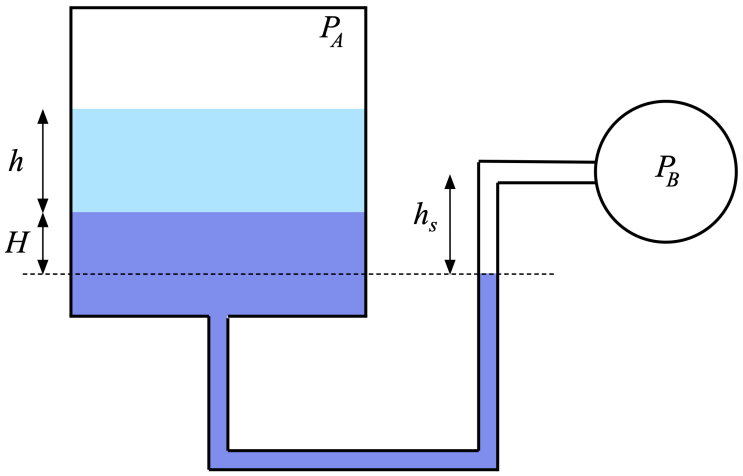
(a) Escriba una relación entre la presión en B y la presión en A y las alturas de las columnas de los distintos fluidos (*2 puntos*).

(b) Determine el valor de la razón A_2/A_1, entre las áreas de las interfases salmuera-mercurio (A_2) y mercurio-agua (A_1) (*4 puntos*).

Solución:

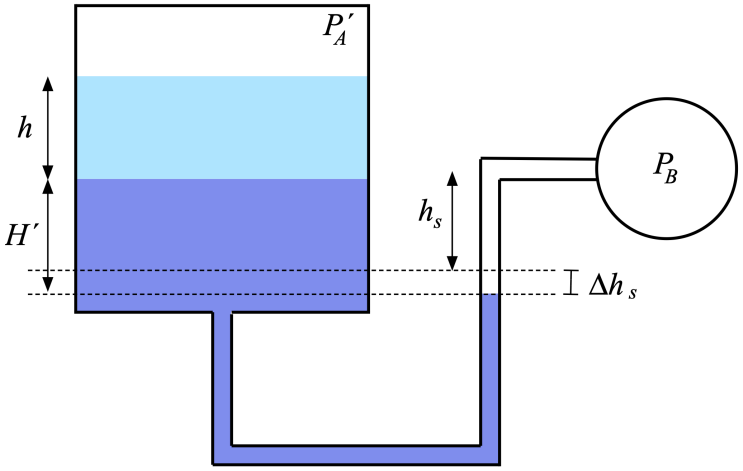
(a) En la interfase en la columna del lado izquierdo se tiene

$$P_A + \rho_{\text{agua}} g h + \rho_{\text{Hg}} g H = P_B + \rho_s g h_s \qquad \text{(1 punto)} \qquad (1)$$



donde h es la altura de la columna de agua, H es la altura de la columna de mercurio respecto al nivel dado por la línea punteada y h_s es la altura de la columna de salmuera respecto al nivel dado por la línea punteada (1 punto por la definición/explicación de las alturas empleadas para obtener la relación entre P_A y P_B).

(b) Sabemos que si la presión en A disminuye entonces la altura de la interfase en la columna de la derecha disminuye.



Entonces, la presión en la nueva interfase satisface

$$P'_A + \rho_{\text{agua}} g h + \rho_{\text{Hg}} g H' = P_B + \rho_s g (h_s + \Delta h_s) \qquad \text{(0,5 puntos)} \tag{2}$$

donde P'_A es la nueva presión en A, $\Delta h_s = 0{,}005$ m es el cambio de altura en la interfase, H' es la altura de la columna de mercurio con respecto al nuevo nivel.

La altura H' está dada por

$$H' = H + \Delta h_s + \Delta H \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

donde ΔH es el cambio en la altura de la columna de mercurio en el tanque causado por la variación en la altura de la interfase en la columna del lado derecho. Por conservación de volumen

$$A_1 \Delta H = A_2 \Delta h_s \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

De la ecuación (1) se tiene

$$P_A = P_B + \rho_s g h_s - \rho_{\text{agua}} g h - \rho_{\text{Hg}} g H$$

y de la ecuación (2) se tiene

$$P'_A = P_B + \rho_s g(h_s + \Delta h_s) - \rho_{\text{agua}} g h - \rho_{\text{Hg}} g \left(H + \Delta h_s + \frac{A_2}{A_1} \Delta h_s \right) \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Restando estas ecuaciones se tiene

$$P_A - P'_A = \rho_{\text{Hg}} g \frac{A_2}{A_1} \Delta h_s + \rho_{\text{Hg}} g \Delta h_s - \rho_s g \Delta h_s \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

entonces

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_s}{\rho_{\text{Hg}}} - 1 + \frac{P_A - P'_A}{\rho_{\text{Hg}} g \Delta h_s} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

donde $P_A - P'_A = 700\ \text{N/m}^2$.

Usando la densidad específica para el mercurio y la salmuera se obtiene

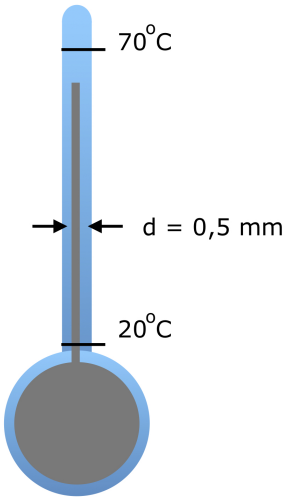
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{DE_s}{DE_{\text{Hg}}} - 1 + \frac{P_A - P'_A}{\rho_{\text{agua}} DE_{\text{Hg}} g \Delta h_s} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Evaluando se obtiene

$$\frac{A_2}{A_1} = 0{,}134 \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Problema 3 [6 puntos]

En una fabrica de termómetros, se construye un tipo de termómetro de mercurio a temperatura ambiente ($T = 20°\text{C}$) para medir temperaturas en el rango ($T = 20 - 70°\text{C}$), con un tanque esférico de volumen $V_s = 1\,\text{cm}^3$ en la parte inferior y un tubo de expansión de radio $r_0 = 0{,}25\,\text{mm}$. El espesor de la pared del depósito y el tubo es despreciable y la marca de los 20°C se ubica en la unión entre el tanque esférico y el tubo. El tubo y el tanque están hechos de sílice fundida SiO_2, una forma de vidrio transparente que tiene un coeficiente de expansión lineal muy bajo ($\alpha = 0{,}4 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$).



Considere que el coeficiente de expansión volumétrica del mercurio es $\beta = 181 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1}$.

(a) Determine la variación del volumen de mercurio en términos de β, V_s y ΔT (*1.0 punto*).

(b) Determine la variación del volumen del tanque esférico en términos de α, V_s y ΔT (*1.0 punto*).

(c) Determine el radio interno del tubo de expansión para $T > 20^\circ\text{C}$ en términos de r_0, α y ΔT (*1.0 punto*).

(d) Determine la altura h que subirá el mercurio por el tubo en términos de α, β, V_s, r_0 y ΔT (*1.0 punto*).

(e) Por error, para un lote de termómetros se utilizó cuarzo en vez de sílice fundida, la cual es una forma cristalina transparente de la sílice con un coeficiente de expansión lineal mucho más alto ($\alpha_{\text{cuarzo}} = 12{,}3 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1}$). Determine si el fabricante tiene que desechar este lote, o si los termómetros funcionarán bien, dentro de este rango de temperatura ($T = 20 - 70^\circ\text{C}$) sabiendo que se acepta un error en la lectura de temperatura de 5 % (*2.0 puntos*).

Solución:

(a) La variación del volúmen de mercurio está dada por:

$$\Delta V_{Hg} = \beta V_s \Delta T \qquad \text{(1,0 punto)}$$

(b) La variación del volumen del tanque esférico está dada por:

$$\Delta V_s = 3\alpha V_s \Delta T \qquad \text{(1,0 punto)}$$

(c) El perímetro de la circunferencia interior del tubo de expansión es $C = 2\pi r$, por lo tanto:

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{C_0 + \Delta C}{2\pi} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

donde C_0 es la circunferencia inicial dada por $2\pi r_0$. Así:

$$r = \frac{C_0 + \alpha C_0 \Delta T}{2\pi} = \frac{2\pi r_0 (1 + \alpha \Delta T)}{2\pi} = r_0(1 + \alpha \Delta T) \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

(d) El volumen que ocupará el mercurio en el tubo corresponderá a la variación del volumen de mercurio ΔV_{Hg} menos la variación del volumen del contenedor esférico ΔV_s, esto es:

$$\pi r^2 h = \Delta V_{Hg} - \Delta V_s \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Por lo tanto:

$$h = \frac{\Delta V_{Hg} - \Delta V_s}{\pi r^2} = \frac{\beta V_s \Delta T - 3\alpha V_s \Delta T}{\pi r_0^2 (1 + \alpha \Delta T)^2} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

e) Para calcular si el termómetro de quarzo debe ser desechado, calculamos el cuociente entre las alturas que subirá el mercurio en cada tarmómetro, esto es:

$$\frac{h}{h_{\text{cuarzo}}} = \frac{(\beta - 3\alpha)}{(\beta - 3\alpha_{\text{cuarzo}})} \left[\frac{(1 + \alpha_{\text{cuarzo}}\Delta T)}{(1 + \alpha\Delta T)}\right]^2 \qquad \text{(1,0 puntos)}$$

Usando los valores del problema:

$$\frac{h}{h_{\text{cuarzo}}} = \frac{181 \times 10^{-6} - 3 \times 0{,}4 \times 10^{-6}}{181 \times 10^{-6} - 3 \times 12{,}3 \times 10^{-6}} \left[\frac{1 + 12{,}3 \times 10^{-6}(50))}{1 + 0{,}4 \times 10^{-6}(50)}\right]^2 = 1{,}249 \approx \frac{5}{4} \qquad \text{(0,5 punto)}$$

Lo anterior indica que a 70°C, la altura alcanzada por el mercurio en el termómetro de cuarzo es un 80 % de la altura alcanzada por el mercurio en el termómetro de sílice, es decir, el error es de un 20 % y por lo tanto los termómetros de cuarzo deben ser descartados. (0,5 puntos)