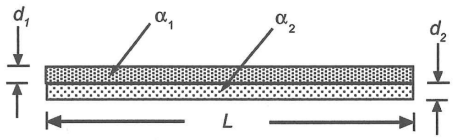
FIS1523 ⋆ Termodinámica
✓ **Ayudante:** *Sebastián Urrutia Quiroga*
✓ **Correo:** sgurruti@uc.cl
✓ **Página Web:** web.ing.puc.cl/~sgurruti/termo

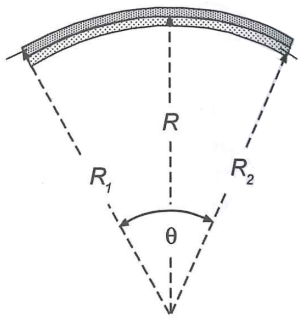
Ayudantía ⋆ Dilatación térmica y Gases ideales

1. Muchos interruptores eléctricos que se activan por cambio de temperatura se basan en la acción de láminas bimetálicas. Estas consisten de dos láminas metálicas delgadas unidas, como muestra la figura, con distinto coeficiente de dilatación lineal. El hecho que los coeficientes de dilatación lineal sean distintos hace que ante un cambio de temperatura la lámina se curve, debido al distinto cambio de longitud experimentado por ambos metales. Considere una lámina bimetálica de largo L, formada por dos metales de espesores d_1 y d_2, y coeficientes de dilatación térmica lineal α_1 y α_2, respectivamente. Suponiendo que a temperatura T la lámina no está deformada, encuentre el radio de curvatura R y el ángulo θ que subtiende, al experimentar un cambio de temperatura ΔT.



Solución:

Consideremos la siguiente situación:



La figura muestra esquemáticamente la curvatura experimentada por la lámina ante el cambio de temperatura. Al curvarse la lámina bimetálica, ambas láminas se curvan con radios de curvatura R_1 y R_2 respectivamente, medidos desde el centro de cada lámina. Como para un arco de circunferencia de longitud s se cumple que $s = R\theta$, para cada lámina se cumple que:

$$\begin{aligned} L + \Delta L_1 &= R_1\theta \\ L + \Delta L_2 &= R_2\theta \end{aligned}$$

Como $R_1 - R_2$ es la distancia entre los centros de ambas láminas, se cumple que:

$$R_1 - R_2 = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Combinando las ecuaciones anteriores, se tiene

$$\frac{L+\Delta L_1}{\theta} - \frac{L+\Delta L_2}{\theta} = \frac{d_1+d_2}{2}$$

Despejando θ,

$$\theta = \frac{2(\Delta L_1 - \Delta L_2)}{d_1+d_2} = \frac{2L\Delta T(\alpha_1-\alpha_2)}{d_1+d_2}$$

El radio de curvatura se puede expresar en término de los radios de curvatura de cada lámina como

$$R = \frac{R_1+R_2}{2}$$

Esto es

$$R = \frac{2L+\Delta L_1+\Delta L_2}{2\theta}$$

Reemplazando θ,

$$R = \frac{(1+\Delta T(\alpha_1+\alpha_2))(d_1+d_2)}{2\Delta T(\alpha_1-\alpha_2)}$$

■

2. Una barra cilíndrica, sólida y homogénea de cobre tiene un radio externo de 3 cm a 27° C. Un tubo delgado de aluminio tiene un radio interior de 2.995 cm a la misma temperatura. Determine la temperatura a la cual deben calentarse ambos cuerpos para que el cilindro pueda ser insertado en el interior del tubo. Considere que:

$$\alpha_{Cu} = 17\times10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \qquad \wedge \qquad \alpha_{Al} = 24\times10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$$

Solución:

Al calentarse, la barra experimenta una expansión en su área, mientras que el tubo sufre una expansión lineal en su perímetro:

$$\begin{aligned} \text{tubo} &\longrightarrow \Delta P = \alpha_{Al} P_0 \Delta T \\ \text{barra} &\longrightarrow \Delta A = 2\alpha_{Cu} A_0 \Delta T \end{aligned}$$

donde hemos asumido que $\beta_{Cu} = 2\alpha_{Cu}$. Sea r_0 el radio inicial del tubo a temperatura T_0, y $r(T)$ el radio del tubo a temperatura T:

$$P_0 = 2\pi r_0 \qquad \wedge \qquad P(T) = 2\pi r(T)$$

con $\Delta P = P(T) - P_0$. Por otra parte, sea R_0 el radio inicial de la barra a temperatura T_0, y $R(T)$ el radio de la barra a temperatura T:

$$A_0 = \pi {R_0}^2 \qquad \wedge \qquad A(T) = \pi R(T)^2$$

con $\Delta A = A(T) - A_0$. A una temperatura T,

$$\begin{aligned} 2\pi r(t) &= 2\pi r_0(1+\alpha_{Al}\Delta T) \\ r(t) &= r_0(1+\alpha_{Al}\Delta T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi R(t)^2 &= \pi {R_0}^2(1+2\alpha_{Cu}\Delta T) \\ R(t) &= R_0(1+2\alpha_{Cu}\Delta T)^{1/2} \end{aligned}$$

En general, $2\alpha_{Cu}\Delta T \ll 1$, por lo que podemos realizar una expansión en serie de Taylor:

$$(1+x)^\epsilon \approx 1+\epsilon x$$

y, por tanto,

$$(1+2\alpha_{Cu}\Delta T)^{1/2} \approx 1+\alpha_{Cu}\Delta T$$

Igualando los radios,

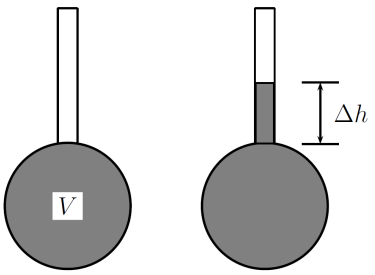
$$\begin{aligned} r(t) &= R(t) \\ r_0(1+\alpha_{Al}\Delta T) &= R_0(1+\alpha_{Cu}\Delta T) \\ \Delta T &= \frac{R_0-r_0}{r_0\alpha_{Al}-R_0\alpha_{Cu}} \\ T &= T_0+\frac{R_0-r_0}{r_0\alpha_{Al}-R_0\alpha_{Cu}} \end{aligned}$$

Como $T_0 = 300\,\mathrm{K}$,

$$T = 300\,\mathrm{K} + \frac{3-2.995}{24\times 2.995 - 17\times 3}\times 10^6\,\mathrm{K} \approx 539.5\,\mathrm{K} = 266.5^\circ\,\mathrm{C}$$

■

3. Un líquido con coeficiente de expansión térmica volumétrica β llena completamente un bulbo esférico de paredes muy delgadas y volumen V, que está hecho de un material con coeficiente de expansión térmica lineal α. El líquido es libre para expandirse en un tubo capilar muy delgado, de sección transversal A, que sobresale del bulbo, como muestra la figura. Considere que el material del capilar es tal que los cambios en sus dimensiones, por efecto de la temperatura, son despreciables frente a lo que sucede con el resto del sistema. Encuentre la altura Δh que sube el líquido en el capilar cuando la temperatura aumenta en ΔT.



Solución:

Dado que las paredes del bulbo son muy delgadas, se puede suponer que los radios interior y exterior de la pared son iguales. Si r_0 es el radio inicial del bulbo, su volumen inicial viene dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi {r_0}^3$$

y su superficie inicial es

$$S = 4\pi {r_0}^2$$

Al cambiar la temperatura en ΔT, el líquido experimenta una expansión térmica volumétrica y el bulbo, por ser muy delgado, una expansión superficial. Así,

$$\begin{aligned} V' &= V(1+\beta\Delta T) \\ &= \frac{4}{3}\pi {r_0}^3(1+\beta\Delta T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &= S(1+2\alpha\Delta T) \\ &= 4\pi {r_0}^2(1+2\alpha\Delta T) \end{aligned}$$

El volumen del líquido que sube por el capilar está dado por la diferencia de volúmenes expandidos del líquido y el bulbo. Considerando que el área de la sección transversal del capilar es A y que el líquido sube una altura Δh, se tiene que:

$$A\Delta h = V_b' - V'$$

donde V_b' es el volumen que encierra el bulbo expandido térmicamente. El aumento de volumen del bulbo está asociado a un aumento del radio, que se puede obtener a partir de la expansión térmica de su superficie. Así,

$$S' = 4\pi r^2 = 4\pi {r_0}^2(1+2\alpha\Delta T)$$

De lo anterior se obtiene que:

$$r = r_0(1+2\alpha\Delta T)^{1/2}$$

Dado que, en general, $2\alpha\Delta T \ll 1$, podemos expandir en serie de Taylor y obtener que:

$$r = r_0(1+\alpha\Delta T)$$

Así, el volumen expandido del bulbo es:

$$V_b' = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi {r_0}^3(1+\alpha\Delta T)^3 = V(1+\alpha\Delta T)^3$$

Con ello,

$$A\Delta h = V(1+\beta\Delta T) - V(1+\alpha\Delta T)^3$$

Usando nuevamente la expansión en serie de Taylor,

$$A\Delta h = V(\beta - 3\alpha)\Delta T \qquad \longrightarrow \qquad \Delta h = \frac{V}{A}(\beta - 3\alpha)\Delta T$$

■

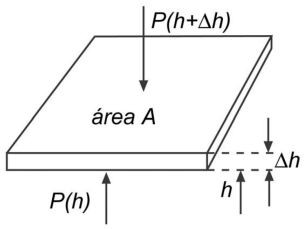
4. Debido a intercambio de calor por conducción térmica, en estado estacionario, la temperatura del aire decrece con la altura. Esta posee un valor inicial T_0, correspondiente a la temperatura del agua en la superficie de los océanos, y alcanza un valor mínimo T_H a una altura H. El aire puede ser aproximado como un gas ideal diatómico, con masa molar M_M. Suponiendo que la temperatura del aire decrece linealmente con la altura, obtenga una expresión para la presión atmosférica en función de la altura.

Solución:

Como se nos dice que la temperatura decrece linealmente con la altura, esto implica que:

$$T(h) = T_0 + \left(\frac{T_H - T_0}{H}\right) h = T_0 + \kappa h \qquad \text{con } \kappa \equiv \frac{T_H - T_0}{H} < 0$$

Analicemos una capa delgada de aire ubicada a una altura h, de área A y espesor Δh, y con densidad local ρ:



donde

$$\begin{aligned} P(h) &: \text{ presión atmosférica en la parte inferior de la capa} \\ P(h+\Delta h) &: \text{ presión atmosférica en la parte superior de la capa} \end{aligned}$$

Sea $W = mg = \rho g A \Delta h$ el peso de la capa de aire. Así, por equilibrio de fuerzas,

$$\begin{aligned} P(h+\Delta h)A + \rho g A \Delta h &= P(h)A \\ \frac{P(h+\Delta h) - P(h)}{\Delta h} &= -\rho g \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\Delta h \to 0$, nos queda la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g$$

¿Cómo sabemos la relación entre la densidad del aire y la altura? Para ello, utilizamos la ecuación de estado de los gases ideales, $PV = nRT$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{nRT}{V} \\ &= \frac{nM_M}{V}\frac{RT}{M_M} \\ &= \rho\frac{RT}{M_M} \\ &= \rho\frac{R}{M_M}(T_0 + \kappa h) \\ \therefore\ \rho(h) &= \frac{M_M}{R}\frac{P}{T_0 + \kappa h} \end{aligned}$$

Así, la ecuación diferencial a resolver es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dh} &= -\frac{M_M g}{R}\frac{P}{T_0+\kappa h} \\
\int_{P_0}^{P(h)} \frac{dP}{P} &= -\frac{M_M g}{R}\int_0^h \frac{dh}{T_0+\kappa h} \\
\ln\left(\frac{P(h)}{P_0}\right) &= -\frac{M_M g}{\kappa R}\ln\left(\frac{T_0+\kappa h}{T_0}\right) \\
&= -\lambda \ln\left(\frac{T_0+\kappa h}{T_0}\right)
\end{aligned}$$

donde P_0 es la presión a nivel del mar y $\lambda \equiv \dfrac{M_M g}{\kappa R}$. Despejando:

$$P(h) = P_0\left[1+\frac{\kappa h}{T_0}\right]^{-\lambda} = P_0\left[1-\left(\frac{T_0-T_H}{T_0}\right)\frac{h}{H}\right]^{\frac{M_M g H}{R(T_0-T_H)}}$$

■

5. Considere a cilindro de 1 m de largo con un pistón delgado firmemente sujeto, de modo que divide al cilindro en dos partes iguales. El cilindro está en un baño térmico a $T = 300\,\mathrm{K}$. El lado izquierdo contiene un mol de gas de helio a 3 atm de presión. El lado derecho contiene gas de helio a una presión de 2 atm. Considere que el gas de helio se comporta como un gas ideal. Suponga que en cierto instante el piston se suelta, ¿cuál es la posición final del pistón? Asuma que el baño térmico mantiene la temperatura fija a 300 K durante los procesos.

Solución:

El hecho de que el helio se comporte como un gas ideal nos permite utilizar la ecuación de estado $PV = nRT$ para determinar pa posición final del pistón. Sea V el volumen total del cilindro. Para el lado izquierdo, se sabe que:

$$V_i = \frac{V}{2} = \frac{n_i RT}{P_i}$$

donde el subíndice i denota al lado izquierdo. Notar que todo el cilindro se mantiene a temperatura T, por lo que no hacemos distinción entre cada lado. Una afirmación análoga se puede realizar para el lado derecho,

$$V_d = \frac{V}{2} = \frac{n_d RT}{P_d}$$

Igualando, podemos despejar el número de moles en el lado derecho del cilindro:

$$V_i = V_d \qquad \longrightarrow \qquad n_d = \frac{P_i}{P_d} n_i = \frac{2}{3}\,\mathrm{mol}$$

Al soltar el pistón, este se estabilizará en la posición en que la presión sea igual en ambas cámaras. Nuevamente usando la ecuación de estado de los gases ideales, lo anterior se traduce en que:

$$P_i' = P_d' \qquad \longrightarrow \qquad \frac{n_i RT}{V_i'} = \frac{n_d RT}{V_d'}$$

donde la comilla denota el estado de equilibrio del sistema. Utilizando la relación entre el número de moles (que permanece constante) entre ambos lados del cilindro, obtenemos la siguiente relación entre los volúmenes de equilibrio:

$$\frac{V_i'}{V_d'} = \frac{n_i}{n_d} = \frac{3}{2}$$

Como el área transversal del cilindro permanece constante, esto implica que el largo de cada cámara queda también en igual proporción:

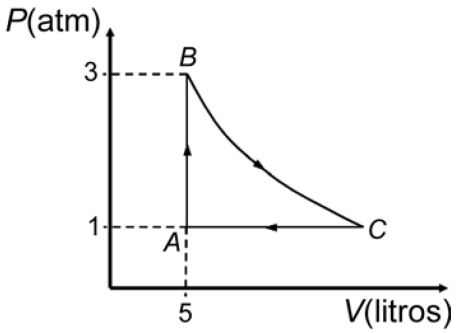
$$\frac{L_i'}{L_d'} = \frac{3}{2}$$

Podemos usar esta ecuación en combinación con el hecho de que $L = L_i' + L_d' = 1\,\mathrm{m}$. Así,

$$L_i' = \frac{3}{5}\,\mathrm{m} = 0.6\,\mathrm{m}$$

a la derecha del extremo izquierdo del cilindro. ■

6. Un gas monoatómico ideal ocupa 5 L a presión atmosférica y a 27° C (punto A de la figura). El gas es calentado a volumen constante, hasta que la presión llega a 3 atm (punto B en la figura). Luego, el gas se expande isotérmicamente, hasta volver a la presión de una atmósfera (punto C de la figura). Finalmente es comprimido isobáricamente, para volver a la condición original.



a) Determine el número de moles del gas

b) Encuentre la temperatura en B y C, y el volumen en C

Solución:

a) La ecuación de estado de los gases ideales, $PV = nRT$, nos permite obtener el número de moles en función de otras variables termodinámicas:

$$n = \frac{PV}{RT}$$

En el punto A se conoce la temperatura ($T_A = 27°\,\mathrm{C} = 300\,\mathrm{K}$), el volumen ($V_A = 5\,\mathrm{L}$) y la presión ($P_A = 1\,\mathrm{atm} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$). Reemplazando, con $R = 8.314\,\mathrm{J/mol \cdot K}$,

$$n = 0.202\,\mathrm{mol}$$

b) De la ecuación de estado,

$$T = \frac{PV}{nR}$$

En el punto B, $P_B = 3\,\text{atm} = 3.03 \times 10^5\,\text{Pa}$ y $V_B = 5\,\text{L}$. Como ya conocemos el número de moles, podemos reemplazar hasta obtener:

$$T_B = 902\,\text{K}$$

El proceso $B \to C$ es isotérmico, luego $T_C = T_B = 902\,\text{K}$. Finalmente, de la ecuación de estado,

$$V = \frac{nRT}{P}$$

En el punto C, $P_C = P_A = 1\,\text{atm} = 1.01 \times 10^5\,\text{Pa}$. Reemplazando el número de moles y la temperatura antes calculada,

$$V_C = 0.015\,\text{m}^3 = 15\,\text{L}$$

■