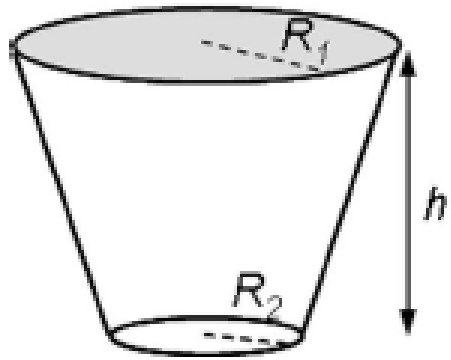
FísicaUC

Ejercicios I1 - 111

Ej01-I1

Un cono hueco de vidrio pyrex muy delgado, abierto en ambos extremos, tiene a cierta temperatura radio superior R_1=10 cm, radio inferior R_2=5 cm, y altura h=10 cm, como muestra la figura. En la parte superior calza justo un disco delgado de acero. Calcule, ignorando efectos de roce, cuanto desciende el disco en el interior del cono cuando la temperatura baja en 50ºC.

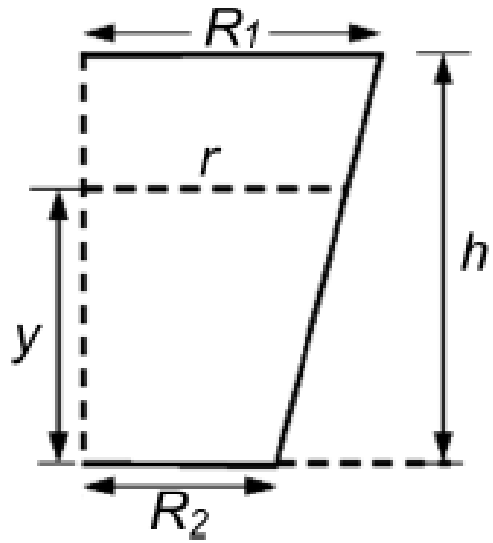


α_{acero}= 12·10^{-6} ºC^{-1}, α_{pyrex}= 3.2·10^{-6} ºC-1.

FísicaUC

solución

La geometría $\Longrightarrow$



Considerando un corte transversal en el cono

$$\Longrightarrow \quad r = R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} y$$

Cambio de temperatura en ΔT $\Longrightarrow$ $r \to r'$

Para el cono $\Longrightarrow$ $2\pi r' = 2\pi r\left(1 + \alpha_{pyrex}\Delta T\right)$

$$\Longrightarrow \quad r' = \left[R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} y\right]\left(1 + \alpha_{pyrex}\Delta T\right)$$

$\Longrightarrow$ cambio de radio a altura y

FísicaUC

ΔT en el disco implica expansión del área transversal

$$\Longrightarrow \quad 4\pi R^2 = 4\pi R_1^2\left(1+\alpha_{acero}\Delta T\right)$$

$$\Longrightarrow \quad R = R_1\sqrt{1+2\alpha_{acero}\Delta T} \approx R_1\left(1+\alpha_{acero}\Delta T\right)$$

En general $\alpha_{acero}\Delta T << 1$

La altura *y* de acomodo del disco resulta de imponer $r' = R$

$$\Longrightarrow \quad R_1\left(1+\alpha_{acero}\Delta T\right) = \left[R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h}y\right]\left(1+\alpha_{pyrex}\Delta T\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{R_1\left(1+\alpha_{acero}\Delta T\right) - R_2\left(1+\alpha_{pyrex}\Delta T\right)}{\left(R_1 - R_2\right)\left(1+\alpha_{pyrex}\Delta T\right)}h$$

FísicaUC

$$\Longrightarrow \quad y = \left[\frac{1}{1+\alpha_{pyrex}\Delta T} + \frac{R_1\alpha_{acero} - R_2\alpha_{pyrex}}{(R_1 - R_2)(1+\alpha_{pyrex}\Delta T)}\Delta T \right] h$$

En general $\alpha\Delta T << 1$

$\Longrightarrow$ A primer orden en $\alpha\Delta T$

$$\Longrightarrow \quad y \approx \left[1 - \alpha_{pyrex}\Delta T + \frac{R_1\alpha_{acero} - R_2\alpha_{pyrex}}{R_1 - R_2}\Delta T \right] h$$

La temperatura baja en 50º C $\Longrightarrow$ $\Delta T = -50\,^{\circ}\mathrm{C}$

$\Longrightarrow$ $y \approx 9.991\ \mathrm{cm}$

$\Longrightarrow$ El disco desciende $\Delta h = h - y = 0.009\ \mathrm{cm} = 90\ \mu\mathrm{m}$

FísicaUC

Ej02-I1

Dos contenedores aislados de cobre, de masa 0.5 kg cada uno, que contienen 1 l de agua cada uno, están conectados por una barra de cobre, también aislada, de 10 cm de largo y 1.5 cm^2 de sección. Uno de los contenedores está inicialmente a 50ºC y el otro se mantiene a 0ºC.

a) Encuentre la función $T(t)$ que describe la evolución temporal de la temperatura del primer contenedor.

b) Determine el tiempo necesario para que la temperatura descienda a 25ºC.

c) Encuentre la función $Q(t)$ que describe la evolución temporal de la cantidad de calor transferido entre ambos contenedores.

d) Determine la cantidad de calor cedido cuando la temperatura ha descendido a 25ºC.

$$c_{Cu} = 386\ J/kg \cdot K, \quad c_{H_2O} = 4186\ J/kg \cdot K, \quad k_{Cu} = 401\, W/m \cdot K$$

FísicaUC

solución

a) Contenedor a 50ºC cede calor

$$\Longrightarrow \quad dQ = -(m_{Cu}c_{Cu} + m_{H_2O}c_{H_2O})dT$$

Flujo de calor a lo largo de la barra

T: temperatura de contenedor que se enfría desde $T_i = 50°C$

T_o: temperatura de contenedor a 0ºC

$$\Longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = k_{Cu}A\frac{T - T_o}{L}$$

con $\quad R \equiv \dfrac{L}{k_{Cu}A} \qquad C \equiv m_{Cu}C_{Cu} + m_{H_2O}C_{H_2O}$

Combinando ecuaciones $\Longrightarrow \quad \dfrac{dT}{T - T_o} = -\dfrac{1}{RC}dt$

FísicaUC

integrando $\Longrightarrow$ $\int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T - T_o} = -\int_0^t dt$

$\Longrightarrow$ $\ln\left[\frac{T - T_o}{T_i - T_o}\right] = -\frac{t}{RC}$ $\Longrightarrow$ $T(t) = T_0 + (T_i - T_o)e^{-t/RC}$

b) El tiempo $\Longrightarrow$ $t = -RC \ln\left[\frac{T - T_o}{T_i - T_o}\right]$

$R = 7280$ $\Longrightarrow$ $t = -7280 \ln\left[\frac{25°\text{C} - 0°\text{C}}{50°\text{C} - 0°\text{C}}\right] = -7280 \times (-0.693)$

$\Longrightarrow$ $t = 5046 \text{ s} \approx 1.4 \text{ hrs}$

c) $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}(T - T_o)$ $\Longrightarrow$ $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}(T_i - T_o)e^{-t/RC}$

$\Longrightarrow$ $\Delta Q(t) = \frac{1}{R}(T_i - T_o)\int_0^t e^{-t/RC} dt$

FísicaUC

Integrando $\Longrightarrow \int_0^t e^{-t/RC}dt = RC\left(1-e^{-t/RC}\right)$

reemplazando $\Longrightarrow \Delta Q(t) = C(T_i - T_o)\left(1-e^{-t/RC}\right)$

c) $T = 25°\text{C} \Longrightarrow t = 5046\ \text{s} \Longrightarrow 1-e^{-5046/7280} = 0.5$

$\Longrightarrow \Delta Q = 4379(50-0)\times 0.5 = 109.475\ \text{J}$

alternativamente $\Longrightarrow \Delta Q = -(m_{Cu}c_{Cu} + m_{H_2O}c_{H_2O})\Delta T$

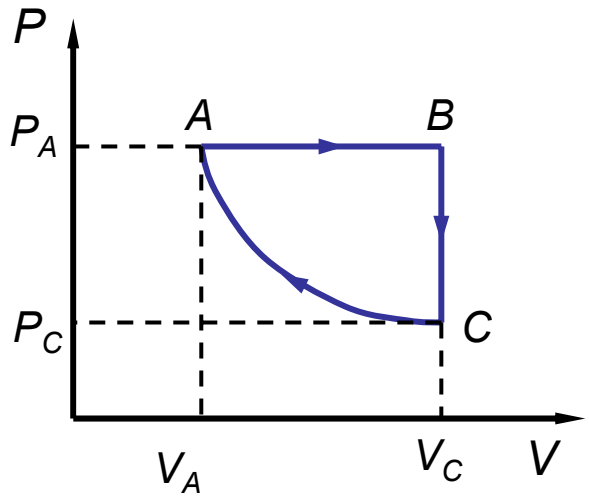
$\Longrightarrow \Delta Q = -4379(25-50) = 109.475\ \text{J}$

FísicaUC

Ej03-I1

Un mol de un gas ideal monoatómico realiza un proceso cíclico, en que el tramo A→B es isobárico, el tramo B →C es isocórico, y el tramo C →A es adiabático.

a) Determine el cambio de energía interna del gas en un ciclo.
b) Determine la cantidad de calor transferido al gas en un ciclo.
c) Determine el trabajo realizado por el gas en un ciclo.



solución

a) Al completar un ciclo las variables de estado recuperan sus valores iniciales

La energía interna es variable de estado $\Rightarrow$ $\Delta U = 0$

FísicaUC

b) Calor transferido al gas en un ciclo

$$\Longrightarrow \quad Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$$

Primera Ley $\Longrightarrow$ $dU = \delta Q - \delta W$

$A \to B$ $\quad Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$

proceso isobárico $\Longrightarrow$ $W_{AB} = P_A (V_C - V_A)$

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = \frac{3}{2} R T_B - \frac{3}{2} R T_A$$

Ecuación de Estado $\Longrightarrow$ $PV = nRT$

$$\Longrightarrow \quad \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} P_A (V_C - V_A) \quad \Longrightarrow \quad Q_{AB} = \frac{5}{2} P_A (V_C - V_A)$$

FísicaUC

$B \to C \qquad Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC}$

Proceso isocórico $\Longrightarrow \quad W_{BC} = 0$

$$\Delta U_{BC} = U_C - U_B = \frac{3}{2} R T_C - \frac{3}{2} R T_B \quad \Longrightarrow \quad \Delta U_{BC} = \frac{3}{2}(P_C - P_A) V_C$$

$$\Longrightarrow \quad Q_{BC} = \frac{3}{2}(P_C - P_A) V_C$$

$C \to A \qquad Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC}$

Proceso adiabático $\Longrightarrow \quad Q_{BC} = 0$

$$\Longrightarrow \quad Q = P_A V_C - \frac{5}{2} P_A V_A + \frac{3}{2} P_C V_C$$

c) En un ciclo completo $\Delta U = 0$

$$\Longrightarrow \quad W = Q \quad \Longrightarrow \quad W = P_A V_C - \frac{5}{2} P_A V_A + \frac{3}{2} P_C V_C$$

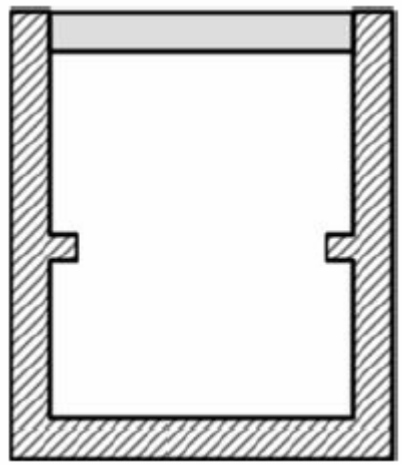
$\Delta U = Q - W$

FísicaUC

Ej04-L1

Considere un sistema cilidro/pistón, como el que muestra la figura Los topes dividen el cilindro en dos volúmenes idénticos. En el interior hay aire, con condiciones iniciales 400ºC y 150 kPa. Se permite que el aire se enfríe, alcanzando una temperatura de 20ºC.

a) Determine si en el estado final el pistón está o no apoyado sobre los topes del interior del cilindro.
b) Encuentre la presión en el estado final.
c) Encuentre el trabajo específico hecho por el aire en el proceso.
d) Represente el proceso en diagramas $P - v$ y $T - v$.



FísicaUC

solución

a) Aire como gas ideal $\Longrightarrow$ $Pv = \mathcal{R}T$ $\quad \mathcal{R} = 0.287\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{P_i v_i}{T_i} = \frac{P_f v_f}{T_f}$$

$T_i = 400°\text{C} = 673\ \text{K}$

Si no está apoyado sobre los topes del interior del cilindro $\Longrightarrow$ $P_f = P_i$

$T_f = 20°\text{C} = 293\ \text{K}$

el volumen sería $\Longrightarrow$ $v_f = \frac{T_f}{T_i} v_i$ $\Longrightarrow$ $v_f = \frac{293}{693} v_i = 0.43 v_i$

$\Longrightarrow$ $v_f < 0.5 v_i$ $\Longrightarrow$ El pistón está apoyado sobre los topes del interior del cilindro

b) $\frac{P_i v_i}{T_i} = \frac{P_f v_f}{T_f}$ $\quad v_f = 0.5 v_i$ $\Longrightarrow$ $P_f = 2\frac{T_f}{T_i} P_i$

FísicaUC

$$\Longrightarrow \quad P_f = 2\frac{293}{673}150 = 130.6 \text{ kPa}$$

c) Trabajo específico $\Longrightarrow \quad w = \int_i^f P dv$

El trabajo del aire es a presión constante

$$Pv = \mathcal{R}T \quad \Longrightarrow \quad Pdv = \mathcal{R}dT$$

$$\Longrightarrow \quad w = \mathcal{R}\int_{T_i}^{T_f} dT = 0.287(293 - 673) = -109.06 \text{ J/kg}$$

