Solución I1: FIS1523 - Termodinámica

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs. Mario Favre, Hernán Chuaqui y Griselda García
Segundo Semestre 2010

1. Considere un cilindro con un pistón sin roce y de masa despreciable, como muestra la figura. En el interior del pistón hay inicialmente una capa de hielo, de 1 cm de espesor, que se encuentra a -10°C. El área de la sección transversal del cilindro es 50 cm^2 y el exterior se encuentra a presión atmosférica. Desde una fuente externa se transfiere calor al interior del cilindro a una tasa constante de 100 W. Encuentre:

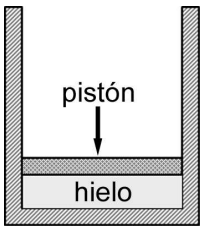
   a) El tiempo necesario para que el hielo alcance la temperatura de 0°C, sin fundirse.

   b) El volumen del hielo cuando se encuentra a 0°C.

   c) El tiempo necesario para que en el interior del cilindro se encuentre sólo vapor de agua a 100°C.

   d) El trabajo hecho por el vapor de agua sobre el pistón, cuando la temperatura cambia de 100°C a 200°C. Para este cálculo suponga que el vapor de agua se comporta como gas ideal.

   Datos: $\rho_{hielo} = 0.92$ g/cm^3 (densidad), $\alpha_{hielo} = 5{\cdot}10^{-5}$ C^{-1} (coeficiente de dilatación lineal), $c_{hielo} = 2.08$ J/g·K, $c_{agua} = 4.18$ J/g·K, $c_{vapor} = 2.05$ J/g·K (calores específicos), $L_{hielo} = 334$ J/g (calor latente de fusión), $L_{agua} = 2250$ J/g (calor latente de vaporización), $M_{m_{agua}} = 18$ g/mol (masa molecular vapor de agua).



Solución

a) La cantidad de calor ΔQ_{hielo} necesaria para cambiar la temperatura en ΔT está dada por la relación

$$\Delta Q_{hielo} = m_{hielo} c_{hielo} \Delta T$$

La masa de hielo, m_{hielo} resulta de

$$m_{hielo} = \rho_{hielo} V_{hielo}$$

donde $V_{hielo} = Ah$, siendo A y h el área y altura de la capa de hielo, respectivamente. Reemplazando valores,

$$m_{hielo} = 0.92 \cdot 50 \cdot 1 = 46 \text{ g}$$

Con $\Delta T = 10°\text{C}$, reemplazando valores se tiene

$$\Delta Q_{hielo} = 46 \cdot 2.08 \cdot 10 = 956.8 \text{ J}$$

Como la tasa de transferencia de calor es $H = 100$ W, el tiempo Δt_{hielo} necesario para alcanzar cero grado es

$$\Delta t_{hielo} = \frac{\Delta Q_{hielo}}{H} = \frac{956.8}{100} = 9.57 \text{ s}$$

b) El cambio de volumen del hielo debido a dilatación térmica asociada a un cambio de temperatura en ΔT está dado por

$$V(T) = V_0 \left(1 + \beta \Delta T\right)$$

Para un sólido $\beta = 3\alpha$. En este caso $V_0 = Ah = 50$ cm^3. Reemplazando,

$$V_{hielo} = 50 \left(1 + 3 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 10\right) = 50.075 \text{ cm}^3$$

c) Para alcanzar el estado de vapor de agua a 100°C se deben dar cuatro procesos:

1) Calentamiento del hielo de -10° a 0°.
2) Cambio de estado del hielo a agua líquida a 0°.
3) Calentamiento del agua líquida de 0° a 100°.
4) Cambio de estado de agua líquida a vapor de agua a 100°.

Calculando para cada uno de los procesos:

1) Ya calcuamos Δt_1=9.57 s.
2) Para fundir el hielo se requiere

$$\Delta Q_F = m_{hielo} L_{hielo}$$

Reemplazando,

$$\Delta Q_F = 46 \cdot 334 = 15364 \text{ J}$$

Luego, el tiempo necesario es

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta Q_F}{H} = \frac{15364}{100} = 153.64 \text{ s}$$

3) Para calentar el agua a 100°C se requiere

$$\Delta Q_{agua} = m_{agua} c_{agua} \Delta T$$

Reemplazando,

$$\Delta Q_{agua} = 46 \cdot 4.18 \cdot 100 = 19228 \text{ J}$$

Luego, el tiempo necesario es

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta q_{agua}}{H} = \frac{19228}{100} = 192.28 \text{ s}$$

4) Para vaporizar el agua se requiere

$$\Delta Q_V = m_{agua} L_{agua} = 46 \cdot 2250 = 103500 \text{ J}$$

Luego, el tiempo necesario es

$$\Delta t_4 = \frac{\Delta Q_V}{H} = \frac{103500}{100} = 1035 \text{ s}$$

Sumando todoslos tiempos,

$$\Delta T_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 = 9.57 + 153.64 + 192.28 + 1035 = 1390.49 \text{ s}$$

5) Como la presión es constante, el trabajo es

$$W = P\Delta V$$

Usando la ecuación de estado de un gas ideal,

$$PV = nRT$$

se tiene que

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{nR}{P}(T_f - T_i) = \frac{nR}{P}\Delta T$$

Hay que determionar el número de moles n.

$$n = \frac{m_{hielo}}{M_{m_{agua}}} = \frac{46}{18} = 2.56 \text{ moles}$$

Reemplazando,

$$\Delta V = \frac{2.56 \cdot 8.314}{1.01 \cdot 10^5} \cdot 100 = 0.021 \text{ m}^3$$

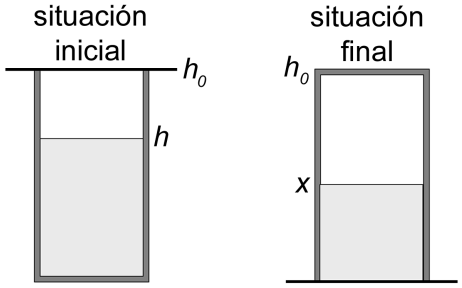
2. Considere un vaso alto cilíndrico de 15 cm de altura y 35 cm^2 de sección, que está con agua hasta una altura de 10 cm, sobre la cual hay aire a presión atmosférica. Se coloca una tarjeta para tapar el vaso, que se afirma mientras se invierte el vaso. Una vez que el vaso está invertido, se deja de afirmar la tarjeta, con lo que se cae parte del agua, quedando luego la tarjeta, sin soporte, como tapa inferior del vaso, en el cual se mantiene una parte del agua original, como muestra la figura. Despreciando el peso de la tarjeta:

   a) ¿Cuánta masa de agua se cae al quitar el soporte de la tarjeta?

   b) ¿Cuál es la presión del aire que queda sobre el agua en el vaso invertido?

Solución

Consideremos alturas del agua y el vaso en la situación inicial y final, como muestra la figura.



a) La masa de agua que sale del vaso, Δm es, con las definiciones de la figura y considerando que el área transversal del vaso es A

$$\Delta m = m_f - m_i = \rho A(h - x)$$

donde ρ es la densidad del agua. Asumiendo que el aire en el interior del vaso, sobre el agua en cada caso, se comporta como gas ideal, y considerando que en ambas situaciones la temperatura es la misma, y que no se escapa aire del vaso, se tiene

$$P_a V_0 = nRT$$
$$P_f V_f = nRT$$

donde P_a es la presión atmosférica, P_f la presión en el interior del vaso al final, n es el número de moles de aire en el interior del vaso. Usando las definiciones de la figura,

$$V_0 = (h_0 - h)\, A$$
$$V_f = (h_0 - x)\, A$$

Reemplazando,

$$P_a\,(h_0 - h) = P_f\,(h_0 - x)$$

De donde resulta

$$P_f = \frac{h_0 - h}{h_0 - x} P_a$$

En el estado final debe haber equilibrio de fuerzas, lo que se expresa a través de la relación

$$P_a = P_f + \rho g x$$

Reemplazando en la ecuación anterior, resulta

$$(h_0 - x)\, P_a = (h_0 - h)\, P_a - \rho g\, (h_0 - x)\, x$$

Reordenando términos,

$$\rho g x^2 - (P_a + \rho g h_0)\, x + h P_a = 0$$

Resolviendo para x,

$$x = \frac{P_a + \rho g h_0}{2\rho g} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g h P_a}{(P_a + \rho g h_0)^2}} \right]$$

Reemplazando valores numéricos, se obtiene

$$x_1 = 0.0995 \text{ m}$$
$$x_2 = 10.257 \text{ m}$$

Tomando x_1 como respuesta, la masa de agua que sale es

$$\Delta m = \rho A(h - x) = 10^3 \cdot 0.0035(0.1 - 0.0995) = 11.75 \text{ g}$$

b) La presión en el interior es

$$P_f = P_f - \rho g x = 1.01 \cdot 10^5 - 10^3 \cdot 9.8 \cdot 0.0995 = 100.025 \text{ kPa}$$

El valor x_2 corresponde a la altura de una columna de agua que ejerce una presión igual a P_f. Esto es,

$$P_f = \rho g x_2 = 1.015 \text{ kPa} \approx P_a$$

3. Un cilindro contiene gas Oxígeno, gas diatómico, inicialmente a 100 kPa, en un volumen de 10 l, y se encuentra en equilibrio térmico con el exterior, que está a 27°C. El gas es comprimido cuasiestáticamente, pero muy rápido, de modo que el proceso es adiabático, hasta que el volumen es 8 l, y se le mantiene en ese volumen, hasta que nuevamente alcanza el equilibrio térmico con el exterior.

   a) Encuentre la temperatura más alta y la presión más alta que alcanza el oxígeno en el proceso.

   b) Represente el proceso en diagramas $P - V$ y $T - V$.

   c) Encuentre el trabajo realizado por el Oxígeno en todo el proceso.

   d) Encuentre el calor cedido por el Oxígeno en todo el proceso.

Solución

a) Las condiciones iniciales son $P_1 = 10^5$ Pa, $T_1 = 27°\text{C} = 300$ K y $V_1 = 10$ l$= 10^{-2}$ m^3. El gas satisface la ecuación de estado de Gas Ideal,

$$PV = nRT$$

De aquí, el número de moles es

$$n = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{8.314 \cdot 300} = 0.4$$

En un proceso adiabático se cumple la relación

$$PV^\gamma = cte$$

Por tratarse de un gas diatómico, en este caso $\gamma = 1.4$. La constante se evalúa a partir de las condiciones iniciales. Así,

$$cte = P_1 V_1^\gamma = 10^5 \cdot \left(10^{-2}\right)^{1.4} = 158.49$$

De estado al final de la compresión se conoce el volumen, $V_2 = 4$ l $= 8 \cdot 10^{-3}$ m^3. Entonces, la presión más alta que se alcanza al final de la etapa de compresión, es

$$P_2 = \frac{cte}{V_2^\gamma} = \frac{158.49}{(8 \cdot 10^{-3})^{1.4}} = 1.37 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Usando la ecuación de estado, la temperatura más alta es

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR}$$

Reemplazando,

$$T_2 = \frac{1.37 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{0.4 \cdot 8.314} = 329.6 \text{ K} = 56.7° \text{ C}$$

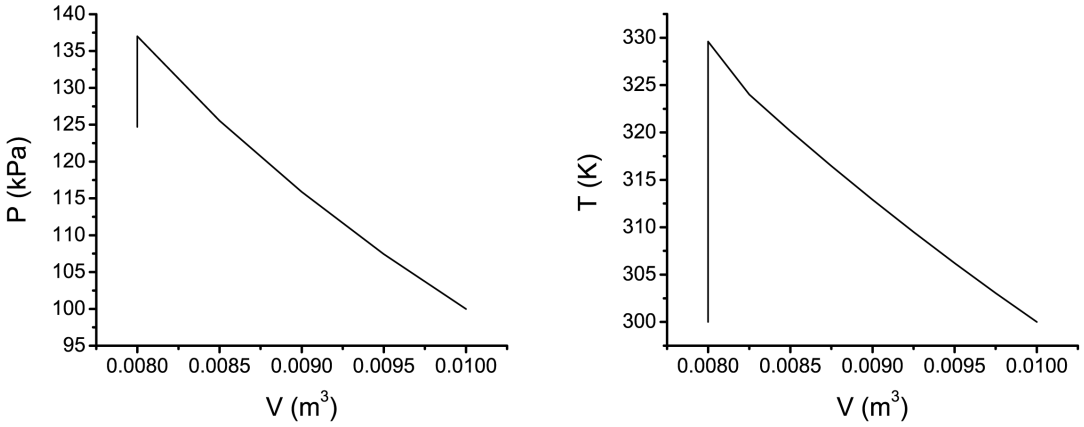
b) Los diagramas:

Diagrama PV: cuando el gas alcanza equilibrio térmico con el exterior, $T = 300$ K. Luego la presión final es

$$P_f = \frac{nRT}{V_2} = \frac{0.4 \cdot 8.314 \cdot 300}{0.008} = 124.7 \text{ kPa}$$

En el proceso adiabático entre P_1 y P_2, se tiene $P = 158.49/V^{1.4}$.

Diagrama TV: en el proceso adiabático entre T_1 y T_2, se tiene $T = 47.547/V^{0.4}$. La temperatura final es $T_f = T_1 = 300$ K. Así, los gráficos son los de la figura.



c) El trabajo del gas en el proceso es

$$W = \int_1^2 P dV$$

Como el proceso de compresión es adiabático,

$$W = cte \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{cte}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right]$$

Reemplazando,

$$W = \frac{158.49}{1-1.4}\left[\frac{1}{(8 \cdot 10^{-3})^{0.4}} - \frac{1}{(10^{-2})^{0.4}}\right] = -2500 \text{ J}$$

d) El calor cedido por el oxígeno en el proceso se obtiene de la Primera Ley de la Termodinámica

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

Al final del proceso el gas se encuetra nuevamente en equilibrio térmico con el medio externo, luego su temperatura es igual a la inicial. Como $\Delta U = nc_v \Delta T$, y $\Delta T = 0$, ΔU =0.

Así,

$$\Delta Q = W = -2500 \text{ J}$$

El signo negativo implica que el gas cede calor al medio