FIS1523 ⋆ Termodinámica
✓ **Ayudante:** *Sebastián Urrutia Quiroga*
✓ **Correo:** sgurruti@uc.cl
✓ **Página Web:** web.ing.puc.cl/~sgurruti/termo

Ayudantía ⋆ Calor específico y Calor latente

1. Una esfera metálica de masa m_1, calor específico c_1 y coeficiente de dilatación lineal α, que tiene radio r_0 a temperatura T_1, es sumergido en un líquido de masa m_2 y calor específico c_2, que se encuentra a temperatura $T_2 > T_1$. Suponiendo que el recipiente que contiene el líquido está aislado térmicamente, determine el radio de la esfera en el momento en que se alcanza el equilibrio.

   Solución:

   Si $\Delta T_e = T_f - T_1$ es la variación de temperatura sufrida por la esfera y $\Delta T_l = T_2 - T_f$ es la variación de temperatura del líquido, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} |Q_{absorbido}| &= |Q_{cedido}| \\ m_1 c_1 (T_f - T_1) &= m_2 c_2 (T_2 - T_f) \\ T_f(m_1 c_1 + m_2 c_2) &= m_2 c_2 T_2 + m_1 c_1 T_1 \\ T_f &= \frac{m_2 c_2 T_2 + m_1 c_1 T_1}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \end{aligned}$$

   El cambio en la temperatura produce dilatación en la esfera, lo que nos permite escribir:

$$r = r_0(1 + \beta \Delta T_e)^{1/3}$$

   Como, en general, $\beta \Delta T_e \ll 1$, podemos expandir la expresión anterior en serie de Taylor hasta obtener:

$$r = r_0 \left(1 + \frac{\beta}{3} \Delta T_e\right) = r_0 \Big(1 + \alpha (T_f - T_1)\Big)$$

   Finalmente, reemplazando el valor de T_f,

$$r = r_0 \left(1 + \frac{\alpha m_2 c_2 (T_2 - T_1)}{m_1 c_1 + m_2 c_2}\right)$$

   ■

2. Un calorímetro de aluminio, que tiene una masa de 500 g, contiene 300 g de agua a una temperatura estacionaria de 15° C.

   a) Un trozo de cobre de 300 g se calienta en un horno y luego se pone en el calorímetro. Si alcanzado el equilibrio térmico la temperatura del agua sube a 30° C, ¿cuál era la temperatura inicial del cobre?

   b) Si en las mismas condiciones iniciales se vierten en el calorímetro 10 g de zinc en estado líquido y a la temperatura de fusión, ¿cuál es la temperatura final alcanzado el equilibrio térmico?

Considere que:

$$c_{Cu} = 306\,\mathrm{J/kg\cdot K}\,, \qquad c_{Al} = 900\,\mathrm{J/kg\cdot K}\,, \qquad c_{Zn} = 387\,\mathrm{J/kg\cdot K}\,, \qquad c_{H2O} = 4180\,\mathrm{J/kg\cdot K}$$

$$L_{Zn} = 1.02\times 10^3\,\mathrm{J/kg}\,, \qquad T_{Zn} = 692\,\mathrm{K}$$

Solución:

a) La temperatura inicial del sistema agua/calorímetro es $T_i = 15^\circ\,\mathrm{C}$. Por otra parte, sabemos que la temperatura final en equilibrio térmico es $T_f = 30^\circ\,\mathrm{C}$. Sea T_{Cu} la temperatura inicial del cobre. En esta situación, el calorímetro con agua absorbe calor, mientras que el cobre cede calor:

$$\begin{aligned} m_{Cu}c_{Cu}(T_{Cu} - T_f) &= \Big(m_{Al}c_{Al} + m_{H2O}c_{H2O}\Big)(T_f - T_i) \\ T_{Cu} &= \left(\frac{m_{Al}c_{Al} + m_{H2O}c_{H2O}}{m_{Cu}c_{Cu}}\right)(T_f - T_i) + T_f \\ &= 581.43\,\mathrm{K} \\ &= 308.43^\circ\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

b) En este caso, el calor absorbido por el sistema calorímetro/agua es:

$$|Q_{absorbido}| = \Big(m_{Al}c_{Al} + m_{H2O}c_{H2O}\Big)(T_f - T_i)$$

Por otra parte, el calor cedido por la gota de zinc es:

$$|Q_{cedido}| = m_{Zn}c_{Zn}(T_{Zn} - T_f) + m_{Zn}L_{Zn}$$

La conservación de energía nos dice que $|Q_{absorbido}| = |Q_{cedido}|$, por lo que podemos despejar la temperatura final de equilibrio:

$$T_f = \frac{(m_{Al}c_{Al} + m_{H2O}c_{H2O})T_i + m_{Zn}L_{Zn} + m_{Zn}c_{Zn}T_{Zn}}{m_{Al}c_{Al} + m_{H2O}c_{H2O} + m_{Zn}c_{Zn}} = 288.9\,\mathrm{K} = 15.9^\circ\,\mathrm{C}$$

■

3. Se tienen 2 kg de agua a $25^\circ\,\mathrm{C}$, los cuales se mezclan con 0.5 kg de hielo a $-5^\circ\,\mathrm{C}$. ¿Cuáles son la temperatura y composición de la mezcla cuando se alcanza el estado de equilibrio? Considere que la temperatura de fusión del hielo es $0^\circ\,\mathrm{C}$, y que

$$c_a = 4.18\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}\,, \qquad c_h = 2.05\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}\,, \qquad L_f = 335\,\mathrm{kJ/kg}$$

Solución:

El calor requerido para fundir los 0.5 kg de hielo es:

$$Q_f = m_h\Big(c_h(273\,\mathrm{K} - T_h) + L_f\Big) = 172.625\,\mathrm{kJ}$$

con $m_h = 0.5\,\text{kg}$ y $T_h = -5^\circ\,\text{C} = 268\,\text{K}$. Por otra parte, el calor cedido por los 2 kg de agua al enfriarse de 25° C a 0° C es:

$$Q_a = m_a c_a (273\,\text{K} - T_a) = -209\,\text{kJ}$$

donde $m_a = 2\,\text{kg}$ y $T_a = 25^\circ\,\text{C} = 298\,\text{K}$. Como $|Q_a| > Q_f$, el estado final de la mezcla es agua líquida. Así, el calor absorbido por el hielo en este nuevo escenario es:

$$Q_h = m_h\Big(c_h(273\,\text{K} - T_h) + L_f\Big) + m_h c_a (T_f - 273\,\text{K})$$

donde, en el segundo término, hemos utilizado el calor específico del agua puesto que el hielo se ha derretido. Por otra parte, el calor cedido por el agua es:

$$Q_a = m_a c_a (T_f - T_a)$$

Por conservación de energía, $Q_h = -Q_a$ y por tanto:

$$T_f = \frac{m_a c_a T_a - m_h\Big(c_h(273\,\text{K} - T_h) + L_f\Big) + m_h c_a (273\,\text{K})}{c_a(m_a + m_h)} = 276.48\,\text{K} = 3.48^\circ\,\text{C}$$

■

4. Una bala de plomo, con una masa m_b de 3 g, a una temperatura de 30° C es disparada a una rapidez v de 240 m/s hacia un cubo GIGANTE de hielo a 0° C, donde la bala queda incrustada finalmente. ¿Qué cantidad de hielo se derrite en el proceso? Considere que:

$$c_{Pb} = 128\,\text{J/kg}\cdot\text{K} \qquad \wedge \qquad L_{f,hielo} = 335\,\text{kJ/kg}$$

Solución:

Antes de plantear ecuaciones, debemos entender que una vez que la bala se incruste dentro del bloque de hielo, le transmitirá calor al bloque (por diferencia de temperatura) y energía cinética. Esto es válido siempre y cuando el sistema esté perfectamente aislado del ambiente, en donde no exista intercambio de energía con el exterior del sistema.

Por enunciado, sabemos que se trata de un bloque de hielo MUY grande. Esto significa que una pequeña fracción del bloque se derretirá. Sin embargo, la temperatura final del sistema agua/hielo/bala será de 0° C pues toda la energía se utiliza en el cambio de fase y no en una variación de temperatura. Entonces,

$$\begin{aligned} |Q_{cedido}| &= \Delta E_{cin} + m_b c_{Pb}(T_b - T_f) \\ &= \frac{1}{2} m_b v^2 + m_b c_{Pb}(T_b - T_f) \end{aligned}$$

$$|Q_{absorbido}| = L_{f,hielo} m_{hielo}$$

Por conservación de energía, igualamos ambos términos y despejamos:

$$m_{hielo} = \frac{\dfrac{m_b v^2}{2} + m_b c_{Pb}(T_b - 273\,\mathrm{K})}{L_{f,hielo}} = 2.92 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$$

■

5. Vapor a $T_v = 100^\circ\,\mathrm{C}$ se añade a una masa de hielo a $T_h = 0^\circ\,\mathrm{C}$.

   a) Encuentre la cantidad de hielo derretido y la temperatura final cuando la masa del vapor m_v es de 10 g y la masa de hielo m_h es de 50 g

   b) Repita el cálculo, considerando que la masa del vapor m_v es 1 g y la masa del hielo m_h es de 50 g

   Considere que:

$$c_a = 4.18\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}\ , \qquad L_{f,hielo} = 335\,\mathrm{kJ/kg}\ , \qquad L_{v,agua} = 2.26 \times 10^6\,\mathrm{J/kg}$$

Solución:

a) Antes de resolver el problema, haremos una inspección del mismo. Necesitamos saber si el calor asociado a la condensación del vapor, llámese Q_1, es suficiente calor como para derretir la masa de hielo, llámese a este calor Q_2, y subir la temperatura del agua derretida en unos grados; aquí, Q_3 será este calor en el caso límite de subir la temperatura en $\Delta T = 100^\circ\,\mathrm{C}$. Evaluando, obtenemos que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_v L_{v,agua} \\ &= 22.6\,\mathrm{kJ} \\ Q_2 &= m_h L_{f,hielo} \\ &= 16.75\,\mathrm{kJ} \\ Q_3 &= m_h c_a \Delta T \\ &= 20.9\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

Es fácil notar que $Q_1 < Q_2 + Q_3$, lo que significa que el vapor condensa completamente y el **hielo se derrite (fusiona) completamente**; así, la temperatura final del sistema estará acotada dentro del siguiente intervalo: $T_h < T_{eq} < T_v$. Teniendo en cuenta esto,

$$\begin{aligned} |Q_{cedido}| &= m_v\Big(L_{v,agua} + c_a(T_v - T_{eq})\Big) \\ &= Q_1 + m_v c_a (T_v - T_{eq}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Q_{absorbido}| &= m_h\Big(L_{f,hielo} + c_a(T_{eq} - T_h)\Big) \\ &= Q_2 + m_h c_a (T_{eq} - T_h) \end{aligned}$$

Despejando T_{eq} de ambas ecuaciones, usando la conservación de energía, tenemos:

$$T_{eq} = \frac{Q_1 - Q_2 + c_a(m_v T_v + m_h T_h)}{c_a(m_h + m_v)} = 312.99\,\mathrm{K} = 39.99^\circ\,\mathrm{C}$$

b) Hacemos la misma inspección realizada en la alternativa caso anterior donde, en este caso, Q_1' representa el calor asociado a la condensación de vapor, Q_2' es el calor asociado a la fusión del hielo y Q_3' representa el calor asociado al caso límite de bajar la temperatura del vapor condensado de $100^\circ\,\mathrm{C}$ a $0^\circ\,\mathrm{C}$. Evaluando estas expresiones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} Q_1' &= m_v L_{v,agua} \\ &= 2.26\,\mathrm{kJ} \\ Q_2' &= m_h L_{f,hielo} \\ &= 16.75\,\mathrm{kJ} \\ Q_3' &= m_v c_a \Delta T \\ &= 0.418\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

Podemos notar que $Q_2' > Q_1' + Q_3'$. Esto nos indica que la masa de hielo no se derrite completamente. También, en base a lo anterior, se puede concluir que la temperatura final del sistema será de $T_{eq} = 0^\circ\,\mathrm{C}$. Entonces, solo basta determinar cuál es la cantidad de hielo que se derrite. Para ello, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} |Q_{cedido}| &= m_v\Big(L_{v,agua} + c_a(T_v - T_{eq})\Big) \\ &= Q_1' + Q_3' \end{aligned}$$

$$|Q_{absorbido}| = m_h L_{f,hielo}$$

Igualando ambos términos y despejando,

$$m_h = \frac{Q_1' + Q_3'}{L_{f,hielo}} = 7.99\,\mathrm{g}$$

■