Pontificia Universidad Católica de Chile
FIS1523 - Termodinámica

Ayudantía Termodinámica n.5

Profesor: Francisco Castillo
Ayudante: Alessandro Santoni - asantoni@uc.cl
Viernes 21 de Abril de 2022

Problema 1

La distribución del modulo v de la velocidad de las particulas en un gas a temperatura T es dada por la distribución $N(v)$ de Maxwell-Boltzmann

$$N(v) = Av^2 e^{-Bv^2} \quad \text{con} \quad B = \frac{m}{2k_B T} \ , \quad A = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} B^{\frac{3}{2}} \ ,$$

donde N es el numero total de particulas, m la masa de una particula y k_B es la costante de Boltzmann.

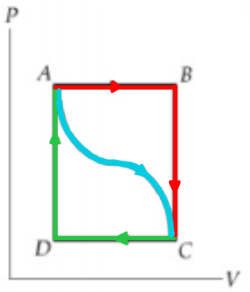
a) Encontrar la velocidad v_p más probable por las particulas

b) Encontrar el modulo de la velocidad promedio v_m de las particulas

c) Confrontar los resultados de los primeros dos puntos

Problema 2

El cambio de energía interna de un gas a lo largo de la trasformación AC, como se muestra en la figura, es de $800\,J$. El trabajo hecho sobre el gas en la trayectoria roja ABC es $-500\,J$



A) Cuanta energía hay que agregar al sistema por calor pasando de A a B y despues C?

B) Si la presión en el punto A es cinco veces la presión en el punto C, cual es el trabajo hecho sobre el sistema en pasar de C a D?

C) Cual es el intercambio de energía con el exterior por calor pasando del punto C a A a lo largo del camino verde?

D) Si el cambio de energía interna en ir de D a A es de $500\,J$, cuanta energía hay que agregar al sistema por calor pasando del punto C a D?

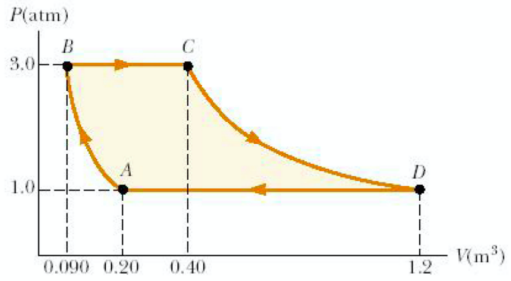
Problema 3

Una pieza está incialmente a la temperatura externa de $25\,°C$. Un ventilador que consuma $200\,W$ de energía electrica es encendido en el interior de la pieza. El rate de traspaso de calor entre la pieza y el exterior es dado por $\dot{Q} = UA\,(T_{in} - T_{out})$, donde $U = 6\,W/m^2°C$ es el coeficiente de traspaso de calor y $A = 30\,m^2$ es la superficie expuesta por el intercambio.

1. Suponiendo que el ventilador mueve $1\,kg$ de aire por segundo, cual es la velocidad a la cual el ventilador acelera esa cantidad de aire?
2. Cuando despues de un tiempo se llega nuevamente a una situación de equilibrio, cual es la nueva temperatura en la pieza?

Problema 4

Una muestra de gas ideal sigue el proceso indicado en la figura



I) De A a B el proceso es adiabático

II) De B a C es isobárico con un flujo de calor de $100\,kJ$ hacía el sistema.

III) De C a D hay una transformación isotérma

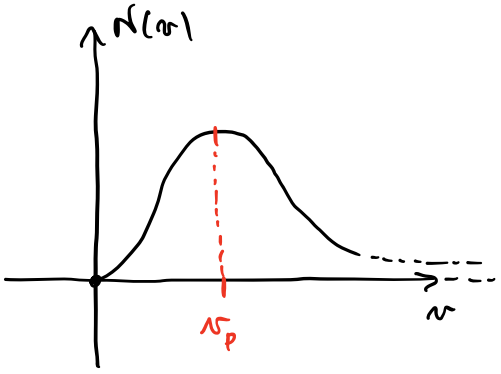
IV) De D a A el proceso es isobárico con $150\,kJ$ de flujo de calor hacia el exterior

Determine la diferencia de energía interna $\Delta U_{AB} = U_B - U_A$ entre los puntos A y B.

P1) Tenemos la distribución de Boltzmann $N(v)$:

$$N(v) = A v^2 e^{-Bv^2} ;$$

$$B = \frac{m}{2K_B T} \quad , \quad A = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} B^{3/2}$$



a) La velocidad más probable es dada por la velocidad que maximiza a la función $N(v)$

↓

Hay que calcular la derivada prima de N y ponerla igual a zero:

$$\frac{dN}{dv}\Big|_{v=v_p} = \frac{d}{dv}\left(A v^2 e^{-Bv^2}\right)\Big|_{v=v_p} =$$

$$= \left(2Av e^{-Bv^2} + A v^2 \cdot (-2Bv) e^{-Bv^2}\right)\Big|_{v=v_p} =$$

$$= \left(2Av - 2ABv^3\right) e^{-Bv^2}\Big|_{v=v_p} =$$

$$= 2Av\left(1 - Bv^2\right) e^{-Bv^2}\Big|_{v=v_p} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad v_p^2 = \frac{1}{B} \; ; \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{2K_B T}{m}}$$

b) Para encontrar el modulo de la velocidad promedio v_m hay que calcular el promedio de la velocidad de las partículas pesadas con el numero de partículas que tienen esa velocidad

↓

$$v_m = \langle v \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} dv\, N(v)\, v}{\int_0^{+\infty} dv\, N(v)} = \frac{1}{N}\int_0^{+\infty} dv\, A v^3 e^{-Bv^2} = \Big/ \cdot \frac{-2B}{-2B}$$

$$= \frac{A}{BN}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty} dv\, v^2 \underbrace{(-2Bv)e^{-Bv^2}}_{\frac{d}{dv}\left(e^{-Bv^2}\right)} =$$

$$= -\frac{A}{2BN}\left(v^2 e^{-Bv^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2v\, e^{-Bv^2} dv \right) =$$

$$= -\frac{A}{2BN}\left(0 - 0 - \int_0^{+\infty} 2v\, e^{-Bv^2} dv \right) = \Big/ \cdot \frac{B}{B}$$

$$= -\frac{A}{2B^2N}\int_0^{+\infty} (-2Bv)\, e^{-Bv^2} dv =$$

$$= -\frac{A}{2B^2N}\, e^{-Bv^2}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{A}{2B^2N}(0 - 1) = \frac{A}{2B^2N}$$

Implicando que: $v_m = \dfrac{A}{2B^2N} = \dfrac{\cancel{4}^{2}\pi N B^{3/2}}{\sqrt{\pi}\, 2N B^{2\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{B^{1/2}} = \sqrt{\dfrac{8K_BT}{\pi m}}$

c) Confrontando los dos resultados

$$v_p = B^{-1/2} \qquad y \qquad v_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} B^{-1/2}$$

vemos que $v_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p \simeq 1.13\, v_p$

Que significa que $v_m > v_p$, como era posible imaginar siendo que la distribución $N(v)$ no es simetrica respecto al valor v_m y que la "cola" derecha es más larga que la izquierda.

P2) Sabemos que $\Delta U_{ABC} = 800\,J$ y que en la trayectoria roja el trabajo del gas es $L_{ABC} = 500\,J$

A) Observamos que la variación de energía interna no depende del camino, entonces podemos evaluar ΔU_{ABC} a lo largo del camino rojo

$$\Delta U_{ABC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = Q_{AB} - L_{AB} + Q_{BC} - L_{BC} =$$

$$= Q_{ABC} - L_{ABC}$$

Aislando el calor: $Q_{ABC} = \Delta U_{ABC} + L_{ABC} = 800\,J + 500\,J =$

$$= 1300\,J$$

B) En la trasformación CD tenemos, siendo a presión constante

$$L_{CD} = P_C (V_D - V_C) = \quad \text{pero} \quad P_A = 5P_C \rightarrow P_C = \frac{1}{5} P_A \ \text{y}$$

$$= -\frac{1}{5} P_A (V_B - V_A) = \quad V_D - V_C = -(V_B - V_A)$$

$$= -\frac{1}{5} L_{AB} = -\frac{1}{5}\, 500\,J = -100\,J$$

C) Sabemos que siendo un ciclo $\Delta U_{ciclo} = 0$, entonces:

$$\Delta U_{ciclo} = \Delta U_{ABC} + \Delta U_{CBA} = Q_{ABC} - L_{ABC} + Q_{CDA} - L_{CDA} = 0$$

donde $L_{ABC} = 500\,J$, $Q_{ABC} = 1300\,J$ y $L_{CDA} = -100\,J$

Desde la red

$$Q_{CDA} = L_{ABC} + L_{CDA} - Q_{ABC} = 500\,J - 100\,J - 1300\,J = -900\,J$$

D) Siempre a partir de $\Delta U_{ciclo} = 0$ vemos que

$$\Delta U_{ciclo} = 0 = \Delta U_{ABC} + \Delta U_{CD} + \Delta U_{DA} = 0$$

$$\hookrightarrow \Delta U_{CD} = -\Delta U_{ABC} - \Delta U_{DA} = -800\,J - 500\,J = -1300\,J$$

y sabiendo que $\Delta U_{CD} = Q_{CD} - L_{CD}$ podemos invertir para encontrar el valor:

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + L_{CD} = -1300\,J - 100\,J = -1400\,J$$

P3) 1. El motor del ventilador transforma la energía electrica que consuma en energía mecanica de las aspas del ventilador. Imaginando el caso ideal en el cual todo la energía electrica se convierte en energía de las aspas y despues energía cinetica del aire, el balance energetico por un volumen de control con adentro el ventilador es:

EQUILIBRIO $$\frac{dE_{volumen}}{dt} = 0 = \underbrace{\dot{E}_{in}}_{\text{potencia electrica}} - \underbrace{\dot{E}_{out}}_{\text{energía que pasa a ser del aire por unidad de tiempo}} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

donde $\dot{E}_{in} = W$ y

$\dot{E}_{out} = \underbrace{\dot{m}}_{\text{cantidad de masa que sale del volumen por unidad de tiempo}} \frac{V_{out}^2}{2}$ → velocidad con la cual la masa m se mueve debida al ventilador

Donde la cual: $W = \dot{m} \frac{V_{out}^2}{2}$

$$\Rightarrow V_{out}^2 = \frac{2W}{\dot{m}} \; ; \; V_{out} = \sqrt{\frac{2W}{\dot{m}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200N}{1 kg/s}} = 20 m/s$$

2. La electricidad utilizada por el ventilador es un input de energía por la pieza, la cual entonces aumentará su temperatura.
Pero el aumentar su temperatura sobre los 25°C empezará a ceder energía por calor al exterior y más grande la diferencia de temperatura más rapida el proceso.
Llegará un punto en el cual el rate de perdida de energía equivale exactamente a la potencia introducida por el ventilador: es el punto de equilibrio del sistema.

Entonces, como antes: $\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$

donde $\dot{E}_{in} = W$ y
$\dot{E}_{out} = \dot{Q} = UA(T_{in} - T_{out})$

Implicando $W = UA(T_{in} - T_{out})$

$$\Rightarrow T_{in} = T_{out} + \frac{W}{UA} = 25°C + \frac{200\,W}{6\,\frac{W}{m^2°C}\,30\,m^2} =$$

$$= 25°C + 1,11°C = 26,1°C$$

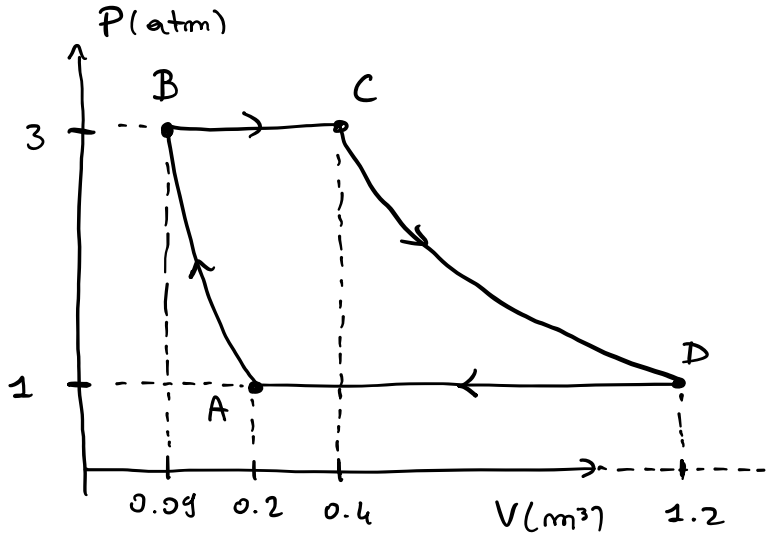
P4)

$A \xrightarrow[Q_{AB}=0]{\text{ADIAB.}} B$

$B \xrightarrow[Q_{BC}=100\,kJ]{\text{ISOBAR.}} C$

$C \xrightarrow{\text{ISOTER.}} D$

$D \xrightarrow[Q_{DA}=-150\,kJ]{\text{ISOBAR.}} A$



$P_A = 1\,atm = 101325\,Pa$

$P_B = 3\,atm = 303975\,Pa$

Siendo CD isoterma tenemos

$\Delta U_{CD} = n\,c_V\,\Delta T_{CD} = 0$

mientras la variación de energía del ciclo es claramente nula

$\Delta U_{TOT} = 0 = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{DA}$ desde la cual

$\Delta U_{AB} = -\Delta U_{DA} - \Delta U_{BC} = -Q_{DA} + L_{DA} - Q_{BC} + L_{BC}$

Siendo BC y DA a presión constante tenemos:

$L_{BC} = P_B(V_C - V_B) = 303975\,Pa \cdot (0.4\,m^3 - 0.09\,m^3) = 94\,kJ$

$L_{DA} = P_A(V_A - V_D) = 101325\,Pa \cdot (0.2\,m^3 - 1.2\,m^3) = -101\,kJ$

Entonces, remplazando en la ecuación anterior tenemos:

$$\Delta U_{AB} = - Q_{DA} + L_{DA} - Q_{BC} + L_{BC} =$$

$$= 150\,kJ - 101\,kJ - 100\,kJ + 98\,kJ = 43\,kJ$$

y siendo $Q_{AB} = 0$ esa variación de energía interna corresponde completamente al trabajo

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB} = -L_{AB} \Rightarrow L_{AB} = - \Delta U_{AB} = -43\,kJ$$