Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile

FIS-1513: Estática y Dinámica

Secciones 01–02–03, Profesores: Rafael Benguria, Samuel Hevia y Roberto Rodríguez

Interrogación 2

Viernes 14 de Septiembre de 2011

Tiempo: 120 minutos

NOMBRE: SECCION:

INDICACIONES GENERALES

[1] No olvide escribir su nombre y su sección en el espacio entre líneas que se ha dejado más arriba.

[2] No se limite a escribir fórmulas. Es importante que siempre explique lo que está haciendo.

[3] Esta Interrogación es sin uso de calculadora.

[4] Pruebas escritas con lápiz a mina ó en las que se ha utilizado corrector pierden el derecho a reclamo.

El momento de inercia (con respecto al centro de masa) de un disco homogéneo macizo de masa M y radio R está dado por:

$$I = \frac{1}{2} M\, R^2.$$

El momento de inercia (con respecto al centro de masa) de un anillo homogéneo de masa M y radio R está dado por:

$$I = M\, R^2.$$

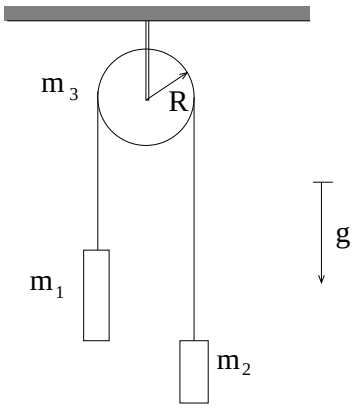
El momento de inercia (con respecto al centro de masa) de una barra homogénea de masa M y largo $d$está dado por:

$$I = \frac{1}{12} M\, d^2.$$

P1	
P2	
P3	
I2	

Problema 1. Este problema consiste de dos partes independientes:

a) Considere dos bloques de masas $m_1 = m$ y $m_2 = 3m$, que se mueven a lo largo de la vertical, unidos mediante una cuerda ideal de largo ℓ que pasa por una polea (maciza homogénea, que es libre de girar con respecto a un eje fijo) de masa $m_3 = 2\,m$ y radio R. Encuentre las tensiones en ambos lados de la cuerda, la aceleración vertical de los bloques m_1 y m_2, y la aceleración angular de m_3. Suponga que no hay deslizamiento entre la cuerda y la polea. [2 puntos].



Solución: Llamemos T_1 a la tensión de la cuerda izquierda, y T_2 la tensión de la cuerda derecha. Llamemos x a la distancia vertical desde el eje de la polea al bloque m_1 e y lo propio para el bloque m_2. Llamemos $\dot\theta$ a la rapidez angular de la poles, medida en el sentido de los punteros del reloj. Entonces la ecuaciones de movimiento de los bloques son:

$$mg - T_1 = m\ddot{x}, \tag{1}$$

$$3mg - T_2 = 3m\ddot{y}. \tag{2}$$

Por otra parte, la ecuación de torque del centro de masa de la polea está dada por

$$(T_2 - T_1)R = I\ddot\theta = \frac{1}{2}(2m)R^2\ddot\theta, \tag{3}$$

en que hemos usado que el momento de inercia de un disco homogéneo de masa M y radio R está dado por $I = MR^2/2$. Dividiendo (3) por R, obtenemos,

$$T_2 - T_1 = mR\ddot\theta, \tag{4}$$

Por último nos queda estudiar las relaciones de ligadura entre x, y, y θ. Como la cuerda es ideal tenemos primero que,

$$x + y = \ell,$$

i.e.,

$$\ddot{x} = -\ddot{y}. \tag{5}$$

Por otra parte, de la condición que la cuerad no deslice con respecto al borde de la polea (i..e, exigiendo que la velocidad del punto P de la figura sea la misma en la cuerda que en la polea tenemos que

$$\dot{y} = R\dot\theta. \tag{6}$$

Sumando las ecuaciones (4) y (2) y restándole (1), y luego usando las condiciones de ligazón (5) y (6) obtenemos

$$\ddot{y} = \frac{2}{5}g, \qquad \ddot{x} = -\frac{2}{5}g, \qquad \text{y} \qquad \ddot\theta = \frac{2}{5}\frac{g}{R}.$$

Reemplazando estos valores en (1) y (2) obtenemos finalmente

$$T_1 = \frac{7}{5}mg, \qquad y \qquad T_2 = \frac{9}{5}mg.$$

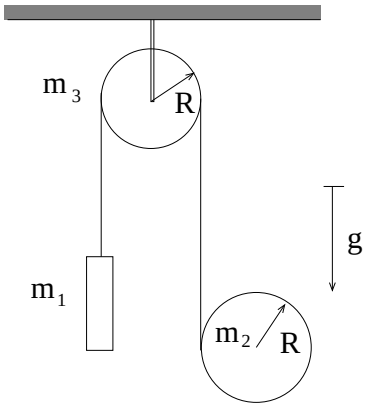
b) Considere luego el sistema de la figura que consiste en un bloque de masa $m_1 = m$, que se mueve verticalmente, que está ligado a un yo–yo (cilíndro macizo homogéneo de masa $m_2 = 3m$ y radio R, mediante una cuerda que pasa por una polea ideal ($m_3 = 0$), sujeta al techo. La cuerda enrollada alrededor del yo-yo como se indica en la figura. Determine:

a) Las tensiones de la cuerda, [2 puntos].

b) La aceleración del bloque de masa m_1. [0, 5 puntos].

c) La aceleración del centro de masa del yo–yo, [1 punto].

d) La aceleración angular del yo–yo (con respecto a su Centro de Masa). [0, 5 puntos].



Solución: Llamemos x e y las coordenadas del centro de masa del bloque de la izquierda y del disco de la derecha respectivamente (tal como se indica en la figura). Llamemos $\dot{\theta}$ la velocidad angular del cilindro de la derecha, considerada positiva en el sentido de los punteros del reloj. La polea de arriba esta vez es ideal y por o tanto las tensiones de la cuerda son iguales a ambos lados de la polea superior. Entonces, las ecuaciones de movimiento del centro de masa del bloque y del centro de masa del cilíndro de la derecha están dadas por,

$$mg - T = m\ddot{x}, \tag{7}$$

y

$$3mg - T = 3m\ddot{y}. \tag{8}$$

respectivamente. Por otra parte el torque que actúa con respecto al Centro de Masa del cilíndro de la derecha está dado por TR (entrando a la hoja de papel), y el momentum angular con respecto al centro de masa del cilíndro está dado por $L_{cr/CM} = [(3m)R^2/2]\ddot{\theta}$ (también entrando a la hoja de papel). Acá hemos usado que el momento de inercia de un disco homogéneo de masa M y radio R está dado or $I = MR^2/2$. Entonces, la ecuación de Torque con respecto al Centro de Masa para el cilíndro de la derecha está dada por,

$$TR = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}. \tag{9}$$

Por último tenemos que escribir la cuación de ligadura asociada a que la cuerda no desliza con respecto al cilíndro. Llamando Q al punto de tangencia (ver figura) donde la cuerda se despega del cilíndro, y llamando como es usual Q y Q' al punto de contacto visto desde la cuerda y desde el cilindro respectivamente, tenemos que la condición de rodadura está dada por,

$$v_Q = v_{Q'} = v_{CM} + vQ'/CM = \dot{y} - R\dot{\theta}.$$

Además como se trata de una cuerda ideal, $v_Q + \dot{x} = 0$. Así pues, tenemos

$$\ddot{x} + \ddot{y} - R\ddot{\theta} = 0. \tag{10}$$

Ahora de (7), (8) y (9) despejamos respectivamente $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ y $\ddot{\theta}$ en términos de T y reemplazamos estas variables en la condición de ligadura (10) y de este modo obtenemos que

$$T = mg.$$

Reemplazando este valor en (7), (8) y (9), obtenemos finalmente que

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = \frac{2}{3}g, \qquad \text{y,} \qquad \ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}.$$

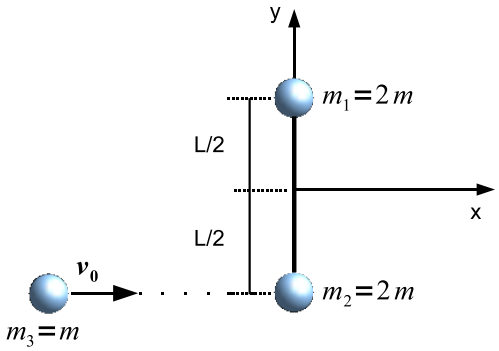
Problema 2.

Dos partículas idénticas de masas $m_1 = m_2 = 2\,m$ unidas por una barra de masa despreciable descansan sobre una superficie horizontal. Contra una de las partculas (m_2) se dispara una tercera partícula de masa m_3 (ver figura). Si el choque entre las partículas es elástico:

a) Despreciando el roce con la superficie horizontal, calcule las velocidades de m_2 y m_3 inmediatamente después del choque. [2 puntos].

b) Calcule la velocidad del CM del sistema compuesto por las partculas m_1 y m_2 luego después del choque. [2 puntos].

c) ¿Cuál es la velocidad angular del sistema (m_1–m_2), después del choque? [2 puntos].



Solución: Como es habitual, primero resolvemos el choque. Se trata de un choque unidimensional entre la masa $m_3 = m$ que viaja hacia la derecha con rapidez v_0 y que incide sobre $m_2 = 2m$ que se encuentra inicialmente en reposo. Como se trata de un choque elástico, la velocidad relativa entre as partículas antes y después del choque se conserva (y hay un cambio de fase), i.e.,

$$v_{2f} - v_{3f} = -(v_{2i} - v_{3i}) = v_0.$$

Por otra parte se conserva el momentum lineal del sistema m_2–m_3 en el choque, i.e.,

$$(2m)v_{2f} + mv_{3f} = mv_0.$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores para v_{2f} y v_{3f} respectivamente, encontramos,

$$v_{2f} = \frac{2}{3}v_0, \qquad \text{y} \qquad v_{3f} = -\frac{1}{3}v_0. \tag{11}$$

Entonces, justo después del choque tenemos que

$$v_1 = 0, \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{2}{3}v_0.$$

Entoncees, justo después del choque la velocidad del Centro de Masa del sistema m_1–m_2 está dado por

$$V_{cm} = \frac{2mv_1 + 2mv_2}{2m + 2m} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{3}v_0. \tag{12}$$

Luego del choque no hay fuerzas actuando sobe el sistema m_1–m_2, y por lo tanto la velocidad del centro de masa de este sistema se conserva, y está dada por (12) en la misma dirección que traía la partícula incidente. Con el objeto de encontrar la velocidad angular ω del sistema m_1–m_2 (medida positiva en la dirección contraria a los punteros del reloj, como se indica en la figura), notemos que si usamos como referencia un punto O en la línea de incidencia (ver figura), se conserva el momentum angular del sistema m_1–m_2 , puesto que la única fuerza que actúa sobre este sistema es la fuerza impulsiva que hace m_3 sobre el sistema al chocar. Esta fuerza es paralela a la línea de incidencia y por lo tanto el torque externo sobre el sistema m_1–m_2 es nulo. Así pues se conserva el momentum angular del sistea m_1–m_2 con respecto a O.Usando el Teorea de descomposición podemos escribir

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM,O} + \vec{L}_{cr/CM}. \tag{13}$$

Como el sistema m_1–m_2 está en reposo antes del choque, $L_O^{in} = 0$. Por otra parte, si llamamos $\hat{k}$ a la dirección que sale de la hoja, tenemos que después del choque,

$$\vec{L}_{CM,O} = -\frac{L}{2}(4m)v_{CM}\hat{k} = -\frac{L}{2}4m\frac{v_0}{3}\hat{k}. \tag{14}$$

Por otra parte, el momento de inercia del sistema m_1–m_2 está dados por $I = (2m)(L/2)^2 + (2m)(L/2)^2$, pues tanto m_1 com m_2 tienen masa $2m$ y cada una de ellas está a una distancia $L/2$ del centro de masa. Entonces, usando la regla de la mano derecha tenemos,

$$\vec{L}_{cr/CM} = I\omega\hat{k} = mL^2\omega\hat{k}. \tag{15}$$

Finalmente, de (13), 14), y 15), tenemos que

$$\vec{L}_O^{fin} = \left(-\frac{L}{2}4m\frac{v_0}{3} + mL^2\omega\right)\hat{k} = \vec{L}_O^{in} = O\hat{k}, \tag{16}$$

de donde finalmente obtenemos,

$$\omega = \frac{2}{3}\frac{v_0}{L}.$$

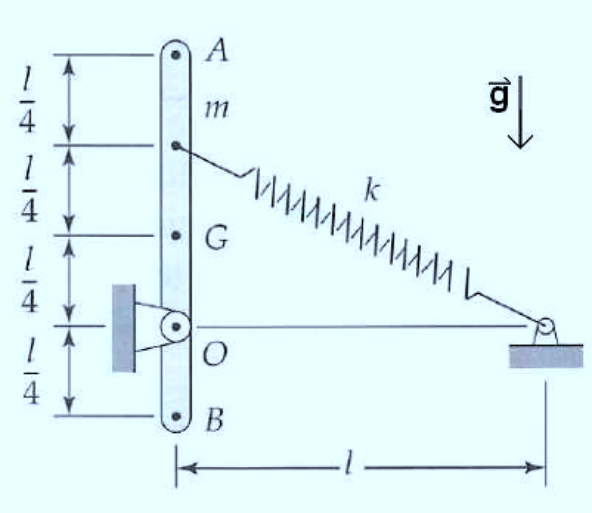
Problema 3.

Cuando la barra delgada y homogénea se encuentra en la posición vertical representada en la figura, el resorte se encuentra con en su largo natural.

(a) Hallar la aceleración angular de la barra cuando está girada 30° en sentido horario respecto a la posición de la figura. (Considere que el resorte tiene masa despreciable y es lo suficientemente rígido de manera tal que no se comba) [2 puntos].

(b) Si la barra se suelta desde el reposo desde la posición indicada en la pregunta anterior ($\theta = 30°$), determine la velocidad angular cuando la barra pasa por primera vez por la posición vertical mostrada en la figura. (Considere que el valor de la constante elástica del resorte k es tal que esto puede ocurrir) [2 puntos].

(c) Para la situación descrita en (b) determine la fuerza que realiza el pivote O sobre la barra cuando esta pasa por la posición mostrada en la figura [2 puntos].



Solución: Lo primero que haremos es encontrar el largo natural el resorte. Llamemos Q al punto fijo del resorte y P al punto donde el resorte se une a la barra. Llamemos O al punto que sujeta a la barra (i.e., donde la barra pivotéa). En la situación original, el triángulo OQP es rectángulo en O, y los lados son $OP = \ell/2$, $OQ = \ell$, y $PQ = \ell_o$ (el largo natural del resorte). Usando Pitágoras concluímos,

$$\ell_0^2 = \ell^2 + \frac{\ell^2}{4},$$

de donde $\ell_0 = \sqrt{5}\ell/2$. Cuando la barra está inclinada en 30° (como se muestra en la figura), el triángulo OPQ es ahora rectángulo en P (nótese que $\ell\cos 60^{circ} = l/2$. Si llammos $d = PQ$ al largo del resore en esa posición, por Pitágoras nuevamente tenemos,

$$d^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2,$$

de donde, $d = \sqrt{3}\ell/2$.

Con el objeto de calcular la aceleración $\ddot{\theta}$ de la barra en esa posición, usamos la ecuación de Torque con respecto al punto fijo O. Hay dos fuerzas que ejercen torque con respecto a O: el peso y la fuerza del resorte. Si consideramos como positivos los torques que entran en la hoja de papel, es relativamente simple calcular los torques que hacen estas dos fuerzas. Por una parte el peso está aplicado en el punto G (centro de gravedad), está dirigido en la dirección vertical, su magnitud es mg y el brazo es $(\ell/4)\cos 60° = \ell/8$. Por otra parte, como el triángulo OPQ es rectángulo en P, el resorte ejerce una fuerza perpendicular a la barra, de magnitud kd, y el brazo es justo $OP = \ell/2$. Entonces, el torque total sobre la barra, con respecto a O está dado por:

$$\tau_O = mg\frac{\ell}{8} - \frac{\ell}{2}kd \tag{17}$$

Usando el Teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de la barra con respecto a O, i.e., I_O está dado por

$$I_O = I_{CM} + m(OG)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{16}m\ell^2 = \frac{7}{48}m\ell^2.$$

La ecuación de torque con respecto a O está dada por $\tau_O = I_O\ddot{\theta}$, de modo que usando los resultados anteriores concluimos que

$$\ddot{\theta} = \frac{24}{7}\left(\frac{Mg}{4} - kd\right). \tag{18}$$

Para calcular la velocidad angular de la barra cuando cruza por la posición inicial (suponiendo que se deja libre desde el reposo en la posición $\theta = 30°$) usamos conservació de energía. Inicialmente la barra está en reposo, de modo que su energía cinética es nula. Si elegimos el nivel O como el nivel de referencia para la energía potencial, tenemos que la energía potencial de la barra en la posición inicial (i.e., cuando $\theta = 30°$), está dada por

$$V_g = mg\frac{\ell}{4}\cos 30° = mg\frac{\ell}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por otra parte la enrgía del resorte en esa posición está dada por

$$V_r = \frac{1}{2}k(d-\ell_0)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\frac{\ell}{2} - \sqrt{5}\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}k\ell^2(4-\sqrt{15}).$$

Entonces, la energía total en la posición inicial es,

$$E_1 = \frac{1}{4}k\ell^2(4-\sqrt{15}) + mg\ell\frac{\sqrt{3}}{8}. \tag{19}$$

Por otra parte, cuando la barra pasa por la posición vertical, el resorte está en su largo natural, de modo que $V_r = 0$. La energía potencial está dada por $V_g = mg\ell/4$, y por último, la energía cinética está dada por $I_O\dot{\theta}^2/2$. Entonces, la energía total en esta posición está dada por

$$E_2 = mg\frac{\ell}{4} + \frac{1}{2}\frac{7}{48}m\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{20}$$

Usando conservación de la energía, i.e., que $E_1 = E_2$ de (19) y (20) obtenemos,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12}{7}\left[\frac{g}{\ell}(\sqrt{3}-2) + \frac{2k}{m}(4-\sqrt{15})\right]. \tag{21}$$

Nótese que $\sqrt{3} < 2$, de modo que el primer término en (21) es negativo, de modo que k debe ser lo suficientemente grande para que el lado derecho de (21) sea positivo.

Por último llamemos N a la reacción del punto O sobre la barra. Usando la ecuación de movimiento del Centrode Masa de la barra tenemos que

$$N - mg = -m\frac{\ell}{4}\dot{\theta}^2.$$

y, usando (21) reagrupando términos y simplificando tenemos que,

$$N = \frac{mg}{7}(13 - 3\sqrt{3}) - \frac{6}{7}k\ell(4-\sqrt{15}).$$