PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
FIS1514 — Dinámica
Segundo Semestre 2025
Profesores: Rafael Benguria, Jaime Clark, Pablo León, Iván Muñoz,
Rodrigo Soto, Diego Teca y Alejandro Varas

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Examen

3 de diciembre 17:30-19:30 hrs

Reglas generales:

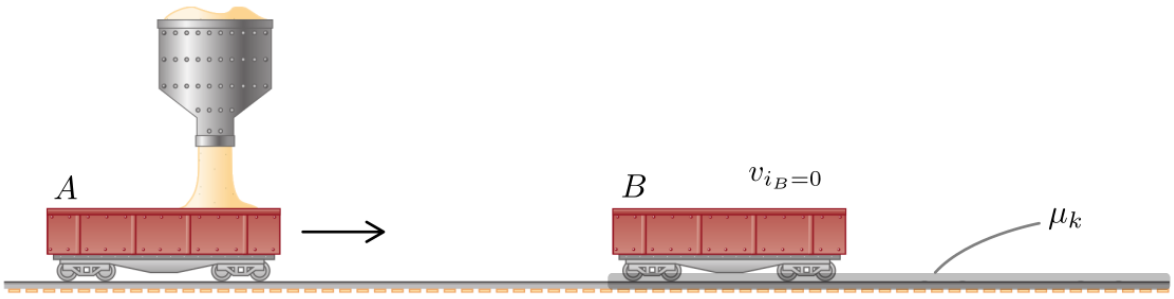
1. Escriba su nombre y RUT de manera clara y legible en cada hoja.
2. El tiempo para responder es 120 minutos.
3. Durante el desarrollo de la interrogación no hay consultas.
4. Está prohibido el uso de calculadoras, celulares, tablets, etc.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Nombre: _____

RUT: _____

Problema 1 [6 puntos]

Un vagón de ferrocarril de longitud L y masa m_0 cuando está vacío, se mueve con libertad sobre una vía horizontal mientras se carga con arena que proviene de un conducto estacionario a una razón constante $dm/dt = q$. Se sabe que el vagón se aproximaba al conducto con rapidez constante v_0.



(a) Determine la rapidez $v(t)$ del vagón a medida que se carga, en función de t, m_0, y q. **(1 pts)**.

(b) Determine la masa final del vagón cargado m_f, en términos de m_0, L, q, y v_0. **(1 pts)**.

(c) Determine el tiempo t_f que tarda el vagón en quedar completamente cargado, en términos de m_0, L, q, y v_0. **(1 pts)**.

(d) Determine la rapidez final v_f del vagón cargado en términos de m_0, L, q, y v_0. **(1 pts)**.

(e) Considere que el vagón recién cargado se mueve con rapidez v_f y se acopla ($e = 0$) con otro vagón cargado, con igual masa total m_f, que se encuentra en reposo ($v_{i_B} = 0$) con las ruedas aseguradas ($\mu_k \neq 0$). Determine la rapidez de ambos vagones justo después de acoplarse y el tiempo que tardan en detenerse. **(2 pts)**.

Solución:

(a) Aplicando el principio impulso momentum en la dirección horizontal, se tiene que se conserva el momentum (no hay fuerzas impulsivas), es decir:

$$m_0 v_0 = m(t)v(t) = (m_0 + qt)v(t) \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

por lo tanto:

$$\boxed{v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + qt}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

(b) Buscamos $m_f = m_0 + qt_f$. Dado que $v(t) = dx/dt$, se tiene que:

$$\frac{m_0 v_0}{m_0 + qt} dt = dx \qquad \textbf{(0,25pts)}$$

Integrando el lado izquierdo entre m_0 y $m_0 + qt_f$, y el lado derecho entre 0 y L, obteniendo:

$$\frac{m_0 v_0}{q} \ln\left(\frac{m_0 + qt_f}{m_0}\right) = L \qquad \textbf{(0,25pts)}$$

Despejando $m_f = m_0 + qt_f$:

$$\boxed{m_f = m_0 e^{Lq/m_0 v_0}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

(c) La masa total, está dada por $m_f = m_0 + qt_f$ **(0.5 pts)**, por lo tanto despejamos t_f:

$$\boxed{t_f = \frac{m_0}{q}\left(e^{Lq/m_0 v_0} - 1\right)} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

(d) Evaluamos el tiempo final t_f en la espresión de la velocidad en función del tiempo **(0.5 pts)**:

$$\boxed{v_f = \frac{v_0}{e^{Lq/m_0 v_0}}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

(e) Usando conservación de momentum en la colisión se tiene que:

$$m_f v_f = (m_f + m_f) v_t \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

donde v_t es la rapidez final de ambos vagones. Luego:

$$\boxed{v_t = \frac{v_f}{2}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Usndo el principio impulso momentum lineal a lo largo del trayecto de los dos vagones acoplados (solo uno de ellos con roce):

$$2m_f v_t - \mu_k m_f g \Delta t = 0 \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Despejando Δt y usando que $v_t = v_f/2$:

$$\boxed{\Delta t = \frac{v_f}{\mu_k g}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

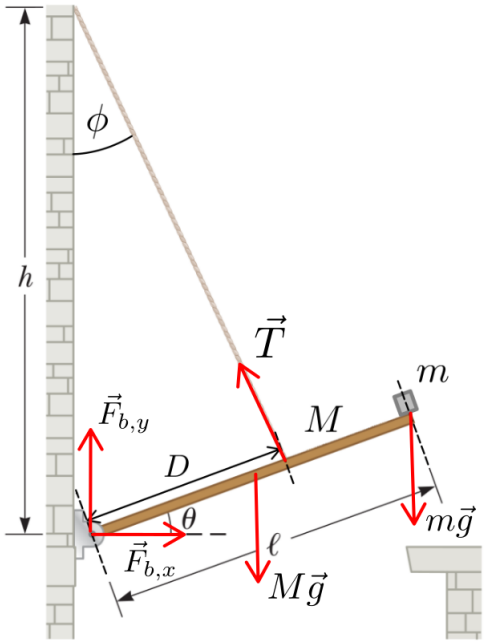
Problema 2 [6 puntos]

Un puente levadizo se encuentra detenido formando un ángulo θ por encima de la horizontal. Un bloque de masa m se encuentra fijo en el extremo del puente. El puente es uniforme y tiene una longitud ℓ y una masa M. El cable de elevación está unido al puente a una distancia D de la bisagra (en el lado del castillo) y al muro en un punto situado a una altura h por encima del nivel de la bisagra y hace un ángulo ϕ con respecto al muro, tal como se muestra en la figura. Determine:

(a) La tensión en el cable **(2 pts)**.

(b) La componente de la fuerza horizontal que actúa sobre el puente en la bisagra **(2 pts)**.

(c) La componente de la fuerza vertical que actúa sobre el puente en la bisagra **(2 pts)**.



Solución: En la figura se ven las fuerzas que actúan sobre el puente.

a) Lamaremos τ_m, τ_M, τ_T a los torques que ejerce la fuerzas que actuan sobre la masa m, la masa del puente M

y la tensión T, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_m &= \ell\,(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \times (-mg\vec{y}) \\
&= -mg\ell\cos(\theta)\hat{z} \quad \text{(0,3 puntos)} \\
\vec{\tau}_M &= \frac{\ell}{2}\,(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \times (-Mg\hat{y}) \\
&= -\frac{Mg\ell}{2}\cos(\theta)\hat{z} \quad \text{(0,3 puntos)} \\
\vec{\tau}_T &= D\,(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \times T\,(-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}) \\
&= TD\underbrace{(\cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta))}_{\cos(\theta-\phi)}\hat{z} \quad \text{(0,4 puntos)}
\end{aligned}$$

Sumando los torques y considerando que la barra esta en reposo:

$$\sum \tau = TD\,(\cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta)) - \left(m + \frac{M}{2}\right) g\ell\cos(\theta) = 0 \quad \text{(0,5 puntos)} \tag{1}$$

Despejando para la tensión se encuentra:

$$T = \frac{(2m+M)g\ell\cos(\theta)}{2D\,(\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)} = \frac{(2m+M)g\ell}{2D}\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta-\phi)} \quad \text{(0,5 puntos)} \tag{2}$$

(b) La componente horizontal de las fuerzas que actúan sobre el puente corresponde a la fuerza que hace la bisagra sobre el puente y la componente horizontal de la tensión.

$$\sum F_x = F_{b,x} - T_x = F_{b,x} - T\sin(\phi) = 0 \quad \text{(1 punto)} \tag{3}$$

Despejando se tiene:

$$F_{b,x} = T\sin(\phi) \quad \text{(1 punto)} \tag{4}$$

(c) La componente vertical de las fuerzas que actúan sobre el puente corresponde a la fuerza que hace la bisagra sobre el puente, la componente vertical de la tensión, el peso del puente y el peso del bloque de masa m.

$$\sum F_y = F_{b,y} + T_y - F_{M,y} - F_{m,y} = F_{b,y} + T\cos(\phi) - Mg - mg = 0 \quad \text{(1 punto)} \tag{5}$$

Despejando tenemos:

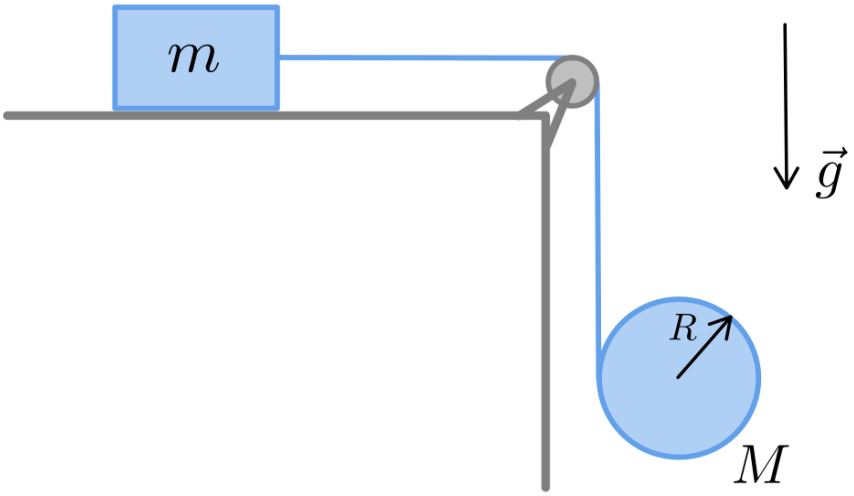
$$F_{b,x} = (m+M)g - T\cos(\phi) \quad \text{(1 punto)} \tag{6}$$

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Problema 3 [6 puntos]

Considere el sistema formado por un bloque de masa m que se mueve sobre la mesa horizontal lisa (no hay roce) y un cilindro macizo de masa M y radio R que desciende verticalmente. El bloque y el cilindro están unidos por una cuerda ideal fija al bloque de masa m, que pasa por una polea ideal (sin masa), y que está enrollada alrededor del cilindro (como un carrete de hilo), tal como se muestra en la figura.



(a) Determine la tensión de la cuerda. **(4 pts)**.

(b) Determine la aceleración vertical del centro de masa del cilindro. **(1 pts)**.

(c) Determine la aceleración angular del cilindro. **(1 pts)**.

Solución:

a) Sea a la aceleración del bloque de masa m, se tiene entonces que:

$$\sum F_x = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = ma} \qquad \textbf{(0,75pts)} \tag{7}$$

Sea a_c la aceleración del centro de masas del cilindro de masa M, entonces:

$$\sum F_y = Ma_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{Mg - T = Ma_c} \qquad \textbf{(0,75pts)} \tag{8}$$

La tensión hace un torque de magnitud TR doble el cilindro, luego:

$$\sum \tau = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2T}{MR}} \qquad \textbf{(1,0pts)} \tag{9}$$

Finalmente, de la condición de ligadura, tenemos que:

$$-a + a_c - R\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = a_c - R\alpha} \qquad \textbf{(0,5pts)} \tag{10}$$

Ahora resolvemos el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Usando (10) en (7):

$$T = (a_c - R\alpha)m \tag{11}$$

Y usando (8) y (9) en (11) y despejando T:

$$T = \left(\frac{Mg - T}{M} - R\frac{2T}{MR}\right)m \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{Mmg}{M + 3m}} \qquad \textbf{(1,0pts)} \tag{12}$$

(b) Usando (12) en (8):

$$a_c = \frac{Mg - \left(\frac{Mmg}{M+3m}\right)}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_c = \left(\frac{M + 2m}{M + 3m}\right)g} \qquad \textbf{(1,0pts)}$$

(c) Usando (12) en (9):

$$\alpha = \frac{2}{MR}\left(\frac{Mmg}{M + 3m}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2mg}{R(M + 3m)}} \qquad \textbf{(1,0pts)}$$

Nombre: _____

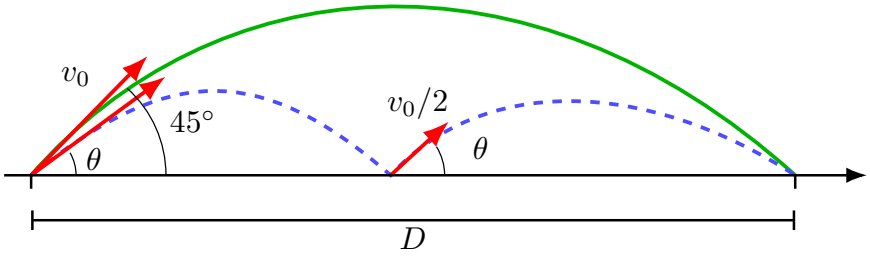
RUT: _____ N lista: _____

Problema 4 [6 puntos]

Cuando los jugadores de beisbol lanzan la pelota desde lejos, dejan que rebote una vez antes de llegar a destino. Suponga que el ángulo al que una pelota rebotada deja el suelo es el mismo que el ángulo al que el jardinero la lanzó, como se muestra en la figura, pero la rapidez de la pelota después del rebote es la mitad de la que tenía antes del rebote. Desprecie el roce de la pelota con el aire.

(a) Suponga que la pelota siempre se lanza con la misma rapidez inicial v_0. ¿A qué ángulo θ el jardinero debe lanzar la pelota para hacer que recorra la misma distancia D con un rebote (trayectoria segmentada) que una bola lanzada en un ángulo de 45.0^o sin rebote (trayectoria sólida)? **(3 pts)**.

(b) Determine la relación del intervalo de tiempo para el lanzamiento con un rebote al tiempo de vuelo para el lanzamiento sin rebote. **(3 pts)**.



Indicación: Le puede ser útil que $\sin(53{,}1^o) = \cos(36{,}9^o) = 4/5$ y $\sin(36{,}9^o) = \cos(53{,}1^o) = 3/5$

(a) La posición vertical de la pelota está dada por:

$$y(t) = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Sea $t = T$ el tiempo que la pelota demora en tocar el suelo, entonces:

$$y(T) = v_{y0}T - \frac{1}{2}gT^2 = 0 \quad \text{y por lo tanto} \quad \boxed{T = \frac{2v_{0y}}{g}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

El alcance horizontal de la pelota está dado por:

$$R = x(T) = v_{0x}T$$
$$R = x(T) = v_0 \cos\alpha \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right)$$
$$R = x(T) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

donde α es el ángulo de lanzamiento con la horizontal.

Para el caso de la trayectoria sólida (lanzamiento sin rebote) tenemos que $\alpha = 45^{\text{o}}$ y:

$$D = \frac{v_0^2 \sin\left(2 \cdot 45^{\text{o}}\right)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Para el caso de lanzamiento con rebote (linea segmentada) tenemos que:

$$D = R_1 + R_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} + \frac{(v_0/2)^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{5}{4}\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Usando las dos ecuaciones anteriores tenemos que:

$$D = \frac{v_0^2}{g} = \frac{5}{4}\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \implies \boxed{\sin 2\theta = \frac{4}{5}} \implies 2\theta = 53{,}1^{\text{o}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Así encontramos que:

$$\boxed{\theta \approx 26{,}5^{\text{o}}} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

(b) Escribamos nuevamente la ecuación para el tiempo de vuelo:

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Para el lanzamiento sin rebote tenemos:

$$T_s = \frac{2v_0 \sin 45^{\text{o}}}{g} = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$

Para el lanzamiento con rebote tenemos:

$$T_c = T_1 + T_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} + \frac{2(v_0/2)\sin\theta}{g} = \frac{3v_0 \sin\theta}{g} \qquad \textbf{(1pts)}$$

Así tenemos que:

$$\frac{T_c}{T_s} = \frac{\dfrac{3v_0 \sin\theta}{g}}{\dfrac{\sqrt{2}v_0}{g}} = \frac{3\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{(1,5pts)}$$

Hasta aquí el puntaje total, si consiguen lo que viene son pts extras

Usando la identidad trigonométrica que:

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \qquad \textbf{(0,25pts)}$$

De esta forma tenemos que:

$$\frac{T_c}{T_s} = \frac{3\sin\theta}{\sqrt{2}} \implies \boxed{\frac{T_c}{T_s} = \frac{3}{\sqrt{10}} < 1} \qquad \textbf{(0,5pts)}$$