PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
**FIS1514 / ICE1514 — Dinámica**
Segundo Semestre 2020

# Pauta Interrogación 01

# Problema 1

## 1.1.

Los paquetes que viajan en la cinta transportadora caen en un carro de largo $D = 1\ m$ desde una altura $H = 3\ m$, tal como muestra la figura. Si la cinta transportadora se mueve a una velocidad constante de $v_C = 2\ m/s$, determine la menor y mayor distancia $R$ a la cual la parte $A$ del carro se debe poner desde la cinta transportadora para que los paquetes caigan en el carro.

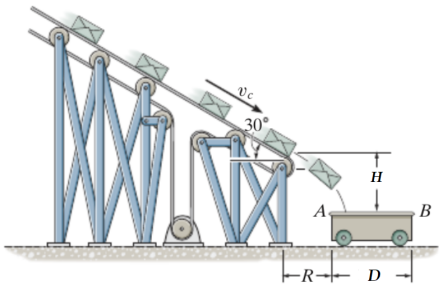



Figura 1: Problema 1.1

**SOLUCIÓN**

Para el eje vertical (asumiendo positivos hacia abajo) se tiene que la componente de la velocidad inicial es $v_{0y} = 2\sin(30) = 1\,m/s$. Las posiciones verticales iniciales y finales son $s_{0y} = 0$ y $s_y = 3\,m$, respectivamente.

$$s_y = s_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}\left(a_{cy}\right)t^2$$
$$3 = 0 + 1 \times t + \frac{1}{2}\left(9{,}8\right)t^2$$

Por lo tanto, el tiempo que se demora es igual a:

$$t = 0{,}6867\,s$$

Para el eje horizontal (positivos hacia la derecha), la componente de la velocidad es $v_{0x} = 2\cos(30) = 1{,}732\,m/s$ y la posición inicial es $s_{0x} = 0$. Si $s_x = R$, entonces,

$$s_x = s_{0x} + v_{0x}t$$
$$R = 0 + 1{,}732\left(0{,}6867\right) = 1{,}19\,m$$

Si $s_x = R + 1$, entonces,

$$s_x = s_{0x} + v_{0x}t$$
$$R + 1 = 0 + 1{,}732\left(0{,}6867\right) = 1{,}19\,m$$
$$R = 0{,}189\,m$$

Es decir, $R_{min} = 0{,}19\,m$ y $R_{max} = 1{,}19\,m$.

## 1.2.

En un partido de fútbol, un jugador realiza una *chilenita* justo cuando se encuentra de frente al arco a una distancia $d$. Desgraciadamente el tiro impacta en el travesaño del arco. El tiro realizado por el jugador fue a una altura $h_0 = 0{,}2d$, con *ángulo de elevación* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. El arco tiene una altura $H = 0{,}3d$. Determine la rapidez inicial $v_0$ con que el jugador disparó el balón.

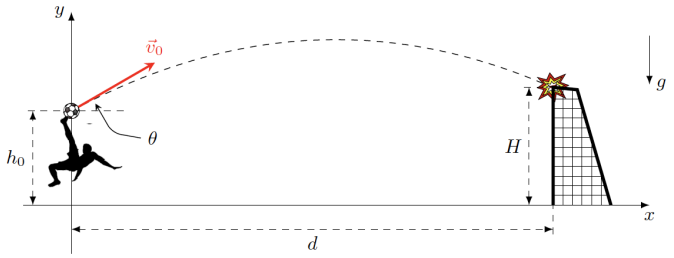



Figura 2: Problema 1.2

**SOLUCIÓN**

Las ecuaciones de movimiento del balón son

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0\cos\theta)t \\ y(t) &= h_0 + (v_0\sin\theta)t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0\cos\theta \\ \dot{y}(t) &= v_0\sin\theta - gt\ . \end{aligned}$$

La rapidez inicial $v_0$ se obtiene usando que en algún instante de tiempo $t_*$ el balón golpea en el travesaño ($x = d, y = H$). Reemplazando en las ecuaciones de posición dadas obtenemos:

$$\begin{aligned} d &= (v_0\cos\theta)t_* \\ H &= h_0 + (v_0\sin\theta)t_* - \frac{g}{2}t_*^2\ . \end{aligned}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas $v_0$ y $t_*$. Podemos resolver despejando $v_0$ de la primera ecuación y reemplazando en la segunda:

$$t_* = \frac{d}{v_0\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad H = h_0 + d\tan\theta - \frac{gd^2}{2v_0^2(\cos\theta)^2}$$

que despejando $v_0$ conduce a

$$v_0 = \frac{d}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(h_0 + d\tan\theta - H)}} = d\sqrt{\frac{g}{h_0 - H + d}} = \frac{\sqrt{10}}{3}\sqrt{gd}\ .$$

## 1.3.

Desde un plano inclinado con un ángulo $\beta$ se lanza una piedra con velocidad inicial $v_0$ perpendicularmente al plano. ¿ A qué distancia del punto de lanzamiento cae la piedra?

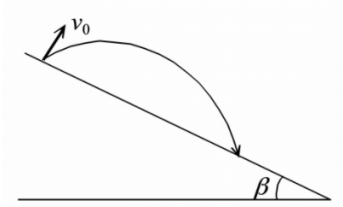



Figura 3: Problema 1.3

**SOLUCIÓN**

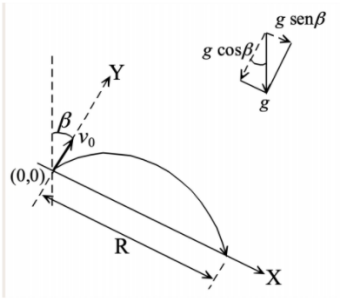



Figura 4: Problema 1.3 Solución

Sobre la piedra actúa la aceleración $g$. En el eje $X$ se tiene que:

$$v_x = g \sin \beta t$$

entonces:

$$x = \frac{1}{2} g \sin \beta t^2$$

En el eje $Y$ se tiene que:

$$v_y = v_0 - g \cos \beta t$$

entonces:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g \cos \beta t^2$$

La piedra vuelve al plano inclinado cuando $y = 0$, entonces se tiene que:

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2} g \cos \beta t^2$$

$$t = \frac{2 v_0}{g \cos \beta}$$

Finalmente:

$$x = \frac{1}{2} g \sin \beta (\frac{2 v_0}{g \cos \beta})^2 = \frac{2 v_0^2 \sin \beta}{g \cos^2 \beta}$$

que es la distancia del punto de lanzamiento o el alcance.

# Problema 2

## 2.1.

Un bombardero que vuela con una velocidad horizontal $v_{1x}$ a una altura $h$ apunta para dar de lleno a un tren que se mueve a una velocidad constante $v_{2x}$ en el mismo sentido y en el mismo plano vertical que el avión. Determine el ángulo $\theta$ que debe formar la visual al blanco con la horizontal en el instante que debe soltarse la bomba.

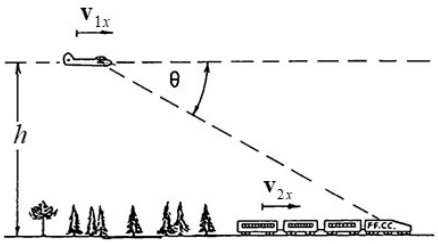



Figura 5: Problema 2.1

**SOLUCIÓN**

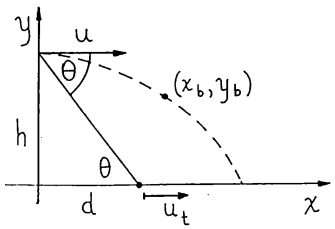



Figura 6: Problema 2.1 Solución

Sea $(x_b, y_b)$ las coordenadas de la bomba y $x_t$ la coordenada del tren.Sea $h$ la altura del avión, $u$ la velocidad del avión u $u_t$ la velocidad del tren. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la bomba son

$$x_b = v_{1x}t$$

$$y_b = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Para el tren se tiene

$$x_t = d + v_{2x}t$$

donde $d$ es la posición original del tren, es decir $x_t(0) = d$. El tiempo $T$ que tarda la bomba en caer es tal que $y_b(T) = 0$, es decir

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Cuando la bomba impacta el tren se tiene que $x_b(T) = x_t(T)$. Entonces

$$d + v_{2x}T = v_{1x}T$$

por lo que la distancia $d$ es

$$d = (v_{1x} - v_{2x})\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Finalmente

$$\tan(\theta) = \frac{h}{d}$$

es decir

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{h}{v_{1x} - v_{2x}}\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$$

## 2.2.

Una persona deja caer una piedra desde lo alto de un puente hacia el río que fluye debajo. Si el viento genera una aceleración horizontal constante de 2 $m/s^2$ y después de T $s$ transcurridos la persona escucha la piedra caer al agua, determine la distancia respecto a la base del puente a la que llega la piedra. Considere la velocidad del sonido como 340 $m/s$ y $g = 10\ m/s^2$.

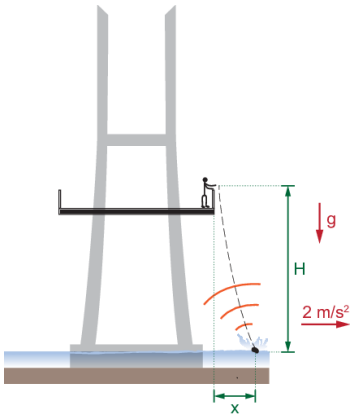



Figura 7: Problema 2.2

**SOLUCIÓN**

El movimiento en el eje Y es de tipo caída libre con $V_{0y} = 0$. El cálculo del tiempo se puede dividir en dos partes:

1. La piedra desciende hasta chocar con el agua
2. El sonido avanza desde el agua hasta la persona en el puente

Entonces:

$$t = t_1 + t_2 = T\ s$$

Para la primera parte se tiene que:

$$y = H - 1/2gt^2$$

Con H la altura del puente. Cuando la piedra choca con el agua, se cumple que:

$$0 = H - 0{,}5(10)t_1^2$$

$$H = 5t_1^2$$

En la segunda parte, el sonido va con velocidad constante y en línea recta:

$$H = v_{sonido}t_2 = 340t_2$$

Igualando las dos ecuaciones, se tiene que:

$$5t_1^2 = 340t_2$$

Además:

$$t_1 + t_2 = T \rightarrow t_2 = T - t_1$$

Reemplazamos:

$$5t_1^2 - 340(T - t_1) = 0$$

Entonces, $t_1 = 7{,}2\,s$ y $t_2 = 0{,}77\,s$ (para $T = 8\ s$). El movimiento horizontal de la piedra se rige por la aceleración constante $a_x = 2\,m/s^2$. Entonces:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Se asume que $x_0 = 0$ y que $v_{0x} = 0$:

$$x = \frac{1}{2}a_x t_1^2$$

$$x = \frac{1}{2}(2)(7{,}22)^2 = 51{,}84\,m$$

# Problema 3

## 3.1.

Suponga que desea cruzar un río en un bote y alcanzar el punto de la rivera opuesta justo en frente de usted siguiendo una trayectoria rectilínea. Si la velocidad del bote relativa al agua es $\overrightarrow{v} = 10\ km/h$ y el río transporta agua a $\overrightarrow{u} = 5\ km/h$. ¿En qué dirección (ángulo) debería lanzar el bote inicialmente para lograr llegar al punto que desea?

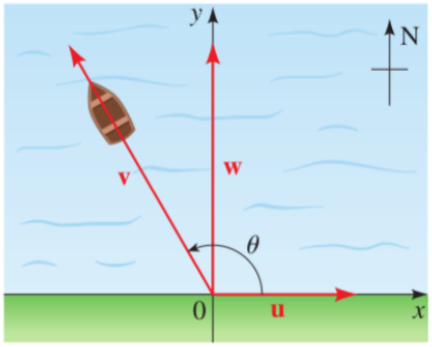



Figura 8: Problema 3.1

**SOLUCIÓN**

Sea $\overrightarrow{u} = 5\hat{i}\,m/h$ la velocidad del río y sea

$$\overrightarrow{v} = \left(10\cos\theta\hat{i} + 10\sin\theta\hat{j}\right)\ m/h$$

La velocidad del lanzamiento del bote. De esta manera, la velocidad del bote relativa a la orilla es:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (5 + 10\cos\theta)\,\hat{i} + 10\sin\theta\hat{j}\,m/h$$

Dado que se desea alcanzar la rivera opuesta en línea recta, la componente horizontal de $\overrightarrow{w}$ debe ser nula, es decir:

$$5 + 10\cos\theta = 0$$
$$\cos\theta = -1/2$$
$$\theta = 120°$$

## 3.2.

Dos lanchas parten de un amarre en $t = 0$ según se indica en la figura. La lancha $A$ navega con una rapidez constante $v_A = 24\ km/h$ y la lancha $B$ navega con una rapidez constante $v_B = 32\ km/h$. Determine la velocidad de la lancha $B$ con respecto a la lancha $A$.

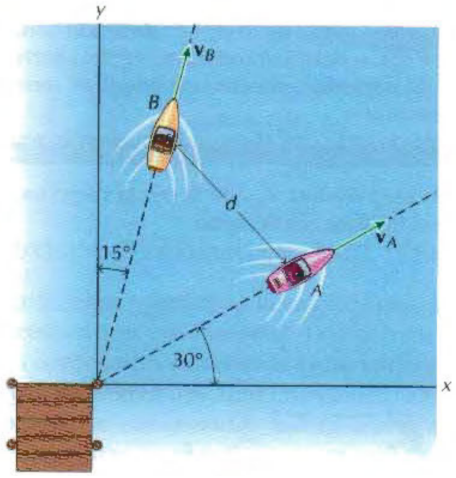



Figura 9: Problema 3.2

**SOLUCIÓN**

La velocidad de la lancha $B$ con respecto a la lancha $A$ está dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{BA} &= \vec{v}_B - \vec{v}_A \\
\vec{v}_{BA} &= [v_B \cos(75°) - v_A \cos(30°)]\hat{x} + [v_B \sin(75°) - v_A \sin(30°)]\hat{y} \\
\vec{v}_{BA} &= \left[\left(\frac{32000}{3600}\ m/s\right)\cos(75°) - \left(\frac{24000}{3600}\ m/s\right)\cos(30°)\right]\hat{x} \\
&\quad + \left[\left(\frac{32000}{3600}\ m/s\right)\sin(75°) - \left(\frac{24000}{3600}\ m/s\right)\sin(30°)\right]\hat{y} \\
\vec{v}_{BA} &= -3{,}47\ m/s\,\hat{x} + 5{,}25\ m/s\,\hat{y}
\end{aligned}$$

### 3.3.

El auto A se mueve con rapidez $v = 18$ km/h en la dirección indicada por la flecha, y está acelerando con $a = 3\text{m/s}^2$. Determine velocidad y aceleración del auto A relativamente al observador B que se encuentra en el punto indicado de la rueda panorámica, la cual rota con velocidad angular constante $\omega = 3$ revoluciones por minuto.

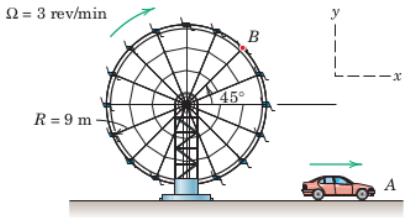



Figura 10: Problema 3.3

**SOLUCIÓN**

La velocidad y aceleración pedidas son respectivamente

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

$$\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B$$

El punto B de la rueda se mueve con módulo de velocidad

$$v_B = \omega R = 3\frac{2\pi}{60\text{s}}9 = \frac{9\pi}{10}\ m/s$$

cuyas componentes cartesianas son, debido a la inclinación de 45 grados que ese vector hace con el eje horizontal

$$(\mathbf{v}_B = \frac{9\pi}{10\sqrt{2}}, -\frac{9\pi}{10\sqrt{2}})\ m/s$$

que restituyen

$$\mathbf{v}_{A/B} = (\frac{18}{3{,}6} - \frac{9\pi}{10\sqrt{2}}, \frac{9\pi}{10\sqrt{2}})\ m/s$$

La aceleración del punto B apunta al centro de la rueda, ya que $\omega$ es constante, y vale

$$a_B = \omega^2 R = \frac{9\pi^2}{100}\ m/s^2$$

Debido a la inclinación de 45 grados sus componentes entonces valen

$$\mathbf{a}_B = (-\frac{9\pi^2}{100\sqrt{2}}, -\frac{9\pi^2}{100\sqrt{2}})\ m/s^2$$

Por tanto la aceleración de A respecto a B finalmente es

$$\mathbf{a}_{A/B} = (3 + \frac{9\pi^2}{100\sqrt{2}}, \frac{9\pi^2}{100\sqrt{2}})\ m/s^2$$

# Problema 4

## 4.1.

Un tren de carga viaja a una velocidad $v = 60(1 - e^{-t})$ m/s, donde $t$ es el tiempo transcurrido en segundos. Determine la distancia recorrida a los 3 segundos, y la aceleración en ese momento.

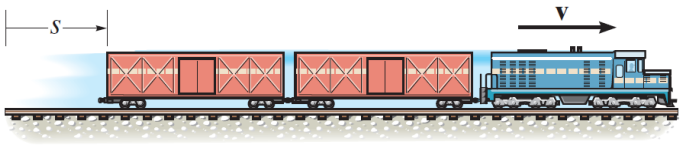



Figura 11: Problema 4.1

**SOLUCIÓN**

La velocidad con respecto al tiempo esta dada por

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

Donde $v$ es la velocidad, $ds$ es el cambio de distancia, y $dt$ es el cambio del tiempo. La distancia recorrida $s$ se puede obtener al integrar la ecuación de velocidad.

$$\begin{aligned} vdt &= ds \\ \int_0^s ds &= \int_0^3 vdt \\ \int_0^s ds &= \int_0^3 60(1 - e^{-}t)dt \\ (s - 0) &= 60[((3 + e^{-3}) - (0 + e^{0})] \\ s &= 123m \end{aligned}$$

Para la aceleración usamos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d[60(1 - e^{-t})]}{dt} \\ &= 60\frac{d[(1 - e^{-t})]}{dt} \\ &= 60e^{-t} \end{aligned}$$

Al substituir por los tres segundos:

$$a = 2{,}99\ m/s^2$$

## 4.2.

La aceleración de un objeto que se mueve en línea recta, alejándose de un punto $O$ es inversamente proporcional a la distancia a tal punto y en el sentido opuesto al de su movimiento. Si en $t = 0$ s la distancia del objeto al punto $O$ es $x_0 = 2$ m, su rapidez es $v_0 = 4$ m/s y su aceleración $a_0 = -3$ m/s$^2$, determine su rapidez a una distancia $x_1 = 3$ m del punto $O$.

**SOLUCIÓN**

De acuerdo a la descripción del problema, la aceleración está dada por $a(x) = -c/x$, donde $c$ es una constante que puede ser determinada a partir de las condiciones iniciales:

$$c = -a_0 x_0 = -(-3 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m}) = 6 \text{ m/s}^2$$

Como la aceleración es una función de la posición, la rapidez estará dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x_1} a(x)\,dx = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{-c}{x}\right) dx = v_0^2 - 2c\,\ln(x_1/x_0)$$

Por lo tanto, como se pregunta por la rapidez cuando el objeto se está alejando de $O$, se tiene que:

$$v = +\sqrt{v_0^2 - 2c\,\ln(x_1/x_0)} = 3{,}34 \text{ m/s}.$$

## 4.3.

Una empresa japonesa está diseñando un fuego artificial gigante. El aparato en cuestión genera una aceleración vertical que se ajusta a $a(t) = (18 - 6\sqrt{t})m/s^2$ hasta que se le acaba el combustible en $t = 9s$. Debido al gran peso del aparato, una lanzadera le confiere una velocidad vertical inicial $v_0 \neq 0$. Asuma que el aparato inicia su vuelo desde $z_0 = 0$. Al término del combustible el aparato se encuentra a $z_1 = 450\ m$ de altura. Determine la velocidad inicial $v_0$ que le confiere la lanzadera.

**SOLUCIÓN**

La velocidad es

$$v(t) \;=\; \int \mathrm{d}t\; a(t) \;=\; v_0 + 18t - 4t^{\frac{3}{2}}\ ,$$

donde la constante de integración es dada por $v(t = 0) = v_0$. El desplazamiento es

$$z(t) \;=\; \int \mathrm{d}t\; v(t) \;=\; v_0 t + 9t^2 - \frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}}\ ,$$

donde la constante de integración es dada pot $z(t = 0) = 0$. Sabemos que $z(t = 9) = 450m$, por lo que

$$450 \;=\; 9v_0 + 9^3\frac{8}{5} \times 3^5 \quad \Rightarrow \quad v_0 \;=\; 50 - 9^2 + \frac{8}{5} \times 3^3 \;=\; 43{,}2 - 31 \;=\; 12{,}2m/s\ .$$

## 4.4.

La gráfica muestra la aceleración de un avión durante el despegue. El avión comienza desde el reposo. ¿Cuál es la distancia recorrida por el avión cuando se eleva en $t = 30\,\text{s}$?

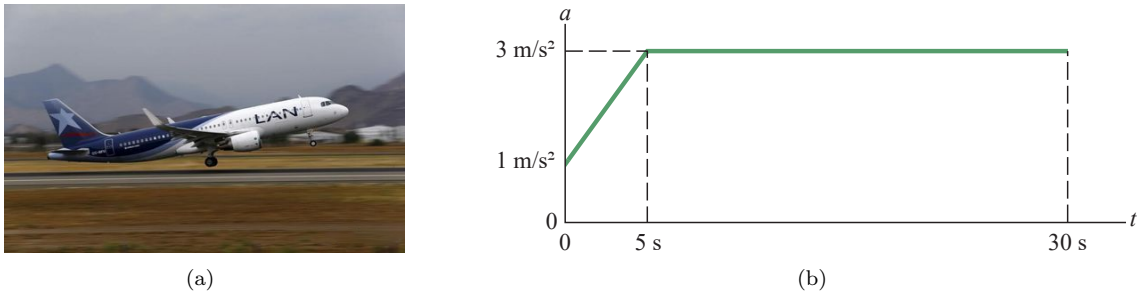



Figura 12: Problema 4.4

**SOLUCIÓN**

Debido a que es necesario integrar dos veces un trapecio, el método gráfico no es del todo conveniente. La expresión de la aceleración en el primer tramo es:

$$a^I(t) = 1 + \frac{2}{5}t$$

Integrando dos veces y utilizando las condiciones iniciales $u_0 = 0$ y $v_0 = 0$, se obtiene:

$$v^I(t) = t + \frac{t^2}{5}u^I(t) \qquad\qquad = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{15}$$

Al término del primer tramo, la rapidez y posición del avión son:

$$v^I(5) = 5 + \frac{5^2}{5} = 10\,\text{m/s}$$
$$u^I(5) = \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{15} = \frac{125}{6}\,\text{m}$$

En el segundo tramo la aceleración es constante, y con ello:

$$v^{II}(t) = 3\,t + v_0^{II}$$
$$u^{II}(t) = \frac{3}{2}t^2 + v_0^{II}\,t + u_0^{II}$$

Exigiendo compatibilidad de velocidad y posición entre ambos intervalos:

$$\left.\begin{array}{l} v^{II}(5) = 10 \\ u^{II}(5) = \frac{125}{6} \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} v_0^{II} = -5\,\text{m/s} \\ u_0^{II} = \frac{25}{3}\,\text{m} \end{array}$$

Es decir, la ecuación de posición en el segundo tramo es:

$$u^{II}(t) = \frac{3}{2}t^2 - 5\,t + \frac{25}{3}$$

Finalmente, la distancia recorrida por el avión es:

$$\Delta u_{0\to 30} = u(30) - u(0) = \frac{3625}{3} - 0 = 1208{,}3\,\text{m}$$

## 4.5.

Un sistema de navegación mide la aceleración de un vehículo entre $t = 0$ y $t = 6\,\mathrm{s}$, tras lo cual determina que es igual a:

$$a\,(t) = 2 + 0{,}1\,t\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

En $t = 0$ el vehículo se encuentra en la posición $u = 240\,\mathrm{m}$ y tiene rapidez $v = 42\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. ¿Cuál es la posición y la velocidad en $t = 6\,\mathrm{s}$?

**SOLUCIÓN**

Integramos dos veces por separación de variables para obtener la velocidad y la posición:

$$v\,(t) = 2\,t + \frac{1}{20}t^2 + C_1$$
$$u\,(t) = t^2 + \frac{1}{60}t^3 + C_1\,t + C_2$$

Utilizando las condiciones iniciales $v_0 = 42\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ y $u = 240\,\mathrm{m}$ podemos obtener las constantes de integración, con lo que:

$$v\,(t) = 2\,t + \frac{1}{20}t^2 + 42$$
$$u\,(t) = t^2 + \frac{1}{60}t^3 + 42\,t + 240$$

Finalmente, la velocidad y la posición en el instante pedido son:

$$v\,(6) = (2)\,(6) + \frac{1}{20}\left(6^2\right) + 42 = \frac{279}{5} = 55{,}8\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$
$$u\,(6) = 6^2 + \frac{1}{60}\left(6^3\right) + (42)\,(6) + 240 = \frac{2658}{5} = 531{,}6\,\mathrm{m}$$

# Problema 5

## 5.1.

El cilindro $B$ tiene una masa $m$ y se mueve usando la cuerda y el sistema de poleas mostrado en la figura. Determine la magnitud de la fuerza $F$ en función de la posición vertical $y$ del cilindro para que cuando $F$ es aplicada el cilindro se eleve con aceleración constante $a_B$. Desprecie la masa de la cuerda, poleas, gancho y cadena.

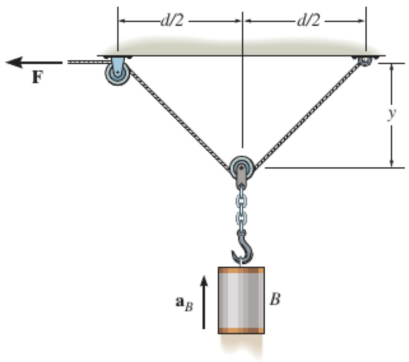



Figura 13: Problema 5.1

**SOLUCIÓN**

En el eje vertical se tiene que:

$$2F\cos\theta - mg = ma_B$$

donde

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (d/2)^2}}$$

Entonces se tiene que:

$$2F\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + (d/2)^2}}\right) - mg = ma_B$$

Y finalmente:

$$F = \frac{m(a_B + g)\sqrt{4y^2 + d^2}}{4y}$$

## 5.2.

Los cuerpos $A$ y $B$ de masas $m_A = 25\ kg$ y $m_B = 37{,}5\ kg$ respectivamente, giran junto al entramado horizontal sobre el que descansan en torno a un eje vertical con velocidad angular constante de $\omega = 5{,}236\ rad/s$. Las distancias de los cuerpos $A$ y $B$ con el eje vertical son $R_A = 625\ mm$ y $R_B = 375\ mm$ respectivamente. Despreciando cualquier posible roce entre las superficies en contacto, determine la tensión del $T$ del cable que conecta los cuerpos.

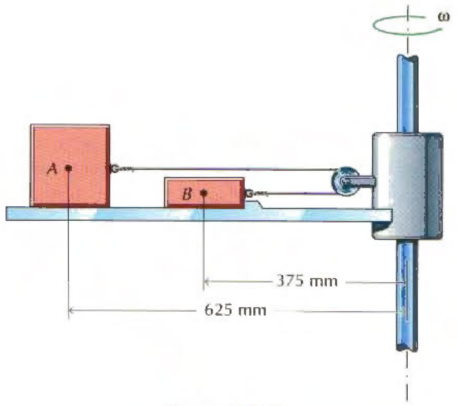



Figura 14: Problema 5.2

**SOLUCIÓN**

En el eje horizontal (radial) para el cuerpo $A$ se tiene que:

$$\sum F_A : T = ma_{Ac}\,,$$

donde $a_{Ac}$ es la aceleración centrípeta del cuerpo $A$ que está dada por:

$$a_{Ac} = R_A\omega^2 = (0{,}625\ m)(5{,}236\ rad/s)^2$$

Así, el valor de la tensión $T$ es:

$$T = (25\ kg)(0{,}625\ m)(5{,}236\ rad/s)^2 = 428{,}37\ N$$

## 5.3.

Un objeto de masa $M$ es sujetado, sin que se mueva, por la fuerza $F$ a través del sistema de poleas mostrado en figura. Despreciar las masas de las poleas y la fricción entre ellas y las cuerdas. Se pide determinar las cinco tensiones que apacerecen en función de la furza aplicada $F$, y el valor de $F$ en función de la masa $M$.

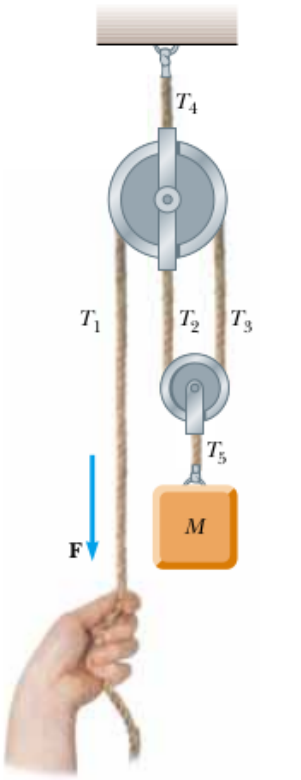



Figura 15: Problema 5.3

**SOLUCIÓN**

Las tensiones $T_1, T_2, T_3$ pertenecen al mismo cable, por lo cual son iguales entre ellas, $T_1, T_2, T_3 = T$. Es sistema se encuentra en quilibrio estático entonces no hay aceleración, y dibujando el diagrama de cuerpo libre en el punto en que la mano toca la cuerda, se obtiene $T = F$. El diagrama de la polea superior restituye $T_4 = 3T = 3F$. El diagrama de la polea inferior restituye $Mg = T_5 = 2T$, que con las igualdades anteriores se obtiene $T_5 = 2F$ y $F = \frac{Mg}{2}$

# Problema 6

## 6.1.

A una caja pequeña, que esta sobre la mitad de un cilindro, se le da un impulso alcanzando una velocidad $v = \sqrt{\frac{1}{4}gr}$ en su punto más alto. Determine la aceleración normal de la caja en el segundo punto de la figura.

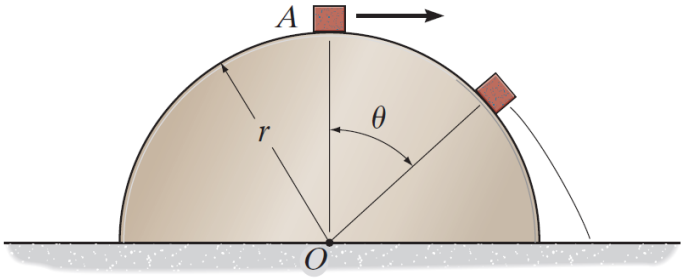
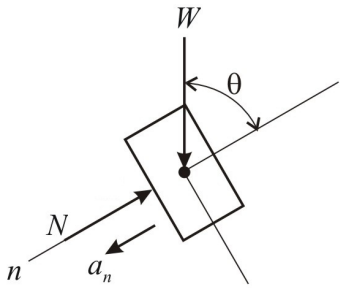



Figura 16: Problema 6.1

**SOLUCIÓN**

El diagrama de cuerpo libre para la caja:




La Normal no hace trabajo, ya que es perpendicular al movimiento. Cuando la caja de desliza sobre el cilindro desde su punto más alto, el peso hace un trabajo positivo. La distancia vertical que alcanza a recorrer sobre el cilindro es de: $h_2 - h_1 = r - r\cos\theta$.

Ocupando la conservación de energía mecánica:

$$\begin{aligned}
\Delta K + \Delta U &= 0 \\
\frac{1}{2}mv_2^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(h_2 - h_1) \\
\frac{1}{2}mv_2^2 &= \frac{1}{2}m(\frac{1}{4}) + mg(r - r\cos\theta) \\
v_2^2 &= 2gr\Big(\frac{1}{8} + 1 - \cos\theta\Big) \\
v_2^2 &= gr\Big(\frac{9}{4} - 2\cos\theta\Big)
\end{aligned}$$

La aceleración normal siempre va en sentido positivo (hacia el centro de su trayectoria):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{gr\left(\frac{9}{4} - 2\cos\theta\right)}{r} \\ &= g\left(\frac{9}{4} - 2\cos\theta\right) \end{aligned}$$

## 6.2.

A una caja pequeña, que esta sobre la mitad de un cilindro, se le da un impulso alcanzando una velocidad $v = \sqrt{\frac{1}{4}gr}$ en su punto más alto. Determine el ángulo $\theta$ con el cual la caja despega del cilindro.

**SOLUCIÓN**

Del diagrama de cuerpo libre del problema anterior (considere a $W$ como el peso $p$), podemos obtener el valor de la Normal tomando la información del eje-y:

$$\begin{aligned} F_n &= ma_n \\ p\cos\theta - N &= ma_n \\ mg\cos\theta - N &= mg\left(\frac{9}{4} - 2\cos\theta\right) \\ N &= mg\left(3\cos\theta - \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

Cuando la caja despega del cilindro, la fuerza normal que actúa sobre la caja es cero. Substituyendo entonces en la igualdad anterior:

$$mg\left(3\cos\theta - \frac{9}{4}\right) = 0$$

Dado que $mg \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(3\cos\theta - \frac{9}{4}\right) &= 0 \\ 3\cos\theta - \frac{9}{4} &= 0 \\ \cos\theta &= \frac{3}{4} \\ \theta &= 41{,}41^\circ \end{aligned}$$

# Problema 7

## 7.1.

El bloque $B$ de masa 2 $kg$ y el cilindro $A$ de masa 15 $kg$ están conectados a una cuerda de masa despreciable que pasa por un orificio al centro de la mesa lisa. Si al bloque se le da una velocidad inicial $v = 10\ m/s$, determine el radio $r$ de la trayectoria circular que sigue $B$.

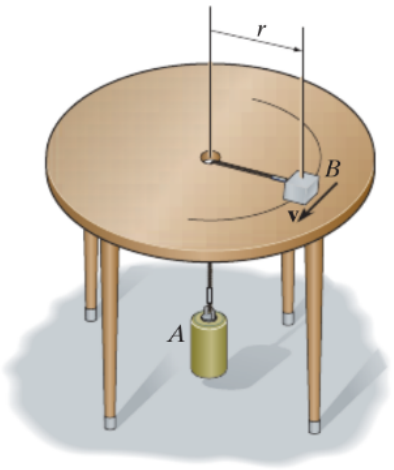



Figura 17: Problema 7.1

**SOLUCIÓN**

Las ecuaciones de Newton para el cilindro:

$$T - m_c g = 0$$

Entonces, $T = m_c g$.
La tensión es la misma que siente el bloque $B$, por lo tanto, mirando en el eje $\hat{r}$, se tiene que:

$$-T = -m_b a_r$$

donde $a_r = \frac{v^2}{r}$. Entonces,

$$T = m_b \frac{v^2}{r}$$

$$(15)\,(9{,}8) = (2)\,\frac{(10)^2}{r}$$

Finalmente,

$$r = 1{,}36\,m$$

## 7.2.

Un barco de masa $M$ parte del reposo en $t = 0$ y se mueve en un círculo de radio $R$ (como en la figura) con una rapidez que se incrementa de acuerdo a $v(t) = \alpha t^2$, donde $t$ es el tiempo (medido en segundos) y $\alpha$ es una constante (con las dimensiones de $m/s^3$). Determine la fuerza centrípeta cuando el barco ha dado exactamente un tercio de vuelta.

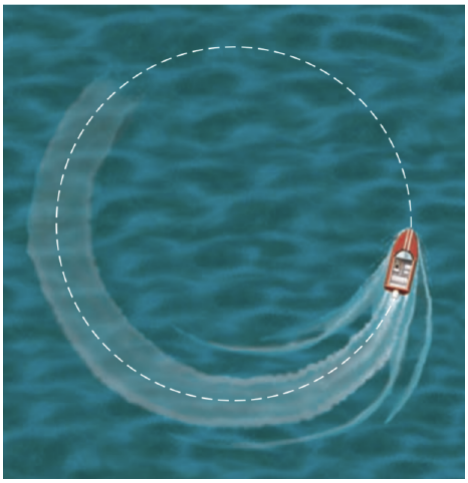


Figura 18: Problema 7.2

**SOLUCIÓN**

La velocidad angular es

$$\dot{\theta}(t) \;=\; \frac{v(t)}{R} \;=\; \frac{\alpha}{R}t^2$$

y la distancia angular en función del tiempo es

$$\theta(t) \;=\; \int \mathrm{d}t\; \dot{\theta}(t) \;=\; \frac{\alpha}{3R}t^3$$

donde la constante de intergación está determinada de modo que $\theta(t = 0) = 0$. El tiempo $t_*$ que pasa para que el barco dé un cuarto de vuelta está dado por:

$$\frac{2\pi}{3} \;=\; \theta(t_*) \;=\; \frac{\alpha}{3R}t_*^3 \quad\Rightarrow\quad t_* \;=\; \left(\frac{2\pi R}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

La aceleración centrípeta en ese instante está dada por

$$a_r(t_*) \;=\; R\dot{\theta}(t_*)^2 \;=\; \frac{\alpha^2}{R}t_*^4 \;=\; \frac{\alpha^2}{R}\left(\frac{2\pi R}{\alpha}\right)^{\frac{4}{3}} \;=\; \left(16\pi^4 R\alpha^2\right)^{\frac{1}{3}} .$$

La fuerza centrípeta está dirigida hacia al centro de la circunferencia y su intensidad es

$$F_c(t_*) \;=\; a_r(t_*) \;=\; M\left(16\pi^4 R\alpha^2\right)^{\frac{1}{3}} .$$

# Problema 8

## 8.1.

El pequeño objeto de masa $m$ está colocado encima de la superficie interior del plato cónico según indica la figura. Si el coeficiente de roce estático vale $\mu = 0{,}30$, determine el rango de velocidades angulares $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ por las cuales el objeto no desliza ni para abajo, ni para arriba.

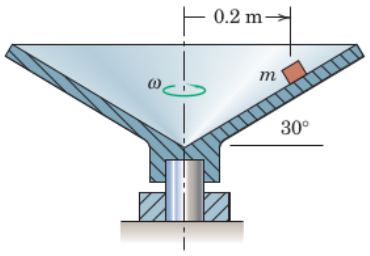



Figura 19: Problema 8.1

**SOLUCIÓN**

Primero que todo hay que averiguar si, por $\omega = 0$ el objeto desliza hacia abajo, i.e. si el roce $R$ es suficiente a balancear la componente del peso $P_{\parallel}$ paralela a la superficie;

$$P_{\parallel} \gtrless R \longrightarrow mg\sin\theta \gtrless mg\mu\cos\theta \longrightarrow \sin\theta \gtrless \mu\cos\theta \longrightarrow 0{,}5 > 0{,}26$$

entonces el objeto desliza hacia abajo si $\omega = 0$. Si $0 < \omega < \omega_{min}$ el roce apunta arriba para contrastar el movimiento del objeto. También se genera una fuerza centrígufa horizontal (ortogonal al eje de rotación), cuya componente paralela a la superficie es $F_{c\parallel} = m\omega^2 r\cos\theta$ que contrasta el peso y apunta arriba como el roce $R$. El equilibrio de estas tres fuerza da la condición para $\omega_{min}$

$$P_{\parallel} = R + F_{c\parallel} \longrightarrow mg\sin\theta = mg\mu\cos\theta + m\omega^2 r\cos\theta \longrightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{r\cos\theta}} = 3{,}69\ rad/s$$

Por otro lado, por valores grandes de $\omega$, la fuerza centrífuga puede sobrepasar $P_{\parallel}$, empujando el objeto hacia arriba; en este caso el roce $R$ apunta abajo

$$P_{\parallel} + R = F_{c\parallel} \longrightarrow mg\sin\theta + mg\mu\cos\theta = m\omega^2 r\cos\theta \longrightarrow \omega_{max} = \sqrt{\frac{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{r\cos\theta}} = 6{,}56\ rad/s$$

## 8.2.

Un carro viaja con rapidez constante de 18 $m/s$ en una pista circular de radio $R = 66\,\text{m}$ la cual tiene un peralte (inclinación) de 15°, como muestra la Figura. Determine el coeficiente de fricción estático mínimo $\mu_s$ que debe tener la caja de masa $m$ con el carro, para que la caja no deslice hacia afuera de la pista circular.

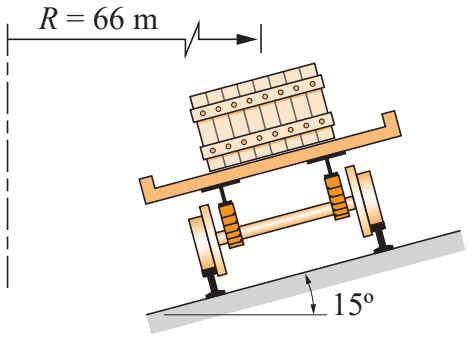



Figura 20: Problema 8.2

**SOLUCIÓN**

Se comienza con un DCL de la caja, donde la fuerza de roce apunta hacia el centro de la pista ya que se opone al movimiento (o al intento del mismo). En la condición límite (justo antes de deslizar) la fuerza de roce está en su valor máximo; es decir $f_r = [f_r]_{\max} = \mu_s\, N$. Para que el sistema carro–caja describan una órbita circular, deben tener aceleración $a_c = -R\,\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R}$. Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en los ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}$, se tiene:

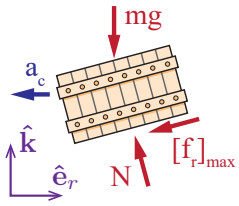



Figura 21: Problema 8.2

$$\sum f_r = m\,\ddot{u}_r \quad \longrightarrow \quad -f_r\,\cos 15^\circ - N\,\sin 15^\circ = m\,a_c$$
$$\sum f_z = m\,\ddot{u}_z \quad \longrightarrow \quad -f_r\,\sin 15^\circ + N\,\cos 15^\circ - mg = 0$$

, donde $a_c = -\frac{54}{11}$. La solución del sistema resulta en:

$$N = \frac{m}{11}\,(54\,\sin 15^\circ + 11g\,\cos 15^\circ) \qquad f_r = \frac{m}{11}\,(54\,\cos 15^\circ - 11g\,\sin 15^\circ)$$

Es decir, el coeficiente de roce mínimo para que la caja no deslice es:

$$f_r = \mu\,N$$
$$\mu = \frac{54\,\cos 15^\circ - 11g\,\sin 15^\circ}{54\,\sin 15^\circ + 11g\,\cos 15^\circ} = 0{,}205$$

## 8.3.

Determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ del eje vertical de los carros de atracción si $\phi = 45°$. Desprecie la masa de los cables y el tamaño de los pasajeros.

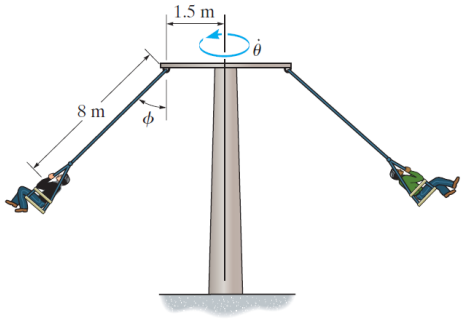



Figura 22: Problema 8.3

**SOLUCIÓN**

El diagrama de cuerpo libre:

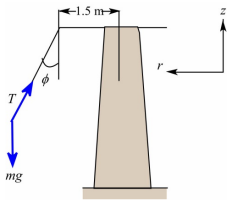



Figura 23: Problema 8.3 Solución

La distancia horizontal del pasajero con el centro de la barra vertical se escribe como:

$$\begin{aligned} r &= 1{,}5 + 8\sin 45° \\ &= 7{,}157m \end{aligned}$$

Dado que $r$ es independiente del ángulo $\theta$, la primera y segunda derivada ($\dot{r}$ y $\ddot{r}$) con respecto al tiempo son cero. Por lo tanto, la aceleración viene dada por:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ &= -7{,}157\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

donde el signo negativo indica que la aceleración radial actúa en el sentido opuesto al asumido inicialmente. Resolviendo las fuerzas en el eje-z:

$$\begin{aligned} F_z &= T\cos 45° - mg \\ ma_z &= T\cos 45° - mg \end{aligned}$$

como no hay aceleración en el ej-z:

$$\begin{aligned} T\cos 45° - mg &= 0 \\ T &= \frac{mg}{\cos 45°} \\ &= 13{,}87mN \end{aligned}$$

Resolviendo las fuerzas en el eje-r:

$$\begin{aligned} F_r &= ma_r \\ T\sin 45^\circ &= ma_r \\ T\sin 45^\circ &= m(-7{,}157\dot{\theta}^2) \\ \dot{\theta}^2 &= -\frac{T\sin 45^\circ}{7{,}157m} \\ \dot{\theta}^2 &= -1{,}372 \\ \dot{\theta} &= -1{,}171 rad/s \end{aligned}$$

# Problema 9

## 9.1.

Cosidere una varilla ideal de largo $L$, con uno de sus extremos en un pivote que permite girar verticalmente y con una masa $m$ en el otro extremo. Si la varilla se libera desde el reposo cuando está en posición vertical ($\theta = 0$), determine el ángulo en el que la fuerza de compresión sobre la varilla pasa a ser cero.

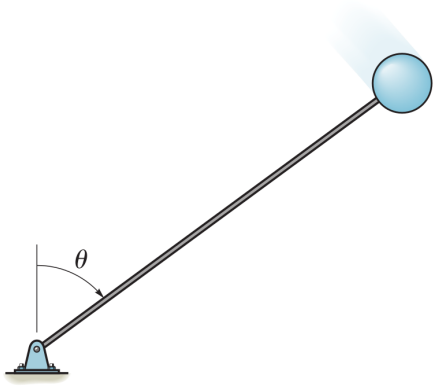



Figura 24: Problema 9.1

**SOLUCIÓN**

Si consideramos $U = 0$ a la altura del pivote, entonces por conservación de energía tenemos que:

$$0 + mgL = \frac{1}{2}mv^2 + mg(L\cos\theta) \quad \rightarrow \quad v^2 = 2gL(1-\cos\theta)$$

Ahora, para que la fuerza de compresión sobre la varilla sea cero:

$$\begin{aligned} \sum F_r: \quad \cancelto{0}{N} - mg\cos\theta &= -ma_c = -m\left(\frac{v^2}{L}\right) \\ g\cos\theta &= \frac{v^2}{L} = \frac{2gL(1-\cos\theta)}{L} \\ \cos\theta &= 2(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Resolviendo para $\cos\theta$ (y luego para $\theta$):

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}2^\circ$$

## 9.2.

Un péndulo simple es atado al extremo de una placa en el punto O, donde puede moverse libremente en el plano vertical de esta. Si a la placa se le aplica una aceleración constante $a$ para subir un plano inclinado en un ángulo $\theta$, escriba una expresión para el ángulo fijo $\beta$ asumido por el péndulo luego de que las oscilaciones iniciales hayan cesado. Considere que la masa de la barra de soporte es despreciable y la aceleración de gravedad es $g$.

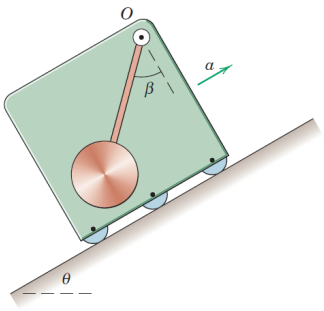
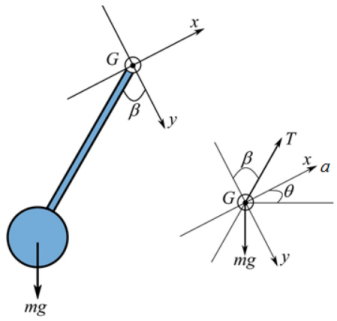



Figura 25: Problema 9.2

**SOLUCIÓN**

El diagrama de cuerpo libre para el péndulo:




Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento en la dirección x:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ T\sin\beta - mg\sin\theta &= ma \\ T &= \frac{mgsin\theta + ma}{\sin\beta} \end{aligned} \tag{2}$$

donde $T$ es la tensión, $g$ la aceleración de gravedad, $a$ la aceleración de la placa, y $m$ la masa del péndulo. Como no hay aceleración en el eje-y, la fuerza neta sobre el péndulo en este eje es cero.

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \\ T\cos\beta - mg\cos\theta &= 0 \\ T &= \frac{mg\cos\theta}{\cos\beta} \end{aligned} \tag{3}$$

Igualando las Ec. 2 y 3:

$$\begin{aligned} \frac{mg\sin\theta + ma}{\sin\beta} &= \frac{mg\cos\theta}{\cos\beta} \\ \tan\beta &= \frac{a + g\sin\theta}{g\cos\theta} \\ \beta &= tan^{-}1\Big(\frac{a + g\sin\theta}{g\cos\theta}\Big) \end{aligned}$$

# Problema 10

## 10.1.

Cuando $s = 0$, el resorte del sistema de disparo no está estirado, es decir, se encuentra en su largo natural. Si el brazo se empuja hacia atrás tal que se estira una distancia $s = 100\ mm$ y se suelta, determine la velocidad de la bolita de masa $m = 0{,}3\ kg$ cuando el ángulo entre la posición de la bolita y la vertical es igual a $\theta = 60^o$. Asuma que no hay roce entre la bolita y la superficie. Desprecie la masa del resorte y el tamaño de la bolita.

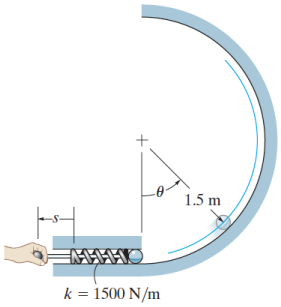



Figura 26: Problema 10.1

**SOLUCIÓN**

Por conservación de energía, se tiene que:

$$K_i + U_{gi} + Uei = K_f + U_{gf} + Uef$$

Inicialmente ($\theta = 0°$) se tiene que:

$$\begin{aligned} K_i &= 0 \\ U_{gi} &= -mgh_1 = -0{,}3 \times 9{,}8 \times 1{,}5 = -4{,}4\,J \\ Uei &= \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\,(1500)\,(0{,}1)^2 = 7{,}5\,J \end{aligned}$$

Finalmente ($\theta = 60°$), se tiene que:

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2}\,(0{,}3)\,v^2 \\ U_{gf} &= -mgh_2 = -0{,}3 \times 9{,}8 \times 1{,}5\cos\,(60°) = -2{,}2\,J \\ Uef &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, usando conservación de energía se tiene que:

$$v^2 = 35{,}285\,m^2/s^2 \qquad \longrightarrow \qquad v = 5{,}94\,m/s$$

## 10.2.

Un bloque de masa $m = 200\ g$ permanece en reposo en $A$ comprimido en una distancia $d = 7{,}5\ cm$ contra el resorte de constante $k = 500\ N/m$. Entonces se suelta el dispositivo de sujeción y el bloque recorre el camino $ABCD$. Calcule la reacción del riel cuando el bloque pasa por el punto más alto, $C$.

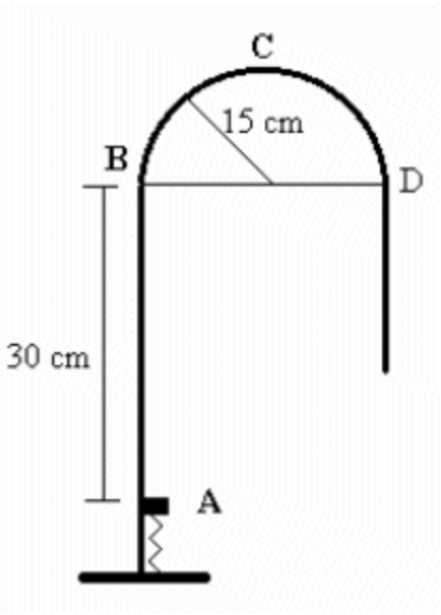



Figura 27: Problema 10.2

**SOLUCIÓN**

Calculamos las energías cinetica $E_{\text{cin}}$, potencial gravitatoria $V_{\text{g}}$ y potencial elástica $V_{\text{e}}$ en $A$ y $C$:

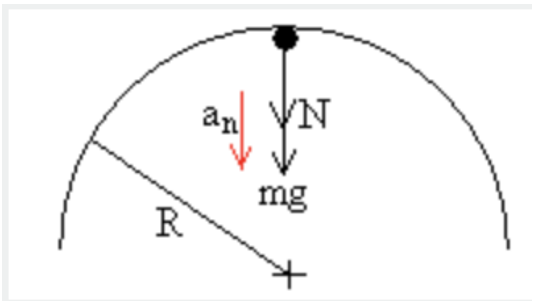
$$\begin{aligned} E^A_{\text{cin}} &= 0 & \qquad E^C_{\text{cin}} &= \frac{m}{2}v_C^2 \\ V^A_{\text{g}} &= 0 & \qquad V^C_{\text{g}} &= mg(h+r) \\ V^A_{\text{e}} &= \frac{k}{2}d^2 & \qquad V^C_{\text{e}} &= 0 \end{aligned}$$

con $h = \overline{AB}$ y $r$ el radio del tramo circular. Por el principio de conservación de la energía mecánica obtenemos

$$E^A_{\text{cin}} + V^A_{\text{g}} + V^A_{\text{e}} = E^C_{\text{cin}} + V^C_{\text{g}} + V^C_{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2}d^2 = \frac{m}{2}v_C^2 + mg(h+r)$$

y despejando $v_C^2$ obtenemos

$$v_C^2 = \frac{k}{m}d^2 - 2g(h+r).$$



En $C$ actuan la reacción del raíl $N_C$ y la fuerza peco $mg$. La suma de esas fuerzas es la fuerza centrípeda del movimiento circular. Por lo tanto

$$N_C + mg \;=\; m\frac{v_C^2}{r}$$

y despejando $N_C$ obtenemos

$$N_C \;=\; \frac{m}{r}\left(\frac{k}{m}d^2 - 2g(h+r)\right) - mg = \frac{kd^2}{r} - mg\left(2\frac{h}{r}+3\right) \;=\; 5{,}02\ N$$

## 10.3.

El bloque de masa $m = 0{,}2$ kg se mueve partiendo de la posición A a lo largo de la guía, inicialmente según un camino circular de radio $R = 0{,}8$ m, luego en un tramo rectilíneo de largo $R/2$ llegando a la posición B. La constante elástica del resorte es $k = 180$ N/m, y su largo natural es $\ell_0 = 0{,}6$m. Se pide determinar el trabajo hecho por la fuerza elástica a lo largo de todo el trayecto.

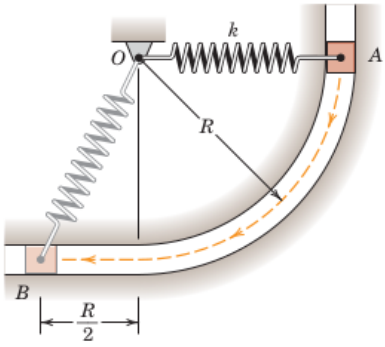



Figura 28: Problema 10.3

**SOLUCIÓN**

En el tramo circular, pese a que el resorte ejerce una fuerza hacia el centro O del sistema, ésta no cumple trabajo ya que es, instante por instante, ortogonal al desplazamiento infinitésimo. Para calcular el trabajo $W$ hecho durante el tramo horizontal hay que integrar la fuerza en la coordenada espacial $x$ desde la posición $x = 0$ en que éste comienza, hasta $x = R/2$,

$$W = \int_0^{\frac{R}{2}} F\cos\theta \mathrm{d}x$$

La fuerza elástica **F** varía, en módulo y dirección, con la posición, entonces no se puede sacar de la integral. Si $r = \sqrt{x^2+R^2}$ es el largo del resorte en función de la posición $x$ y $\cos\theta = \frac{x}{R}$, donde $\theta$ es el ángulo que el resorte forma con el tramo horizontal de la guía, entonces

$$W \;=\; -k\int \frac{x}{r}(r-\ell_0)\mathrm{d}x \;=\; -k\Big(\int x\mathrm{d}x - \ell_0\int \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\mathrm{d}x\Big) =$$

$$= \; -k\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{R^2}{2}} - \ell_0\,\sqrt{x^2+R^2}\Big|_0^{\frac{R^2}{2}}\Big) \;=\; -k\Big[\frac{R^2}{8} + \ell_0 R\Big(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)\Big] = -4{,}2\ J$$

# Problema 11

## 11.1.

Un bloque de peso 50 $N$ descansa sobre una superficie rugosa con coeficiente de roce cinético $\mu_k = 0{,}2$. Una fuerza de $F = (40+s^2)$ N, donde $s$ está en metros, actúa sobre el bloque en la dirección mostrada en la figura. Si el resorte está originalmente en su largo natural ($s = 0$) y el bloque está en reposo, determine el trabajo hecho por la fuerza $F$ en el instante en que el bloque se ha movido 1,5 $m$ hacia la derecha.




Figura 29: Problema 11.1

**SOLUCIÓN**

Sabemos que el trabajo viene dado por la integral de la fuerza por el desplazamiento, por tanto:

$$W = \int^{1} ,5_0(40 + s^2)ds = \left[40s + \frac{s^3}{3}\right]\Big|_0^{1,5} = 52{,}94\ J$$

## 11.2.

Una caja de $20kg$ es tirada por una fuerza constante $F$ de magnitud $100N$. Cuando $s = 15m$, la caja se mueve hacia la derecha con velocidad de $8m/s$. Determine la velocidad de la caja cuando $s = 25m$. Considere un coeficiente de roce cinético entre la caja y el piso de $\mu_k = 0{,}25$.

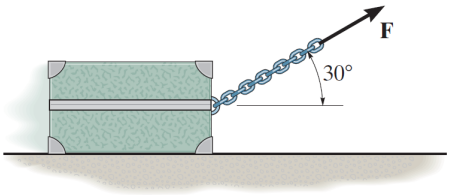
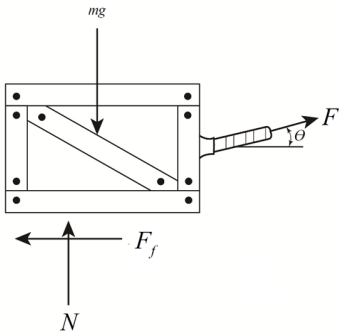



Figura 30: Problema 11.2

**SOLUCIÓN**

El diagrama de cuerpo libre para la caja:



Obtenemos la Normal de la sumatoria de fuerzas para la caja en el eje-y:

$$\begin{aligned} F\sin\theta + N &= mg \\ N &= mg - F\sin 30^\circ \end{aligned}$$

Ahora calculamos el trabajo total:

$$\begin{aligned} W &= \int_{s_1}^{s_2} F\cos 30^\circ ds - \int_{s_1}^{s_2} F_f ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} F\cos 30^\circ ds - \int_{s_1}^{s_2} (\mu_k N) ds \end{aligned}$$

Ocupando la ecuación de trabajo-energía para fuerzas no-conservativas:

$$\begin{aligned} W_{otros} &= \Delta K + \Delta U \\ W &= K_2 - K_1 \\ K_2 &= W + K_1 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 &= \int_{s_1}^{s_2} F\cos 30^\circ ds - \int_{s_1}^{s_2} (\mu_k N) ds + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \frac{1}{2}mv_2^2 &= \int_{s_1}^{s_2} F\cos 30^\circ ds - \int_{s_1}^{s_2} (\mu_k N) ds + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2(F\cos 30^\circ - \mu_k N)s|_{s_1}^{s_2}}{m} + v_1^2} \\ v_2 &= 10{,}7 m/s \end{aligned}$$

## 11.3.

El bloque de masa $m = 0{,}2$ kg parte de reposo desde la posición A. El camino es sin roce hasta el punto D, desde donde el coeficiente de roce cinético es $\mu_k = 0{,}3$. El valor de $R$ mostrado en la figura es 2 m. Determine el valor de la fuerza normal $N$ en el punto C y la distancia $s$ recorrida en el tramo con roce hasta que el bloque se detenga.

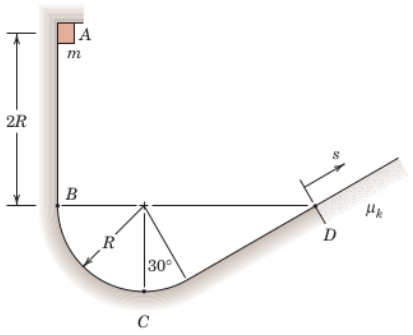



Figura 31: Problema 11.3

**SOLUCIÓN**

La rapidez adquirida hasta los punto C y D se halla igualando la energía potencial gravitacional desde las altura C y D respectivamente

$$\frac{mv_C^2}{2} = 3mgR \longrightarrow v_C = \sqrt{3gR}$$

$$\frac{mv_D^2}{2} = 2mgR \longrightarrow v_D = \sqrt{2gR}$$

La rapidez en el punto C causa una fuerza centrífuga $F_c = m\frac{v_C^2}{R}$ que se suma al peso del bloque. El piso reaccionará con una fuerza normal $N$ igual y opuesta

$$N = m(g + \frac{v_C^2}{R}) = m(g + 3g) = 4mg$$

En el tramo con roce hay que sumar vectorialmente la fuerza de roce $F_R = \mu_k mg\cos\theta$ con el peso; la componente de éste tangencial al camino vale $F_P = mg\sin\theta$. Las dos apuntan al mismo lado, por lo que la fuerza total $F_{tot} = mg(\mu\cos\theta + \sin\theta)$, la cual hace un trabajo resistente hasta desperdiciar toda la energía cinética que el bloque tenía en el punto D, i.e. hasta detener el bloque.

$$2mgR = F_{tot}s = mgs(\mu\cos\theta + \sin\theta) \longrightarrow s = \frac{2R}{\mu\cos\theta + \sin\theta} = 5{,}26\ m$$

## 11.4.

Una partícula de mas $m = 0,4kg$ resbala sobre un carril circular horizontal que tiene un radio $r = 1,5m$. A la partícula se le imprime una velocidad inicial $v_0 = 8m/s$. Después de una revolución su velocidad disminuye a $v_1 = 6m/s$, debido al rozamiento. ¿Cuál es el numero $N$ de revoluciones que efectúa la partícula antes de pararse?

**SOLUCIÓN**

El trabajo de rozamiento es igual a la variación de la energía cinética de la partícula:

$$W \;=\; \Delta E_{\rm cin} \;=\; \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_0^2\right)\ .$$

Como la fuerza de rozamiento es dinámica y es constante:

$$W \;=\; -(\mu_d mg)\Delta s \;=\; -(\mu_d mg)2\pi r\ .$$

De las dos ecuaciones anteriores sigue que

$$\mu_d \;=\; -\frac{W}{2mg\pi r} \;=\; \frac{1}{4g\pi r}\left(v_0^2 - v_1^2\right)\ .$$

El trabajo $W'$ realizado por el rozamiento durante las $N$ vueltas hasta que se para la partícula tiene que reducir la energía cinética de ésta a cero, luego:

$$-(\mu_d mg)N2\pi r \;=\; W' \;=\; -\frac{m}{2}v_0^2\ .$$

Por lo tanto

$$N \;=\; \frac{1}{\mu_d}\frac{v_0^2}{4g\pi r} \;=\; \frac{v_0^2}{v_0^2 - v_1^2} \;=\; 2,29\ .$$

# Problema 12

## 12.1.

En el sistema de la figura, el motor jala de su cable con velocidad $2\,\mathrm{m/s}$. Determine la rapidez con que se mueve la masa $C$ e indique si sube o baja.

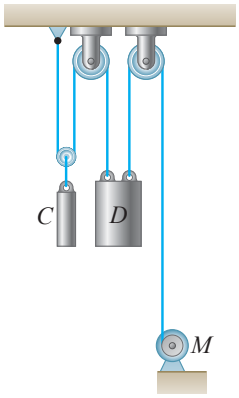
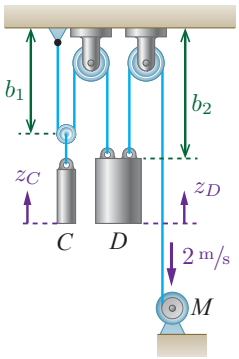



Figura 32: Problema 12.1

**SOLUCIÓN**

Consideraremos los movimientos de ambas masas, $z_C$ y $z_D$, positivos hacia arriba. Fijando algunas dimensiones en la condición inicial como muestra la siguiente Figura, se analizan los largos de las dos cuerdas del sistema; la cuerda izquierda y la cuerda derecha.




Las dimensiones $b_1$ y $b_2$ son constantes, y con ello las longitudes de las cuerdas son:

$$\ell_{\text{izq}} = 2\,(b_1 - z_C) + (b_2 - z_D) + \text{cte}$$
$$\ell_{\text{der}} - v_m\,t = (b_2 - z_D) + \text{cte}$$

, donde $v_m = 2\,\mathrm{m/s}$. Derivando ambas expresiones en el tiempo:

$$0 = -2\dot{z}_C - \dot{z}_D$$
$$-v_m = -\dot{z}_D$$

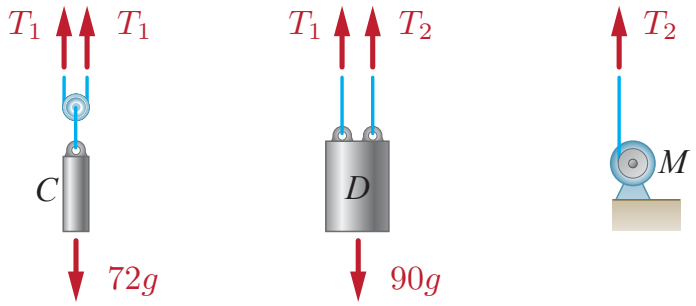
Es decir, la masa $C$ se mueve con velocidad $\dot{z}_C = -\frac{1}{2}v_m = -1\,\mathrm{m/s}$. El movimiento es hacia abajo ya que el resultado es positivo y los ejes fueron considerados como positivos hacia arriba.

## 12.2.

El sistema de la figura se encuentra en reposo. Determine la fuerza con que el motor jala de su cable si $m_C = 72\,\text{kg}$ y $m_D = 90\,\text{kg}$.

### SOLUCIÓN

Las aceleraciones son todas iguales a cero ya que el sistema está en reposo. Es decir, todos los cuerpos están en equilibrio de fuerzas. Los DCL de los cuerpos (y motor) se muestran a continuación:




Con el DCL de la masa $C$ se tiene que:

$$2T_1 - 72g = 0 \qquad \longrightarrow \qquad T_1 = 36g$$

, y luego con el DCL de la masa $D$:

$$T_1 + T_2 - 90g = 0 \qquad \longrightarrow \qquad T_2 = 54g$$

Es decir, el motor está jalando del cable con una fuerza $T_2 = 54g$.