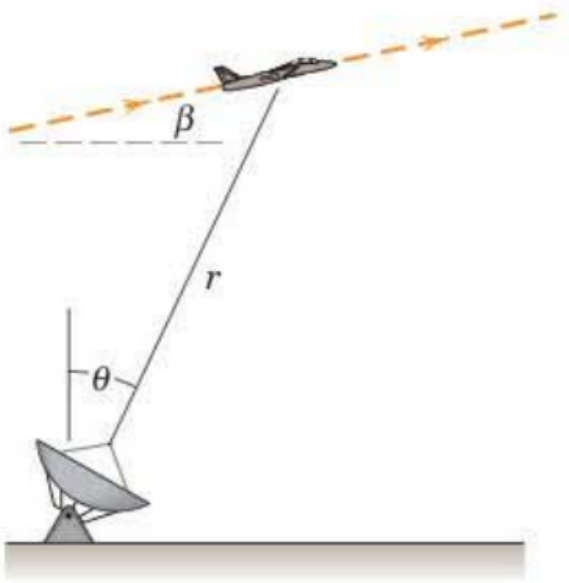
Pauta Control 1: FIS1514 - Dinámica

Instituto de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs: A. Edward, B. Loewe, T. Diego,
Primer Semestre 2025

---

1. Una aeronave que vuela en línea recta con un ángulo de ascenso β respecto a la horizontal es rastreada por un radar ubicado directamente debajo de la línea de vuelo. En un instante determinado, se registran los siguientes datos: $r = r_0$, $\dot{r} = v_{r0}$, $\ddot{r} = a_{r0}$, $\theta = \theta_0$ y $\dot{\theta} = \omega_0$.



Para ese instante, determine la altitud h, la velocidad v, el ángulo de ascenso β, $\ddot{\theta}$ y la aceleración a de la aeronave.

Solución versión 1

1. Altitud de la Aeronave

La altitud es la coordenada vertical en coordenadas polares:

$$h = r\cos\theta. \tag{1}$$

Por lo tanto, en el instante dado,

$$h_0 = r_0\cos\theta_0. \tag{2}$$

■

2. Velocidad de la Aeronave

La velocidad en coordenadas polares se expresa como:

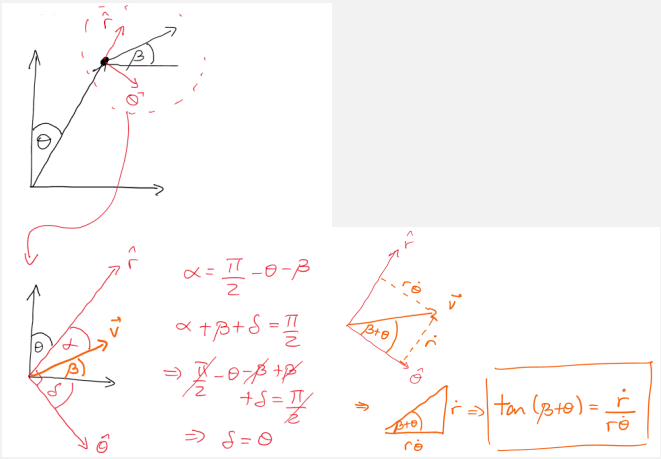
$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}. \tag{3}$$

Evaluando en el instante dado,

$$v_0 = \sqrt{v_{r0}^2 + (r_0\omega_0)^2}. \tag{4}$$

■

3. Ángulo de Ascenso β



El ángulo de la velocidad con respecto a la horizontal está dado por:

$$\tan(\beta + \theta) = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}. \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$\beta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{v_{r0}}{r_0\omega_0}\right) - \theta. \tag{6}$$

■

4. Aceleración Angular $\ddot{\theta}$

La aeronave viaja en línea recta por lo que su velocidad y aceleración deben apuntar en direcciones paralelas. Luego, debemos tener un a tal que

$$\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = a[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}]. \tag{7}$$

De igualar la componente $\hat{r}$, obtenemos que $a = \dot{r}/(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$. Usando esto en la ecuación para la componente $\hat{\theta}$, podemos despejar $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta}_0 = -\frac{\dot{\theta}(2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2\dot{\theta}^2)}{r\dot{r}}. \tag{8}$$

Evaluando en el instante dado

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{\omega_0(r_0 a_{r0} - 2v_{r0}^2 - r_0^2\omega_0^2)}{r_0 v_{r0}}. \tag{9}$$

■

5. Aceleración Total de la Aeronave

La aceleración total en coordenadas polares está dada por:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}. \tag{10}$$

Evaluando en el instante dado,

$$a_0 = \sqrt{(a_{r0} - r_0\omega_0^2)^2 + (r_0\ddot{\theta}_0 + 2v_{r0}\omega_0)^2}. \tag{11}$$

■

Solución versión 2

1. Altitud de la Aeronave

El vector posición $\vec{r}$ en coordenadas polares esta definido como

$$\vec{r} = r\,\hat{r},$$

donde

$$\hat{r} = \sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}.$$

Por tanto, para $\theta = \theta_0$, se obtiene que la altitud de la aeronave es

$$y_0 = \vec{r}_0 \cdot \hat{y} = r_0 \cos\theta_0.$$

■

2. Velocidad de la Aeronave

Por definición la velocidad en coordendas polares para $\theta = \theta_0$ es

$$\vec{v}_0 = \dot{r}_0\hat{r} + r_0\dot{\theta}_0\hat{\theta}$$

donde

$$\hat{\theta} = \cos\theta\hat{x} - \sin\theta\hat{y}.$$

Nótese que el módulo de la velocidad (rapidez) toma la forma

$$v_0 = \sqrt{v_{r0}^2 + (r_0\omega_0)^2}.$$

■

3. Ángulo de Ascenso β

La trayectoria recta del avión puede ser descrita por la ecuación

$$y - y_0 = \tan(\beta)(x - x_0)$$

donde x_0 y y_0 son constantes desconocidas. En términos de la variable r se tiene que $y = r\cos\theta$ y $x = r\,\sin\theta$.

Derivando con respecto al tiempo la expressión de la trayectoria se obtiene

$$\dot{y} = \tan(\beta)\dot{x},$$

es decir

$$\tan(\beta) = \frac{\dot{r}\,\cos\theta - r\,\sin\theta\,\dot{\theta}}{\dot{r}\,\sin\theta + r\,\cos\theta\dot{\theta}}.$$

Esta última expresión es equivalente a escribir

$$\tan(\beta) = \frac{\vec{v}\cdot\hat{y}}{\vec{v}\cdot\hat{x}}$$

donde $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, $\hat{x} = \sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}$ y $\hat{y} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$.
Para $\theta = \theta_0$ se obtiene

$$\tan(\beta) = \frac{\dot{r}_0\,\cos\theta_0 - r_0\,\dot{\theta}_0\,\sin\theta_0}{\dot{r}_0\,\sin\theta_0 + r_0\,\dot{\theta}_0\cos\theta_0}$$

lo cual permite determinar completamente el ángulo de ascenso β como

$$\beta = \arctan\left(\frac{\dot{r}_0\,\cos\theta_0 - r_0\,\dot{\theta}_0\,\sin\theta_0}{\dot{r}_0\,\sin\theta_0 + r_0\,\dot{\theta}_0\cos\theta_0}\right)$$

Nótese que la expresión de $\tan(\beta)$ se puede reescribir como

$$\frac{\dot{r}_0}{r_0\,\dot{\theta}_0} = \frac{\sin\theta_0 + \cos\theta_0\tan\beta}{\cos\theta_0 - \sin\theta_0\tan\beta} = \tan(\beta + \theta_0).$$

Por tanto, otra expresión para el ángulo de ascenso β es

$$\beta = \arctan\left(\frac{\dot{r}_0}{r_0\,\dot{\theta}_0}\right) - \theta_0$$

■

4. Aceleración Angular $\ddot{\theta}$

Derivando la relación

$$\tan(\beta)\,\vec{v}\cdot\hat{x} = \vec{v}\cdot\hat{y}$$

con respecto al tiempo se obtiene

$$\tan(\beta) = \frac{\vec{a}\cdot\hat{y}}{\vec{a}\cdot\hat{x}}$$

donde

$$\vec{a} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta}$$

con

$$A_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \text{y} \qquad A_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}.$$

Por tanto

$$\tan(\beta) = \frac{A_r\,(\hat{r}\cdot\hat{y}) + A_\theta\,(\hat{\theta}\cdot\hat{y})}{A_r\,(\hat{r}\cdot\hat{x}) + A_\theta\,(\hat{\theta}\cdot\hat{x})}.$$

Despejando A_θ se obtiene

$$A_\theta = A_r\,\frac{(\hat{r}\cdot\hat{x})\tan(\beta) - (\hat{r}\cdot\hat{y})}{(\hat{\theta}\cdot\hat{y}) - (\hat{\theta}\cdot\hat{x})\tan(\beta)},$$

es decir

$$\ddot{\theta} = \frac{A_r}{r}\,\frac{(\hat{r}\cdot\hat{x})\tan(\beta) - (\hat{r}\cdot\hat{y})}{(\hat{\theta}\cdot\hat{y}) - (\hat{\theta}\cdot\hat{x})\tan(\beta)} - 2\frac{\dot{r}\,\dot{\theta}}{r}.$$

Para $\theta = \theta_0$ se obtiene

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{a_{r0} - r_0\omega_0^2}{r_0}\,\frac{\cos(\theta_0) - \sin(\theta_0)\tan(\beta)}{\sin(\theta_0) + \cos(\theta_0)\tan(\beta)} - 2\frac{\dot{r_0}\,\omega_0}{r_0},$$

la cual queda totalmente caracterizada.

Nótese que esta última expresión se puede reescribir como

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{a_{r0} - r_0\omega_0^2}{r_0}\,\frac{1}{\tan(\beta+\theta_0)} - 2\frac{v_{r0}\,\omega_0}{r_0},$$

Recordando que $\tan(\beta+\theta_0) = v_{r0}/(r_0\,\omega_0)$ se obtiene que

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{\omega_0(r_0 a_{r0} - 2v_{r0}^2 - r_0^2\omega_0^2)}{r_0 v_{r0}}.$$

■

5. Aceleración Total de la Aeronave

La aceleración total en coordenadas polares está dada por:

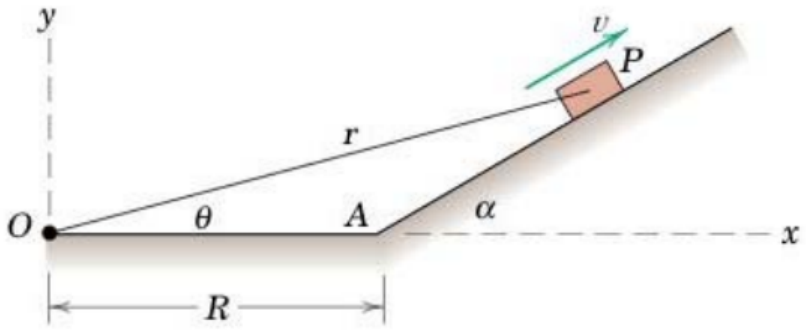
$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}. \tag{12}$$

Evaluando en el instante dado,

$$a_0 = \sqrt{(a_{r0} - r_0\omega_0^2)^2 + (r_0\ddot{\theta}_0 + 2v_{r0}\omega_0)^2}. \tag{13}$$

■

2. El bloque pequeño P parte del reposo en el instante $t = 0$ en el punto A y asciende por la pendiente con aceleración constante a. (no existe fricción entre el bloque y la superficie)



a) Determine $\dot{r}$ en función del tiempo.

b) Determine la evolución de $\dot{\theta}$ con respecto al tiempo.

Determine $\dot{r}$ en función del tiempo.
Se considera un bloque que se desliza sobre un plano inclinado con un ángulo α respecto a la horizontal. En el instante inicial $t = 0$, el bloque parte del reposo desde el punto A y asciende con una aceleración constante a a lo largo del plano inclinado.
El vector posición del bloque está descrito como:

$$\vec{r} = (R + s\cos\alpha)\hat{x} + s\sin\alpha\hat{y}, \tag{14}$$

donde s es el desplazamiento del bloque a lo largo del plano inclinado, y $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son los vectores unitarios en las coordenadas cartesianas. Nuestro objetivo es determinar $\dot{r}$ en función del tiempo.
Dado que la aceleración a lo largo del plano inclinado es constante, la ecuación del movimiento a lo largo de s es:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{15}$$

Como el bloque parte del reposo, $v_0 = 0$, por lo que:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2. \tag{16}$$

Para encontrar $\dot{r}$, derivamos el módulo del vector $\vec{r}$ con respecto al tiempo. Primero, calculamos el módulo de $\vec{r}$:

$$r = \sqrt{(R + s\cos\alpha)^2 + (s\sin\alpha)^2}. \tag{17}$$

Expandiendo,

$$r = \sqrt{R^2 + 2Rs\cos\alpha + s^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}. \tag{18}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$r = \sqrt{R^2 + 2Rs\cos\alpha + s^2}. \tag{19}$$

Ahora derivamos con respecto al tiempo:

$$\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{2R\cos\alpha\dot{s} + 2s\dot{s}}{\sqrt{R^2 + 2Rs\cos\alpha + s^2}}. \tag{20}$$

■

Simplificando:

$$\dot{r} = \frac{(R\cos\alpha + s)\dot{s}}{\sqrt{R^2 + 2Rs\cos\alpha + s^2}}. \tag{21}$$

Sustituyendo $\dot{s} = at$,

$$\dot{r} = \frac{(R\cos\alpha + \frac{1}{2}at^2)at}{\sqrt{R^2 + 2R(\frac{1}{2}at^2)\cos\alpha + (\frac{1}{2}at^2)^2}}. \tag{22}$$

■

Determine la evolución de $\dot{\theta}$ con respecto al tiempo.
Para determinar $\dot{\theta}$, utilizamos la relación:

$$\tan\theta = \frac{s\sin\alpha}{R + s\cos\alpha}. \tag{23}$$

Derivando ambos lados con respecto al tiempo:

$$\sec^2\theta\dot{\theta} = \frac{(s\cos\alpha\dot{s} + \sin\alpha\dot{s}(R + s\cos\alpha)) - (s\sin\alpha\cos\alpha\dot{s})}{(R + s\cos\alpha)^2}. \tag{24}$$

Simplificando,

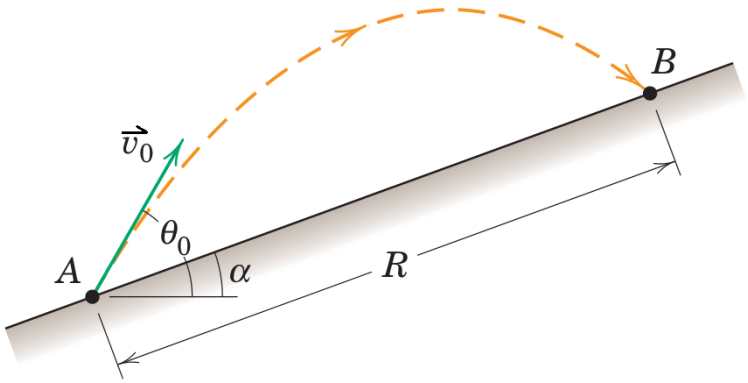
$$\dot{\theta} = \frac{\dot{s}\sin\alpha}{(R + s\cos\alpha)\sec^2\theta}. \tag{25}$$

Sustituyendo $\dot{s} = at$,

$$\dot{\theta} = \frac{at\sin\alpha}{(R + \frac{1}{2}at^2\cos\alpha)\sec^2\theta}. \tag{26}$$

■

3.



Se lanza un proyectil con velocidad inicial $\vec{v}_0$ desde el punto **A**. Determine el ángulo de lanzamiento θ_0 que da como resultado el alcance máximo R sobre la pendiente del ángulo agudo α.

El vector posición del proyectil está dado por la expresión

$$\vec{r} = v_0 \cos(\theta_0) t \hat{x} + v_0 \sin(\theta_0) t \hat{y} - \frac{g\,t^2}{2} \hat{y}.$$

Sea $\hat{r}_\alpha = \cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y}$ el vector unitario paralelo a la superficie del plano inclinado. Entonces la distancia D recorrida por el proyectil queda dada por la expresión

$$R = \vec{r} \cdot \hat{r}_\alpha,$$

es decir

$$R = v_0 \cos(\theta_0) t \cos\alpha + \left(v_0 \sin(\theta_0) t - \frac{g\,t^2}{2} \right) \sin\alpha.$$

Esta expresión se puede interpretar como la proyección del vector $\vec{r}$ sobre el plano inclinado para un tiempo arbitrario t.

El ángulo θ del vector posición $\vec{r}$ obedece la relación

$$\tan(\theta) = \frac{v_0 \sin(\theta_0) t - \frac{g\,t^2}{2}}{v_0 \cos(\theta_0) t} = \tan(\theta_0) - \frac{g\,t}{2\,v_0 \cos(\theta_0)},$$

donde el numerador y el denominador son las componentes vertical y horizontal, respectivamente, del vector posición $\vec{r}$.

El proyectil toca el plano inclinado cuando $\theta = \alpha$. En este caso se obtiene

$$\tan(\alpha) = \tan(\theta_0) - \frac{g\,t_\alpha}{2\,v_0 \cos(\theta_0)},$$

donde t_α es el tiempo de vuelo del proyectil hasta tocal el plano inclinado.

Reorganizando términos se obtiene

$$t_\alpha = \frac{2\,v_0}{g} (\sin(\theta_0) - \cos(\theta_0) \tan(\alpha)).$$

■

La distancia recorrida por el proyectil hasta tocar el plano inclinado es

$$R = v_0 t_\alpha (\cos(\theta_0)\cos\alpha + \sin(\theta_0)\sin\alpha) - \frac{g\,t_\alpha^2}{2}\sin\alpha.$$

Reescribiendo se obtiene

$$R = v_0\, t_\alpha\, \cos(\theta_0 - \alpha) - \frac{g\,t_\alpha^2}{2}\sin\alpha.$$

Nótese que θ_0 es el ángulo de lanzamiento del proyectil. Entonces ahora maximizamos con respecto a ese ángulo, es decir que la máxima distancia R se obtiene cuando $\theta_0 \to \theta_{max}$, donde

$$\left.\frac{d\,R}{d\theta_0}\right|_{\theta_0 \to \theta_{max}} = 0.$$

Elaborando se obtiene

$$\left[v_0\,\frac{d\,t_\alpha}{d\theta_0}\,\cos(\theta_0 - \alpha) - v_0\,t_\alpha\,\sin(\theta_0 - \alpha) - g\,t_\alpha\,\frac{d\,t_\alpha}{d\theta_0}\,\sin\alpha\right]_{\theta_0 \to \theta_{\max}} = 0,$$

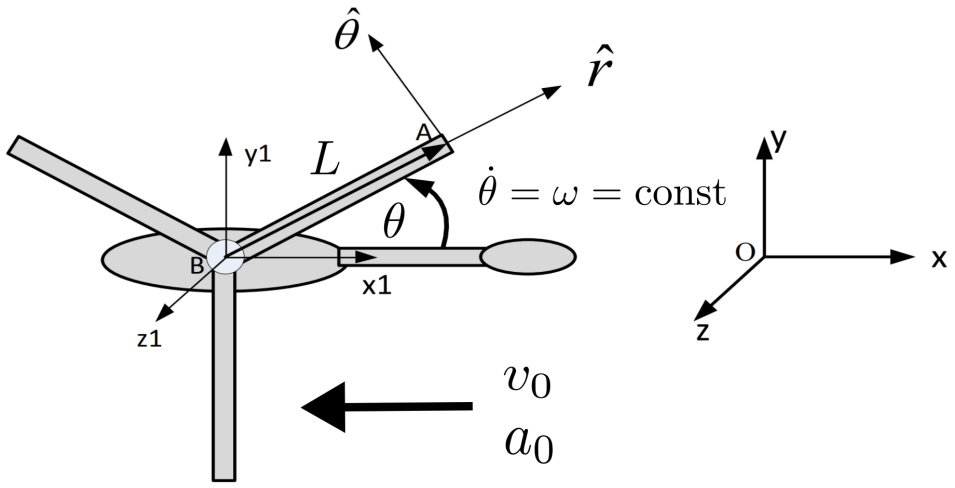
donde

$$\frac{d\,t_\alpha}{d\theta_0} = \frac{2\,v_0}{g}(\cos(\theta_0) + \sin(\theta_0)\tan(\alpha)).$$

Esta ecuación algebraica se debe solucionar numericamente para encontrar el valor o los valores de θ_{max} que sean agudos y mayores a α. ■

4.

Las aspas del rotor de un helicóptero tienen un radio L y giran con una velocidad angular constante ω. En un instante de tiempo, el helicóptero (i.e., el punto B) vuela horizontalmente en línea recta con una rapidez v_0 y una aceleración de magnitud a_0, como se muestra en la figura. Note que tanto la velocidad como la aceleración del helicoptero apuntan hacia la izquierda.
Determine la velocidad y la aceleración del punto A, que es la punta más externa de una de las aspas, con respecto al suelo (punto O), asumiendo que en este instante $\theta = \pi/2$.



Notemos que las coordenadas del punto A respecto a O se obtienen de sumar vectorialmente las coordenadas de A respecto a B con las coordenadas de B respecto a O

$$\vec{r}_{AO} = \vec{r}_{BO} + \vec{r}_{AB}. \tag{27}$$

Tomando derivadas temporales obtenemos entonces que

$$\vec{v}_{AO} = \vec{v}_{BO} + \vec{v}_{AB}, \tag{28}$$
$$\vec{a}_{AO} = \vec{a}_{BO} + \vec{a}_{AB}; \tag{29}$$

Del enunciado vemos que

$$\vec{v}_{BO} = -v_0\hat{i}, \tag{30}$$
$$\vec{a}_{BO} = -a_0\hat{i}. \tag{31}$$

Por otra parte, ocupando el sistema coordenado cilíndrico centrado en el rotor del helicóptero, tenemos que

$$\vec{v}_{AB} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}, \tag{32}$$
$$\vec{a}_{AB} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}. \tag{33}$$

Esto se simplifica bastante pues $\dot{r} = \ddot{r} = \dot{z} = \ddot{z} = \ddot{\theta} = 0$. Usando esto junto con $r = L$ y el que $\dot{\theta} = \omega$, tenemos entonces que ■

$$\vec{v}_{AO} = -v_0\,\hat{i} + L\,\omega\,\hat{\theta}, \tag{34}$$
$$\vec{a}_{AO} = -a_0\,\hat{i} - L\,\omega^2\hat{r} \tag{35}$$

Ahora, recordemos que

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}, \tag{36}$$
$$\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}, \tag{37}$$

por lo que cuando $\theta = \pi/2$, entonces

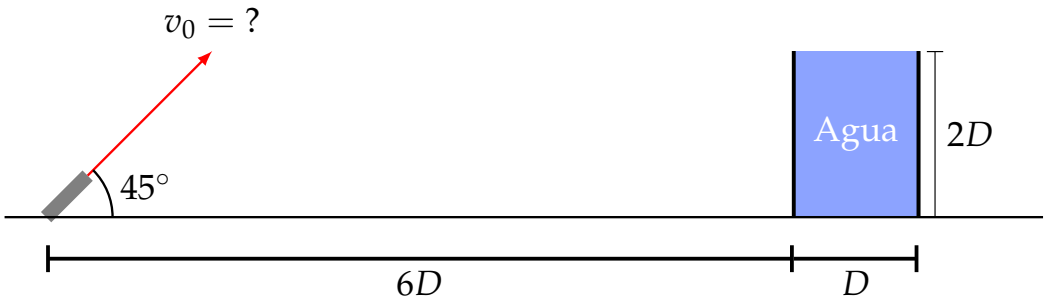
$$\hat{r} = \hat{j}, \tag{38}$$
$$\hat{\theta} = -\hat{i}. \tag{39}$$

Con esto, obtenemos finalmente que

$$\vec{v}_{AO} = -(v_0\ + L\,\omega)\,\hat{i}, \tag{40}$$
$$\vec{a}_{AO} = -a_0\,\hat{i} - L\,\omega^2\hat{j}. \tag{41}$$

■

5. Se utiliza una manguera para llenar de agua un contenedor cilíndrico grande de diametro D y altura $2D$. La manguera lanza el agua a 45° sobre la horizontal, desde el mismo nivel que la base del tanque, y está a una distancia de $6D$ de éste.¿ Cuál debe ser la velocidad inicial (v_0) para que el agua entre al contenedor? Ignore la resistencia el aire, y exprese su respuesta en términos de D y de g.



Las ecuaciones para el movimiento parabólico son

$$x = v_0 \cos(\theta) t \tag{42}$$
$$y = v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{43}$$

la distancia mínima cuando el agua entra al taque es $x = 6D$ y $y = 2D$. Mientras que la distancia máxima es $x = 7D$ y $y = 2D$. Como el ángulo es de 45°, entonces $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En la ecuación (42), reemplazamos la distancia mínima $x = 6D$, por lo tanto

$$6D = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6\sqrt{2}D}{v_0}$$

reemplazamos este tiempo en ecuación (43) junto a la distancia $y = 2D$, y se obtiene

$$\begin{aligned} 2D &= v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \\ 2D &= v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{6\sqrt{2}D}{v_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{6\sqrt{2}D}{v_0} \right)^2 \\ 2D &= 6D - \frac{36 g D^2}{v_0^2} \end{aligned}$$

despejando v_0 de la última ecuación, se obtenie que

$$v_0 = 3\sqrt{gD}$$

si hacemos el mismo procedimiento para la distancia máxima, obtenemos

$$v_0 = 3.13\sqrt{gD}$$

finalmente, el rango que debe tener la velocidad inicial para que el agua entre al tanque es

$$v_0 \in \left[3\sqrt{gD}, 3.13\sqrt{gD} \right]$$

■