Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIS–1513: Estática y Dinámica
Curso: R. Benguria, Segundo Semestre, 2016
Ayudante: Rodrigo Contreras Cibié

Guía # 1
31 de Julio de 2016

Un prerrequisito importante de este curso es el álgebra de vectores: esto incluye saber: i) suma de vectores, ii) producto de un vector por un escalar (número real en este curso), iii) producto interno (también conocido como *producto punto*) entre dos vectores, iv) producto exterior (también conocido como *producto cruz*) entre dos vectores, v) independencia lineal entre vectores, vi) base de vectores, vii) proyección de un vector sobre otro, y viii) descomposición de vectores en una base. Un excelente lugar para repasar estos conceptos, es el capítulo 1: "Vector and Kinematics" del libro: Daniel Kleppner, and Robert J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, Mc Graw Hill, Boston, 1973. (Una segunda edición de este libro fue publicada el 2013). Este libro es muy caro, pero hay varias copias en la Biblioteca de San Joaquín. Los cinco primeros problemas de esta guía (sacados de ese libro) tienen relación con álgebra de vectores.

Problema 1. Sean $\hat{a}$ y $\hat{b}$, vectores unitarios en el plano x–y formando ángulos θ y ϕ con el eje x, de modo que

$$\hat{a} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath},$$

y

$$\hat{b} = \cos\phi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath}.$$

Usando álgebra vectorial muestre que

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\,\cos\phi + \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi.$$

Problema 2. Encuentre el vector unitario perpendicular a $\vec{A} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k})$ y $\vec{B} = (2\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\,\hat{k})$.
Sol. $\hat{n} \pm (2\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath} - 3\,\hat{k})/\sqrt{38}$.

Problema 3. Muestre que el volumen de un paralelepípedo con lados $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$, está dado por el *producto caja*: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$.

Problema 4. Considerando dos puntos localizados en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, separados por una distancia $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$. Encuentre el vector $\vec{A}$ que va desde el origen hasta un punto en el segmento que une a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ a una distancia $x\,r$ desde el punto $\vec{r}_1$ donde x es un número cualquiera.

Problema 5. Sea $\vec{A}$ un vector arbitrario. Si $\hat{n}$ es un vector unitario con dirección fija, demuestre que se puede escribir

$$\vec{A} = (\vec{A}\cdot\hat{n})\,\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{A})\times\hat{n}.$$

Problema 6. La aceleración de gravedad puede ser medida lanzando un cuerpo hacia arriba y midiendo el tiempo que demora en cruzar dos puntos dados en ambas direcciones (i.e., hacia arriba y hacia abajo). Muestre que si el cuerpo demora un tiempo T_A en cruzar una línea horizontal (i.e., una altura dada) A en ambas direcciones, y tarda un tiempo T_B en cruzar una segunda línea (i.e., una segunda altura) B en ambas direcciones entonces, suponiendo que la magnitud de la aceleración es constante, ésta está dada por

$$g = \frac{8\,h}{T_A^2 - T_B^2},$$

en que h es la altura del la línea B sobre la línea A.

Problema 7. Un tambor de radio R rueda sobre una pendiente sin resbalar. El eje del tambor tiene aceleración a paralela a la pendiente. ¿Cuál es la aceleración angular del tambor?

Problema 8. Dos partículas a y b se mueven en direcciones opuestas alrededor de un círculo con velocidad angular ω. En $t = 0$ ambas están en el punto $\vec{r} = \ell\,\hat{\jmath}$, donde ℓ es el radio del círculo. Encuentre la velocidad de a relativa a b.

Problema 9. Un auto deportivo puede acelerar uniformemente hasta 192 km por hora en 30 s. Su tasa máxima de frenado no excede de $0,7\ g$. ¿Cuál es el tiempo mínimo requerido para andar $0,8$ km, suponiendo que empieza y termina en reposo? (Un gráfico velocidad vs. tiempo puede ayudar).

Problema 10. Una partícula se mueve en un plano con una velocidad radial constante de 4 m/s. La velocidad angular es constante y tiene una magnitud $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Cuando la partícula está a 3 m del origen, encuentre la magnitud de i) la velocidad, ii) la aceleración. **Comentario:** Uno puede demostrar que bajo estas condiciones la trayectoria de la partícula es una espiral, y la partícula se mueve en esa trayectoria alejándose del origen.
Sol. i) $v = \sqrt{52}$ m/s.

Problema 11. Una rueda rueda sobre una una línea recta sin resbalar. Su centro se mueve con una velocidad constante V. Una pequeña piedra situada en el borde de la rueda toca el suelo (la línea) en $t = 0$. Encuentre la posición, velocidad, y aceleración de la piedra como función del tiempo.

Problema 12. Una partícula se mueve hacia afuera a lo largo de una espiral. La espiral tiene una trayectoria dada por $\rho(\theta) = A\,\theta$, donde A es una constante de valor $A = 1/\pi$ m/rad. Si la coordenada θ de la partícula aumenta en el tiempo como $\theta = \alpha\,t^2$, en que α es una constante,

i) Grafique en forma esquemática el movimiento, e indique aproximadamente la velocidad y aceleración en algunos puntos.

ii) Muestre que la aceleración radial es cero cuando $\theta = 1/\sqrt{2}$ rad.

iii) ¿Para qué ángulos las aceleraciones radial y tangencial tienen igual magnitud?

Problema 13. Un niño está de pie en la punta de una colina que baja uniformemente con un ángulo ϕ. ¿Con qué ángulo θ, medido con respecto a la horizontal, debe lanzar una piedra para que llegue lo más lejos posible?
Sol. Verifique su respuesta: si $\phi = 60°$, $\theta = 15°$.

Notas Históricas:

---

1. **Algebra de Vectores.** Una reseña breve de la historia del álgebra de vectores se puede encontrar en la página WEB:

http://www.math.mcgill.ca/labute/courses/133f03/VectorHistory.html

de la Universidad de McGill (Montreal, Canada). El uso moderno y la notación actual del álgebra de vectores fue introducida por el matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs en un curso de Análisis Vectorial entre 1881 y 1884 en la Universidad de Yale. Originalmente los apuntes de sus clases fueron distribuidos como notas a sus alumnos, las que fueron finalmente recopiladas por Edwin Bidwell Wilson y publicadas en la monografía: J. W. Gibbs, *Vector Analysis*, Yale University Press, New Haven, CT, 1901. que está disponible en el sitio WEB:

https://archive.org/details/117714283

La recopilación de E. B. Wilson incorpora también contribuciones del físico matemático e ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850–1925). El producto exterior entre vectores (producto cruz) fue introducido por William K. Clifford en su libro *Elements of Dynamic. An introduction to the study of motion and rest in solid and fluid bodies*, McMillan & Co., London, 1878.

2. **Galileo Galilei** (1564–1642).

La región de Toscana fue el centro del Renacimento italiano. Ubicada en lo que era la antigua Etruria, de donde deriva su nombre, fue adquiriendo un gran poder militar y económico hacia fines de la Edad Media. Primero como la República de Florencia, luego como el Ducado de Florencia y mas tarde como el Gran Ducado de Toscana, fue una región independiente, controlada entre los siglos XIV y XVIII por la poderosa familia Medici. Su puerto principal, en el mar Tirreno (nombre que también deriva del etrusco), es la antigua ciudad de Pisa, en la desembocadura del Arno. Fue precisamente en Pisa donde nació uno de los personajes principales del desarrollo de la mecánica, Galileo Galilei (1564-1642).

Galileo fue hijo de un famoso laudista, compositor, y teórico de la música, Vincenzo Galilei y de Giulia Ammannati. Vincenzo Galilei escribió una de los libros más influyentes sobre teoría de la música y de la armonía: "Dialogo della musica antica et della moderna" (1581). Además realizó numerosos experimentos para determinar la relación entre el tono (frecuencia natural) de una cuerda y la tensión aplicada a ésta. En 1574, Vincenzo y su familia se trasladan a Florencia y en 1581, Galileo entró a la Universidad de Pisa a estudiar medicina. Luego de un par de años como estudiante de medicina en esa universidad, Galileo decidió estudiar matemáticas y filosofía natural (i.e., física) con el matemático de la corte de Toscana, Ostilio Ricci, retornando en 1585 a Florencia. En 1589 obtuvo la cátedra de matemáticas en la universidad de Pisa y tres años mas tarde se cambió a la Universidad de Padua en la República de Venecia donde permaneció 18 años.

En 1604 Galileo descubrió la ley de movimiento uniformemente acelerado, y en 1607 las leyes de lanzamiento de proyectiles (movimiento parabólico). En 1610 realiza numerosos descubrimientos con el telescopio (recientemente inventado) y publica sus resultados en el "Sidereus Nuncius" (Mensajero Estelar). En particular descubre cuatro lunas de Júpiter, y observa la apariencia peculiar de Saturno (forma peculiar que mas tarde es identificada, por Huygens, como los Anillos de Saturno). Es nombrado matemático y físico de la corte del Gran Ducado de Toscana. En 1632 publicó en Florencia uno de sus libros más famosos: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* ("Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo"), por el cual fue condenado a arresto domiciliario de por vida por la Inquisición. En 1638 se publica en Leiden, Holanda, su último libro, "Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno due nuove scienze" (Los discursos y demostraciones matemáticas relativas a dos ciencias nuevas), que cubre la mayor parte de su trabajo en física de sus últimos treinta años. Galileo murió en Arcetri, situada en las colinas cerca de Florencia en 1642. (Este es un extracto del Capítulo *La Naturaleza de la Luz* del libro **Átomos**, de R. Benguria, por aparecer).

©Rafael Benguria, 2016