Solución Ayud 1 : Estática y Dinamica

Problema 1

1.- $v(t) = \frac{dx}{dt} = 0$; pendiente cero.

$0 ; t_2 ; t_6 ; t_8 - t_9 ; t_{13}$.

2.- $v(t) = \frac{dx}{dt} > 0$; pendiente positiva.

$t_2 - t_6$;

3.- $v(t) = \frac{dx}{dt} < 0$; pendiente negativa.

$t_0 - t_2 ; t_6 - t_8 ; t_9 - t_{13}$

4.- Pendiente es máxima.

$t_1 ; t_7$,

5.- Pendiente constante.

$t_3 - t_5 ; t_8 - t_9 ; t_{10} - t_{12}$.

6.- $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} < 0$; Curva concave ⌒

$t_0 - t_1 ; t_5 - t_7 , t_9 - t_{10}$

Problema 2

$$v(t) = At - Bt^2 + C\sqrt{t}$$

Decimos en primera instancia que el desplazamiento cuando $t=0$ es $s(t=0) = 0$ pues no se ha movido. Además

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \text{(pues estamos en un movimiento rectilíneo)}$$

$$\Rightarrow \quad ds = v(t)\,dt$$

como queremos saber la contribución de todos los ds, integremos entre $s_0 \to s$ en el lado izquierdo, y entre $t_0 \to t$ en el lado derecho

$$\Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \qquad \text{como } t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s - s_0 = \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \underset{0}{s_0} + \int_0^t At' + Bt'^2 + C\sqrt{t'}\,dt'$$

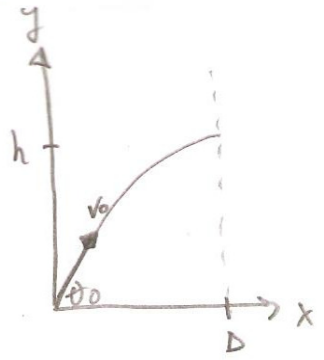
$$\Rightarrow \quad s(t) = 0 + \left(\frac{At'^2}{2} + B\frac{t'^3}{3} + C\frac{t^{3/2}}{3/2} \right)\Bigg|_0^t$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = \frac{A}{2}t^2 + \frac{B}{3}t^3 + \frac{2}{3}Ct^{3/2} \qquad \text{con } 0s \le t \le 10$$

Evaluamos $s(10s)$

$$\Rightarrow \quad s(10s) = \frac{A}{2}(10s)^2 + \frac{B}{3}(10s)^3 + \frac{2}{3}C(10s)^{3/2} = \frac{100\,(20+\sqrt{10})}{3}\ m$$

Problema 3



Tomamos las ecuaciones de itinerario:

$$x(t) = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_{ox}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_{oy}t^2$$

e instanciemos los valores que conocemos. (las constantes)

$x_0 = 0$; $v_{ox} = v_0 \cos\theta_0$; $a_x = 0$ $\rightarrow$ $x(t) = v_0 \cos\theta_0 \, t$

$y_0 = 0$; $v_{oy} = v_0 \sin\theta_0$; $a_y = -g$ $\rightarrow$ $y(t) = v_0 \sin\theta_0 \, t - \frac{1}{2}g t^2$

En el punto en que la bala pasa por la ventana (tiempo t_0) se tiene que cumplir que:

$$x(t_0) = v_0 \cos\theta_0 \, t_0 = D \qquad (1)$$

$$y(t_0) = v_0 \sin\theta_0 \, t_0 - \frac{1}{2}g t_0^2 = h \qquad (2)$$

Ahora, para que la bala pase horizontalmente se debe tener que $v_y(t_0) = 0$; si derivamos $y(t)$ obtenemos $v(t) = v_0 \sin\theta_0 - g t$, entonces.

$$v(t_0) = v_0 \sin\theta_0 - g t_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

Reemplazemos en (1) y (2) y obtenemos:

$$v_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0 = Dg \qquad (I)$$

$$\frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g} = h \Rightarrow v_0^2 \sin^2\theta_0 = 2gh \qquad (II)$$

Dividimos (I) y (II):

$$\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = \frac{D}{2h} \rightarrow tg(\theta_0) = \frac{2h}{D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 = arctg\left(\frac{2h}{D}\right)}$$

Tomemos $(I)^2$:

$$V_0^4 \cos^2\theta_0 \sin^2\theta_0 = D^2 g^2$$

$$\Rightarrow V_0^4 \sin^2\theta_0 (1 - \sin^2\theta_0) = D^2 g^2$$

y de (III) $\sin^2\theta_0 = \frac{2gh}{V_0^2}$ y reemplazemos arriba.

$$V_0^4 \frac{2gh}{V_0^2}\left(1 - \frac{2gh}{V_0^2}\right) = D^2 g^2$$

$$V_0^2\left(1 - \frac{2gh}{V_0^2}\right) = \frac{D^2 g}{2h}$$

$$\Rightarrow V_0^2\left(\frac{V_0^2 - 2gh}{V_0^2}\right) = \frac{D^2 g}{2h}$$

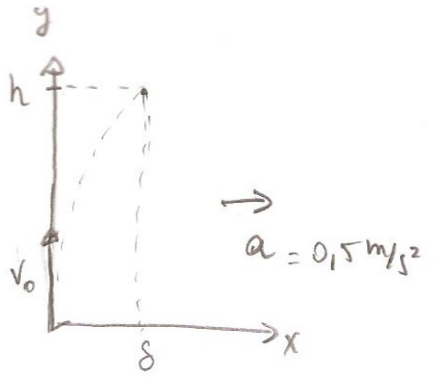
$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{D^2 g}{2h} - 2gh$$

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{D^2 g - 4gh^2}{2h}$$

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{g(D^2 - 4h^2)}{2h}$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{g(D^2 - 4h^2)}{2h}}$$ //

Problema 4 :



Ec. de itinerario

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 \qquad v_x(t) = a t$$

$$y(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v_y(t) = V_0 - g t$$

Sabemos que en $t_{máx}$ se tenpe:

$$x(t_{max}) = \frac{1}{2} a t_{max}^2 = \delta$$

$$y(t_{max}) = V_0 t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2 = h$$

y $v_y(t_{max}) = V_0 - g t_{max} = 0$

$$\rightarrow t_{max} = \frac{V_0}{g}$$ reemplazemos en $x(t_{max})$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} a \frac{V_0^2}{g} = \delta$$

$$\delta = \frac{a V_0^2}{2g}$$

Ahora debemos encontrar V_0^2, para ello utilizemos que:

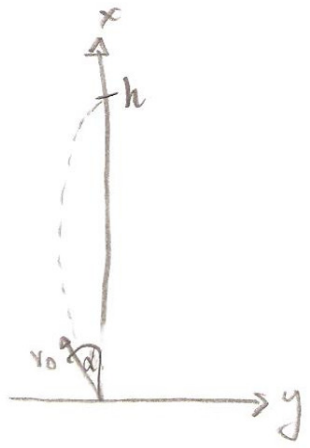
$v_f^2 = v_0^2 + 2ad$, en este caso $v_f = 0$, $a = -g$, $d = h$

$\Rightarrow 0 = V_0^2 - 2gh$

$\rightarrow V_0^2 = 2gh$, reemplazemos en δ

$$\Rightarrow \delta = \frac{a g h}{g} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{a}{g} h = 25\ m/s}$$

Problema Propuesto



Ecuaciones:

$$x(t) = -V_0 \sin\alpha\, t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$y(t) = V_0 \cos\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$V_x(t) = -V_0 \sin\alpha + at$$
$$V_y(t) = V_0 \cos\alpha - gt$$

Se debe cumplir que en t_{max}.

$$x(t_{max}) = -V_0 \sin\alpha\, t_{max} + \frac{1}{2} a t_{max}^2 = 0$$
$$y(t_{max}) = V_0 \cos\alpha\, t_{max} - \frac{1}{2} g t^2 = h$$
$$V_y(t_{max}) = V_0 \cos\alpha - g t_{max} = 0$$

con $V_y(t_{max})$ podemos calcular t_{max}:

$$t_{max} = \frac{V_0 \cos\alpha}{g}$$

y reemplazando en $x(t_{max})$ tenemos.

$$-V_0 \sin\alpha \frac{V_0 \cos\alpha}{g} + \frac{1}{2} a \frac{V_0^2 \cos^2\alpha}{g^2} = 0$$

$$\rightarrow -\sin\alpha \cos\alpha + \frac{1}{2} a \frac{\cos^2\alpha}{g} = 0 \quad / \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\rightarrow -\tan\alpha + \frac{1}{2}\frac{a}{g} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{a}{2g}} \qquad \alpha = \arctg\left(\frac{a}{2g}\right)$$

y reemplazando t_{max} en $y(t_{max})$ obtenemos.

$$h = \frac{V_0^2 \cos\alpha}{2g}.$$