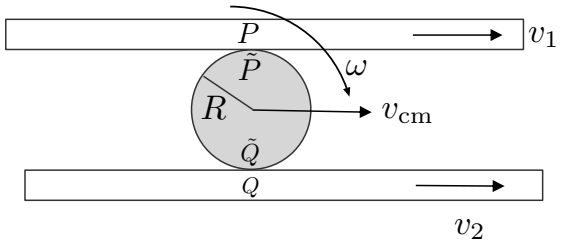
Problemas de Movimiento del Sólido Rígido en Dos Dimensiones.

Rafael Benguria y M. Cristina Depassier

1. *Condición de Rodadura.* Considere dos superficies planas paralelas, separadas por una distancia $2R$, que se mueven con respecto a un sistema fijo con velocidades v_1 y v_2 respectivamente. Entre ellas se ubica un cilindro de radio R, el que rueda sin deslizar con respecto a ambas superficies. Determine la velocidad del Centro de Masa con respecto al sistema fijo y también la velocidad angular del cilindro.



Solución: Para calcular v_{CM} y ω, basta imponer la condición de rodar sin resbalar en los puntos de contacto (ver puntos P y Q de la figura. Llamemos P y $\tilde{P}$ al punto de contacto superior (aquí P está visto desde la superficie plana y $\tilde{P}$ desde el cilindro. La condición de rodar sin resbalar en el punto de contacto P está dada por

$$v_P = v_{\tilde{P}}. \tag{1.1}$$

Como P es solidario a la superficie de arriba $v_P = v_1$. Por otra parte, por composición de velocidades,

$$v_{\tilde{P}} = v_{CM} + v_{\tilde{P},CR/CM} = v_{CM} + \omega\, R. \tag{1.2}$$

Análogamente, la condición de rodar sin resbalar en el punto de contacto Q está dada por

$$v_Q = v_{\tilde{Q}} \tag{1.3}$$

Como Q es solidario a la superficie de abajo $v_Q = v_2$. Por otra parte, por composición de velocidades,

$$v_{\tilde{Q}} = v_{CM} + v_{\tilde{Q},CR/CM} = v_{CM} - \omega\, R. \tag{1.4}$$

Enonces tenemos las dos ecuaciones,

$$v_{CM} + \omega\, R = v_1, \tag{1.5}$$

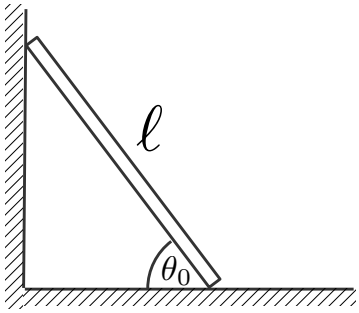
y

$$v_{CM} - \omega\, R = v_2, \tag{1.6}$$

para las incógnitas v_{CM} y ω. Finalmente resolviendo estas dos ecuaciones lineales obtenemos,

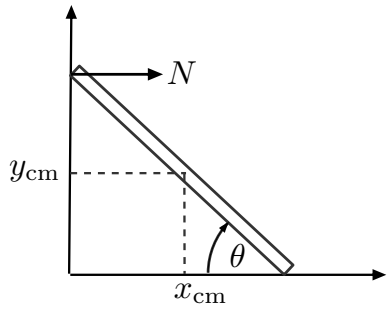
$$v_{CM} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \qquad y \qquad \omega = \frac{1}{2R}(v_1 - v_2). \tag{1.7}$$

2. *Movimiento de una escalera que cae.* Considere una escalera homogénea de masa M y largo ℓ que está apoyada en el suelo y en el piso tal como se indica en la figura. Suponga que inicialmente la escalera está en reposo y forma un ángulo θ_0 con el suelo y que no hay roce entre la escalera y la pared ó entre la escalera y el piso. Encuentre la ecuación de movimiento de la escalera, y el ángulo θ_d que hace la escalera con el piso cuando ésta se despega de la pared.



Nota: Este problema está discutido en muchos textos. Ver por ejemplo: S. B. Cahn, and B. E. Nadgorny, *A Guide to Physics Problems, part 1. Mechanics, Relativity and Electrodynamics*, Plenum Press, New York, 1994, página 16, problema 1.28.

Solución: Como las superficies son *lisas* (i.e., no hay roce entre la escalera y la superficies de apoyo, se conserva la energía. Usando la conservación de la energía de la escalera no es difícil encontrar la ecuación de movimiento que describe la evolución de la escalera. Como la escalera es homogénea, la posición de su centro de masa está en el centro de ésta, i.e., a distancia $\ell/2$ de cada uno de los extremos. Llamemos x_{CM}, e y_{CM} a las coordenadas del centro de masa, referidas al sistema cartesiano de la figura (en que el eje x coincide con el piso, y el eje y con la pared donde se apoya la escalera; la escalera misma se encuentra en el primer cuadrante como se inica en la figura). Llamemos θ al ángulo que forma la escalera con el piso (como se indica en la figura: i.e., la dirección de crecimiento de θ es a lo largo de los punteros del reloj). Mientras la escalera está apoyada en ambos extremos, las



coordenadas del centro de masa de la escalera se pueden determinar como función de θ. De la figura vemos que,

$$x_{CM} = \frac{\ell}{2}\,\cos\theta \tag{2.1}$$

en tanto que,

$$y_{CM} = \frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.2}$$

(nótese que de estas dos ecuaciones tenemos que $x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = \ell^2$, i.e., mientras la escalera está apoyada en ambos extremos, su centro de masa se mueve sobre un círculo de radio $\ell/2$). A partir de (2.1) y (2.2), podemos calcular las componentes cartesianas de la velocidad del centro de masa. Así obtenemos,

$$\dot{x}_{CM} = -\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \tag{2.3}$$

e,

$$\dot{y}_{CM} = \frac{\ell}{2}\,\cos\theta\,\dot{\theta}. \tag{2.4}$$

Entonces, la energía cinética del centro de masa de la escalera está dada por,

$$K_{CM} = \frac{1}{2}M\,V_{CM}^2 \equiv \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2\right) = \frac{1}{8}M\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{2.5}$$

Por otra parte, si elegimos el eje z saliendo de la página (i.e., $\hat{k}$ apuntando hacia afuera), de acuerdo a la regla de la mano derecha, el vector velocidad angular que describe el movimiento de rotación de la escalera está dado por,

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}. \tag{2.6}$$

Como el momento de inercia de la escalera (con respecto al centro de masa) está dado por $I = M\ell^2/12$ (pues se trata de una varilla homogénea de masa M y de largo ℓ), la energía cinética con respecto al centro de masa de la escalera está dada por,

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2}I\,\omega^2 \equiv \frac{1}{24}M\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{2.7}$$

Sumado las dos contribuciones, usando el *Teorema de Descomposición* de la energía cinética, obtenemos la energía cinética total de la escalera,

$$K = K_{CM} + K_{cr/CM} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) M\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{2.8}$$

Por otra parte, si elegimos el nivel del piso como nivel de referencia de la energía potencial gravitatoria, la energía potencial de la escalera está dada por

$$V(\theta) = M\,g\,y_{CM} = M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta. \tag{2.9}$$

Entonces, de (2.8) y (2.9) obtenemos la energía total de la escalera,

$$E = K + V = \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta. \tag{2.10}$$

Si usamos el hecho que inicialmente $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$, a partir de (2.10) obtenemos, $E = M\,g(\ell/2)\operatorname{sen}\theta_0$, de modo que,

$$\frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta = M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta_0,$$

y así,

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{\ell}(\operatorname{sen}\theta_0 - \operatorname{sen}\theta). \tag{2.11}$$

Derivando (2.11) con respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de movimiento para θ,

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\theta = 0, \tag{2.12}$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal, para θ. Usando está ecuación diferencial y el estado inicial $\theta(0) = \theta_0$, y $\dot{\theta}(0) = 0$, se puede determinar la evolución $\theta(t)$ de la posición de la escalera.

Nota: Esta ecuación se puede resolver en forma analítica en términos de funciones elípticas de Jacobi, pero eso va mas allá del nivel de este curso. Por otra parte este problema de valores iniciales se puede resolver numericamente usando MAPLE, MATLAB, MATHEMATICA, u otros softwares de análisis numérico.

Con el objeto de determinar el ángulo de despegue de la pared, usamos la componente horizontal de la ecuación de movimiento del centro de masa de la escalera. A partir de (2.3) podemos calcular la componente horizontal de la aceleración del centro de masa, la que está dada por

$$\ddot{x}_{CM} = -\frac{\ell}{2}\,\operatorname{sen}\theta\,\ddot{\theta} - \frac{\ell}{2}\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2. \tag{2.13}$$

Si llamamos $\vec{N} = N\,\hat{\imath}$ a la reacción de la pared sobre la escalera (la cual es perpendicular a la pared, i.e., paralela al eje x), la componente horizontal de la ecuación de movimiento del centro de masa queda dada por,

$$N = M\,\ddot{x}_{CM} = -M\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} - M\frac{\ell}{2}\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2. \tag{2.14}$$

(Nótese que $\vec{N}$ es la única fuerza que tiene componente horizontal). Como es habitual, la condición de despegue es $N = 0$. Así, en el momento que la escalera se despega de la pared, de (2.14) tenemos,

$$\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2 = 0,$$

y, usando las expresiones para $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}^2$ obtenidas en (2.11) y (2.12) respectivamente, obtenemos,

$$-\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{3g}{2\ell}\cos\theta + \cos\theta\,3\frac{g}{\ell}(\mathrm{sen}\,\theta_0 - \mathrm{sen}\,\theta). \tag{2.15}$$

Simplificando, finalmente obtenemos que el ángulo de despegue, θ_d, está dado por,

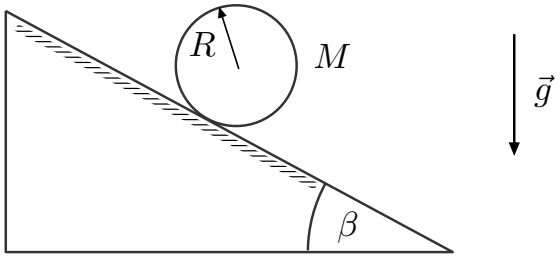
$$\mathrm{sen}\,\theta_d = \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_0.$$

Es decir,

$$\theta_d = \mathrm{arcsen}\left(\frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_0\right).$$

Por ejemplo, si $\theta_0 = 60°$, $\theta_d = \mathrm{arcsen}(\sqrt{3}/3) \approx 35,24°$.

3. *Cilindro homogéneo rodando sin resbalar por un plano inclinado:* Considere un cilindro homogéneo macizo de masa M y radio R que rueda sin resbalar por un plano inclinado de ángulo β. Encuentre la aceleración del CM del cilindro y el coeficiente de roce mínimo entre el plano inclinado y el cilindro para que este ruede sin resbalar.



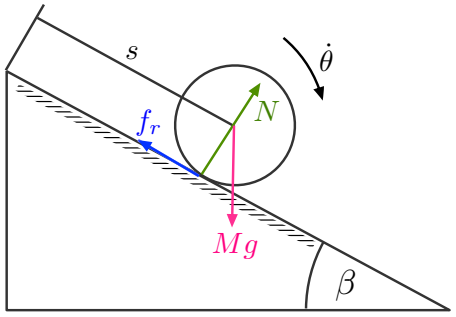
Solución: Llamemos s a la posición del CM del cilindro medida desde el vértice del plano inclinado como se muestra en la figura y ω a su velocidad angular. Si el cilindro rueda sin resbalar, la condición de rodadura entre $\dot{s}$ y ω está dada por,

$$\dot{s} = R\omega. \tag{3.1}$$

En términos de $\dot{s}$ y ω la energía cinética del CM del cilindro está dada por,

$$K_{CM} = \frac{1}{2}M\dot{s}^2, \tag{3.2}$$

en tanto que su energía cinética con respecto al CM está dada por



$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{4}M\dot{s}^2. \tag{3.3}$$

Para obtener la última igualdad usamos la condición de rodadura (3.1). De (3.2), y (3.3), tenemos que la energía cinética total del cilindro es,

$$K = K_{CM} + K_{cr/CM} = \frac{3}{4}M\dot{s}^2. \tag{3.4}$$

Por otra parte si usamos la altura del CM cuando el cilindro se encuentra en el vértice del plano inclinado como nivel de referencia del potencial gravitatorio tenemos que la energía potencial del cilindro está dada en términos de s por,

$$V(s) = -Mg\, s\ \text{sen}\,\beta. \tag{3.5}$$

De (3.4), y (3.5), tenemos que la energía total del cilindro está dada por,

$$E = K + V = \frac{3}{4}M\dot{s}^2 - Mg\, s\ \text{sen}\,\beta. \tag{3.6}$$

Como la fuerza de roce no hace trabajo, ya que no hay deslizamiento relativo entre el cilindro y el plano inclinado, se conserva la energía. Entonces, $dE/dt = 0$, y así, de (3.6) obtenemos,

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{3}{2}M\dot{s}\,\ddot{s} - Mg\,\dot{s}\ \text{sen}\,\beta. \tag{3.7}$$

Como $\dot{s} \neq 0$ pues el cilindro no está en equilibrio, de (3.7) obtenemos finalmente que la aceleración de su CM es,

$$\ddot{s} = \frac{2}{3}\, g \,\operatorname{sen}\beta. \tag{3.8}$$

Usando la condición de rodadura, vemos también que la aceleración angular del cilindro con respecto al CM está dada por

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\ddot{s}}{R} = \frac{2}{3}\,\frac{g}{R}\,\operatorname{sen}\beta. \tag{3.9}$$

Sobre el cilindro actúan tres fuerzas: su peso, $M\vec{g}$ (aplicada en el CM), la fuerza de reacción del plano inclinado sobre el cilindro, N (aplicada en el punto de contacto entre el cilindro y el plano inclinado) y la fuerza de roce f_r (también aplicada en el punto de contacto entre el cilindro y el plano inclinado). De estas tres fuerzas, la única que hace torque con respecto al CM es f_r. De la ecuación de torque, usando (3.9) tenemos que,

$$-Rf_r\hat{k} = \frac{d\vec{L}_{cr/CM}}{dt} = -I_{CM}\dot{\omega}\,\hat{k} = -\frac{1}{2}MR^2\,\frac{2}{3}\,\frac{g}{R}\,\operatorname{sen}\beta\,\hat{k} = -\frac{1}{3}M\,g\,R\,\operatorname{sen}\beta\,\hat{k}. \tag{3.10}$$

Así, $f_r = (Mg/3)\operatorname{sen}\beta$. Ahora, para encontrar el coeficiente de roce mínimo que garantice la condición de rodar sin resbalar, usamos que

$$f_r \leq \mu N = \mu M g\,\cos\beta. \tag{3.11}$$

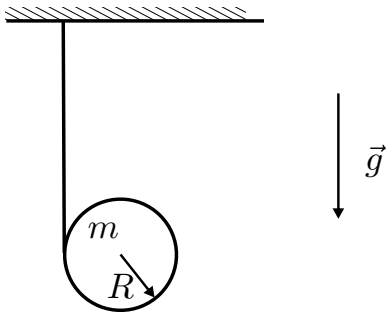
y finalmente reemplazando en (3.11) el valor encontrado para f_r, obtenemos,

$$\mu \geq \frac{1}{3}\tan\beta. \tag{3.12}$$

4. *El yo–yo desenrollándose.* Considere un yo–yo (cilindro macizo de masa m y radio R) el cual está suspendido de un punto fijo O en el techo y que cae desenrrollándose como se indica en la figura. Encuentre la aceleración de su Centro de Masa.

Solución: Llamemos s a la posición vertical del CM del yo–yo medida desde el techo y ω a la velocidad angular del yo–yo. El centro de masa del cilindro se mueve en forma vertical, y su rapidez es $\dot{s}$. Así, la energía cinética del centro de masa del yo–yo, está dada por,

$$K_{CM} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2. \tag{4.1}$$

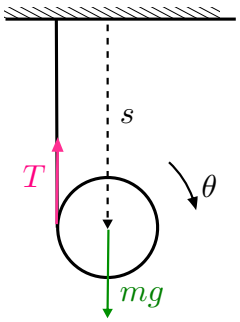


Ahora encontraremos la energía cinética con respecto al centro de masas del yo–yo. Usando la regla de la mano derecha, el vector velocidad angular del yo–yo está dado por

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}.$$

Por otra parte, como el yo–yo es un disco macizo homogéneo, su centro de masa está en el centro del cilindro, y su momento de inercia (con respecto al centro de masa) está dado por $I = mR^2/2$. Entonces, la energía cinética con respecto al centro de masa está dada por,

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2} I\dot{\omega}^2 = \frac{1}{4} m\, R^2\dot{\theta}^2. \tag{4.2}$$



Usando la condición de rodar sin resbalar tenemos que $\dot{s} = R\,\dot{\theta}$, de modo que finalmente la energía cinética total del yo–yo es,

$$K = K_{CM} + K_{cr/CM} = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 + \frac{1}{4} m\, R^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m\dot{s}^2, \tag{4.3}$$

(en que la última igualdad sigue de usar la condición de rodadura, $\dot{s} = R\,\dot{\theta}$). Por otra parte, escogiendo el nivel del techo como nivel de referencia para el potencial gravitatorio, tenemos que la energía potencial del yo–yo está dada por

$$V(s) = -m\, g\, s. \tag{4.4}$$

De estas dos últimas ecuaciones obtenemos la energía total del yo–yo, la que está dada por,

$$E = K + V = \frac{3}{4} m \dot{s}^2 - m\, g\, s. \tag{4.5}$$

Como la tensión no hace trabajo, se conserva la energía del yo–yo, i.e., E es una constante. Derivando (4.5) con respecto al tiempo, finalmente obtenemos,

$$\ddot{s} = \frac{2}{3} g,$$

que es, por supuesto, el mismo resultado que se purde obtener usando las ecuaciones de dinámica. De la relación entre $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$ obtenemos la aceleración angular del yo–yo en su caída, i.e.,

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{\ddot{s}}{R} = \frac{2\, g}{3\, R}.$$

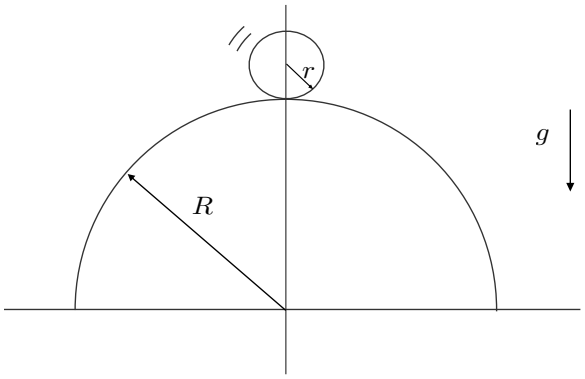
Si además queremos encontrar la tensión de la cuerda, usamos la ecuación de torque con respecto al CM del yo–yo. En este caso,

$$T\, R = I_{CM} \alpha = \frac{1}{2} m\, R^2\, \frac{2\, g}{3\, R} = \frac{1}{3} m\, g\, R,$$

de modo que

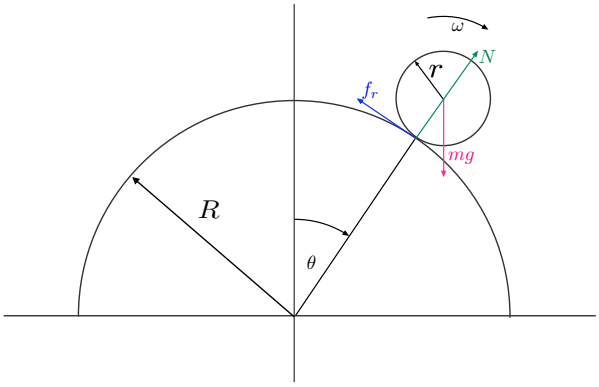
$$T = \frac{1}{3} m\, g.$$

5. *Una esfera maciza que rueda por un semicilindro: ángulo de despegue:* Consideremos una esfera de masa m y radio r que rueda sin resbalar sobre un semicilindro fijo de radio R como se muestra en la figura. Si la esfera parte desde el reposo desde el punto más alto del cilindro calcule el ángulo de despegue.



Solución: Llamemos θ a la posición del CM de la esfera, medida con respecto a la ertical, como se indica en la figura. Las fuerzas que actúan sobre la esfera, mientras está ligada al semicilindro son: su peso, la normal y la fuerza de reacción como se muestra en la figura. Usamos coordenadas polares $\rho = (R + r)$ (el cual es constante mientras el cilindro está sobre el cilindro) y θ. La aceleración del CM en polares, con ρ constante está dada por,

$$\vec{a} = -(R + r)\dot{\theta}^2\,\hat{\rho} + (R + r)\ddot{\theta}\,\hat{\theta}. \tag{5.1}$$



La fuerza total que actúa sobre el centro de masa de la esfera en la base polar es,

$$\vec{F} = (N - m\,g\cos\theta)\,\hat{\rho} + (m\,g\ \mathrm{sen}\,\theta - f_r)\hat{\theta}. \tag{5.2}$$

De la componente ρ de la ecuación de Newton entonces tenemos que

$$N = m\,g\cos\theta - m(R + r)\dot{\theta}^2. \tag{5.3}$$

La condición que determina el ángulo de despegue es $N(\theta) = 0$. Para poder usar esta condición, necesitamos encontrar $\dot{\theta}^2$ como función de θ y reemplazarlo en (5.3). Para esto, usamos conservación de energía. De hecho, mientras la esfera rueda sin deslizar, la fuerza de roce no hace trabajo y se conserva la energía de la esfera. La energía de la esfera está dada por,

$$E = K + V = K_{CM} + K_{cr/CM} + V. \tag{5.4}$$

Si elegimos la posición inicial del CM de la esfera como nivel de referencia del potencial gravitatorio, entonces,

$$V(\theta) = -m\,g(R + r)\,(1 - \cos\theta)\,. \tag{5.5}$$

Como la rapidez del CM es $(R+r)\dot{\theta}$,

$$K_{CM} = \frac{1}{2} m\,(R+r)^2\dot{\theta}^2. \tag{5.6}$$

Por otra parte, si llamamos ω a la velocidad angular de la esfera,

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{5} m\, r^2\, \omega^2, \tag{5.7}$$

ya que el momento de inercia de una efera maciza de masa m y radio r es $2mr^2/5$. Las variables ω y $\dot{\theta}$ están relacionadas por la *condición de rodadura* (i.e., por el hecho que la esfera rueda sin deslizar por el semicilindro de radio R). Para obtener la condición de rodadura imponemos que las velocidades de los puntos de contacto (i.e., P y $\tilde{P}$ en la figura) coinciden. Así tenemos que,

$$0 = v_P = v_{\tilde{P}} = (R+r)\dot{\theta} - \omega\, r, \tag{5.8}$$

puesto que el punto P está en reposo (es solidario al semicilindro) y donde hemos usado la ley de composición de velocidades para calcular la velocidad de $\tilde{P}$ con respecto al sistema fijo (i.e., $v_{\tilde{P}} \equiv v_{\tilde{P}/suelo} = v_{CM/suelo} + v_{\tilde{P},cr/esfera}$. Entonces, $\omega = (R+r)\dot{\theta}/r$. Reemplazando esta expresión en (5.7), luego usando (5.5), (5.6), y (5.7) en (5.4), y usando la conservación de la energía finalmente obtenemos que

$$0 = E_{in} = E = \frac{7}{10} m\,(R+r)^2\dot{\theta}^2 - m\, g(R+r)\,(1-\cos\theta)\,. \tag{5.9}$$

De esta expresión obtenemos $\dot{\theta}^2$ en términos de θ, i.e.,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{(R+r)}\,(1-\cos\theta)\,. \tag{5.10}$$

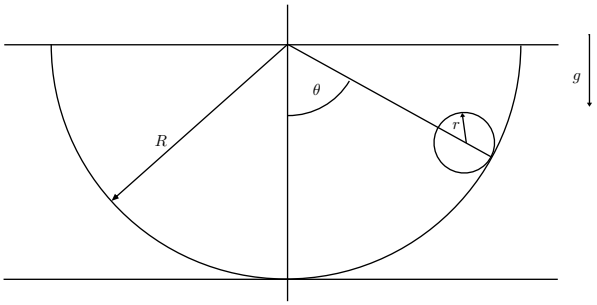
Reemplazando este resultado en la expresión de N (i.e., en (5.3)) obtenemos.

$$N(\theta) = \frac{1}{7} m\, g\ (17\cos\theta - 10)\,. \tag{5.11}$$

Para el ángulo de despegue tenemos que $N(\theta_d) = 0$, de donde finalmente,

$$\theta_d = \arccos\frac{10}{17} \approx 0,942\,\text{rads} \tag{5.12}$$

6. *Oscilaciones de un cilindro en el interior de un bol.* Considere un cilindro macizo de masa m, y radio r que rueda sin resbalar por una concavidad cilíndrica de radio $R > r$:



Solución: Como el cilindro rueda sin resbalar se conserva la energía del cilindro. Si llamamos θ al ángulo que mide la posición del CM del cilindro con respecto a la vertical, ω a la velocidad angular del cilindro, y elegimos el nivel más bajo del CM (i.e., cuando $\theta = 0$) al nivel de referencia del potencial gravitatorio tenemos que

$$E = K+V = K_{CM}+K_{cr/CM}+V = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2+m\,g\,(R-r)\,(1-\cos\theta)\,. \tag{6.1}$$

La condición de rodar sin resbalar esta vez está dada por,

$$0 = v_P = v_{\tilde{P}} = (R-r)\dot{\theta} - \omega r, \tag{6.2}$$

de donde $\omega = (R-r)\dot{\theta}/r$. Reemplazando esta expresión en (6.1) y usando que $I_{CM} = mr^2/2$ (que es el momento de inercia de un cilindro macizo), obtenemos,

$$E = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + m\,g\,(R-r)\,(1-\cos\theta)\,. \tag{6.3}$$

Como la energía es constante, $dE/dt = 0$; derivando entonces (6.4) con respecto a t, simplificando el resultado por $\dot{\theta}$ y ordenando finalmente la ecuación que determina la evolución de θ:

$$\ddot{\theta} + \frac{2\,g}{3\,(R-r)}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{6.4}$$

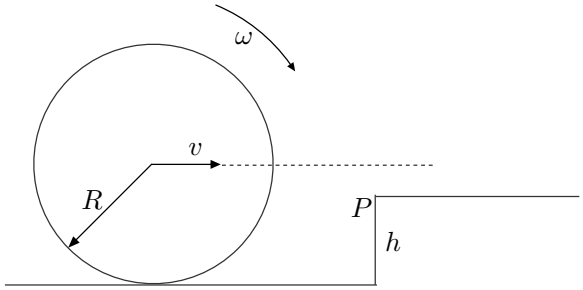
Para pequeñas oscilaciones, $\theta \ll 1$, de modo que $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$ y entonces de (6.4) obtenemos,

$$\ddot{\theta} + \frac{2\,g}{3\,(R-r)}\theta = 0. \tag{6.5}$$

que es una ecuación de movimiento armónico simple, cuyas soluciones son periódicas de período,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{R-r}{g}\right)}. \tag{6.6}$$

7. *Esfera maciza que sube un escalón.* Considere una esfera maciza de masa M y radio R que rueda sin resbalar con una velocidad v por una superficie horizontal rugosa. En su recorrido la esfera se encuentra con un escalón de altura h como se muestra en la figura. ¿Cuál es el mínimo valor de v para que la rueda pueda subir el escalón?

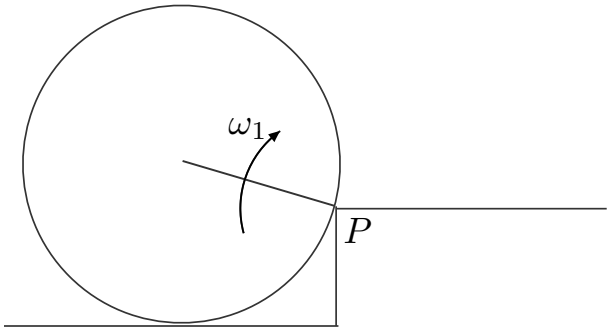


Solución: Si llamamos ω a la velocidad angular de la rueda antes del choque con el escalón, usando la condición de rodar sin resbalar tenemos que

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

La estrategia para resolver este problema es: i) Primero resolver el choque de la esfera con el escalón y, en particular calcular la velocidad angular de la esfera justo después del choque; ii) usar conservación de energía para determinar la posibilidad que después del choque la esfera alcance a subir el escalón. Llamemos P al vértice superior del escalón, el cual va a ser el punto de contacto de la esfera con el escalón en el momento del choque. En el momento del choque hay una fuerza impulsiva, N, que actúa sobre la esfera. Esta fuerza de reacción es perpendicular a la tangente a la esfera y por lo tanto el torque que hace esta fuerza impulsiva sobre el Centro de Masa de la esfera es cero (i.e., el brazo es paralelo a la fuerza). Entonces se conserva el momentum angular de la esfera con respecto a P. Por el teorema de descomposición del Momentum Angular tenemos que el momentum angular antes del choque de la esfera es

$$\vec{L}_P^{in} = \vec{L}_{CM,P}^{in} + \vec{L}_{cr/CM}^{in}. \tag{7.1}$$



El momentum angular del CM con respecto a P está dado por,

$$\vec{L}^{in}_{CM,P} = -(R-h)Mv\,\hat{k}, \tag{7.2}$$

en que $\hat{k}$ sale de la hoja de papel. Por otra parte,

$$\vec{L}^{in}_{cr/CM} = I_{CM}(-\omega\hat{k}), \tag{7.3}$$

de acuerdo a la regla de la mano derecha. Aquí, $I_{CM} = 2MR^2/5$ es el momento de inercia de la esfera maciza con respecto al centro de masa. De (7.1), (7.2), y (7.3), usando la condición de rodar sin resbalar $v = \omega\, R$ obtenemos,

$$\vec{L}^{in}_{P} = -M\left(\frac{7}{5}R - h\right)\, R\,\omega\hat{k}. \tag{7.4}$$

Por otra parte, como la esfera después del choque gira en torno al punto fijo P, si llamamos ω_1 a su velocidad angular justo después del choque, entonces,

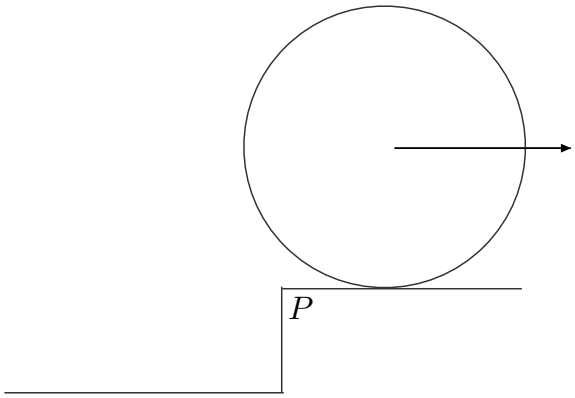
$$\vec{L}^{fin}_{P} = -I_P\omega_1\,\hat{k}. \tag{7.5}$$

Aquí, por el teorema de los ejes paralelos (Teorema de Steiner), como la distancia de P al CM es R, entonces,

$$I_P = I_{CM} + M\,R^2 = \frac{2}{5}M\,R^2 + M\,R^2 = \frac{7}{5}M\,R^2.$$

Usando la conservación del momentum angular con respecto a P, de (7.4) y (7.5) tenemos,

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{5h}{7R}\right)\omega. \tag{7.6}$$



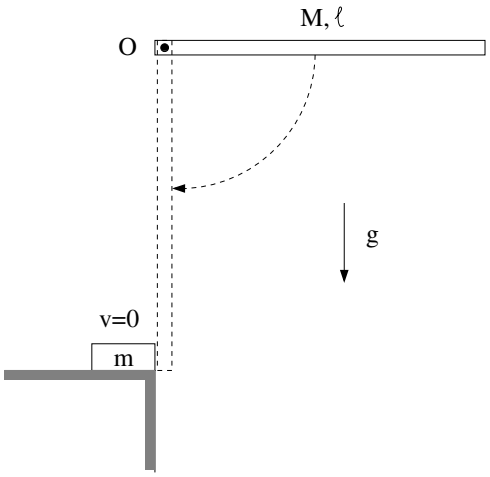
Finalmente, para que el cilindro pueda subir el escalón, su energía cinética inicial (al empezar a subir) debe ser igual o mayor que la diferencia de energía potencial del CM, i.e.,

$$\frac{1}{2} I_P \omega_1^2 \geq M\ h. \tag{7.7}$$

Finalmente, de (7.6) y (7.7), finalmente obtenemos,

$$v = \omega\, R > \frac{R}{7R - 5h} \sqrt{70\, g\, h}. \tag{7.8}$$

8. *Varilla chocando con un bloque.* Considere una varilla homogénea de largo ℓ y masa M que esta sujeta de un eje fijo O como se muestra en la figura. Originalmente la varilla está dispuesta a lo largo de la horizontal. Se suelta la varilla desde el reposo y cuando llega a la vertical choca contra un bloque de masa m que se encuentra sobre una mesa (horizontal). Suponiendo que el choque es elástico, encuentre la velocidad con que se mueve el bloque después del choque, y la velocidad angular de la varilla justo después del choque. ¿Hasta qué altura sobre la mesa llega la varilla después del choque?

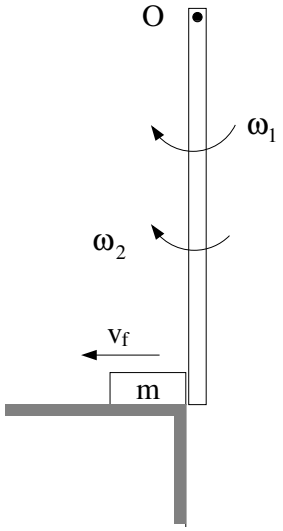


Solución: Lo primero que hacemos es calcular la velocidad angular de la varilla cuando llega a la posición vertical justo antes del choque. Suponiendo que no hay pérdida de energía por fricción en el eje de rotación, podemos calcular la velocidad angular igualando la energía inicial de la varilla con su energía justo antes del choque. Fijemos el nivel de referencia del potencial gravitatorio a la altura del eje. Como el CM de la varilla está inicialmente justo a ese nivel y como la varilla parte desde el reposo, $E^{in}_{var} = 0$. Cuando la varilla está en la posición vertical,

$$V = -M\, g \frac{\ell}{2},$$

pues su CM está justo a $\ell/2$ por debajo del nivel de referencia. Como la varilla está girando con respecto a un eje fijo (en este caso el eje que pasa por O) su energía cinética en todo momento antes del choque está dada por,

$$K = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2.$$



en que ω es su velocidad angular de rotación (la cual va aumentando a medida que el CM de la varilla va cayendo), e $I_O = M\,\ell^2/3$ es el momento de inercia de la varilla con respecto a su extremo. Si llamamos ω_1 a la velocidad angular de la varilla justo antes del choque, entonces la energía total de la varilla en ese instante, digamos E^{fin} es

$$E^{fin} = \frac{1}{2} I_O\,\omega_1^2 - M\,g\frac{\ell}{2} = \frac{1}{6} M\,\ell^2\,\omega_1^2 - M\,g\frac{\ell}{2} = E^{in} = 0, \tag{8.1}$$

de donde obtenemos,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}. \tag{8.2}$$

Una vez encontrado el estado de la varilla justo antes del choque podemos resolver el choque elástico entre la varilla y el bloque de masa m (el cula está inicialmente en reposo). Un aspecto muy importante de destacar en este choque es que, debido a que la varilla está sujeta del eje fijo O, durante el choque el eje hace una fuerza impulsiva sobre el sistema (en particular sobre la varilla) y esta fuerza es externa. Por lo tanto, **no se conserva** el momentum lineal del sistema. Sin embargo, esta fuerza externa impulsiva, como está aplicada justo en O, no hace torque con respecto a este punto. Así, no hay torques externos (impulsivos) sobre el sistema varilla–bloque durante el choque y por lo tanto se conserva el momentum angular del sistema. Entonces, para resolver el choque tenemos dos leyes de conservación: i) la conservación de energía (choque elástico) y ii) la conservación del momentum angular con respecto a O. Llamemos ω_2 a la velocidad angular de la varilla y v_f a la velocidad del bloque justo después del choque. En téminos de ω_1, ω_2, y v_f, podemos expresar la conservación de energía como

$$\frac{1}{2} I_O\,\omega_1^2 = \frac{1}{2} I_O\,\omega_2^2 + \frac{1}{2} m\,v_f^2. \tag{8.3}$$

y la conservación del momentum angular con respecto al punto O como

$$-I_O\,\omega_1\,\hat{k} = -I_O\,\omega_2\,\hat{k} - m\,\ell\,v_f\hat{k} \tag{8.4}$$

en que $\hat{k}$ sale dela hoja. Tenemos entonces dos ecuaciones, i.e., (8.3) y (8.4), para determinar ω_2 y v_f. Conviene reescribir estas dos ecuaciones de modo de dejar todo lo que depende de un cuerpo a un lado y lo que depende del otro al otro lado, y luego dividir las dos ecuaciones resultantes pra encontrar una ecuación lineal. Reescribiendo la ecuación de conservación de la energía cinética tenemos que

$$I_O\,(\omega_1^2 - \omega_2^2) = m\,v_f^2. \tag{8.5}$$

y de la ecuación de conservación de momentum angular tenemos además,

$$I_O\,(\omega_1 - \omega_2) = m\,v_f\,\ell. \tag{8.6}$$

Dividiendo miembro a miembro (8.5) por (8.6) obtenemos,

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{v_f}{\ell} \tag{8.7}$$

Finalmente, resolviendo el par de ecuaciones lineales (8.6) y (8.7) para ω_2 y v_f, recordando que $I_O = M\ell^2/3$, finalmente obtenemos,

$$v_f = \frac{2\,M\,\ell}{3\,m + M}\,\omega_1 = \frac{2\,M}{3\,m + M}\,\sqrt{3\,g\ell}. \tag{8.8}$$

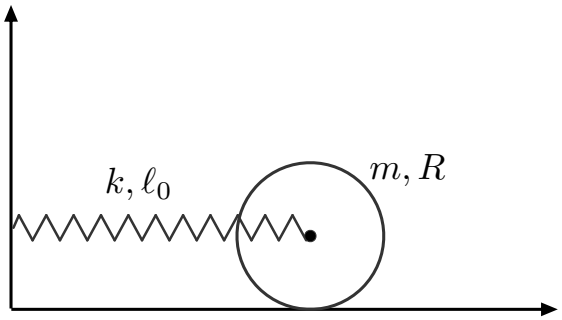
y

$$\omega_2 = \frac{M - 3\,m}{3\,m + M}\,\omega_1 = \frac{M - 3\,m}{3\,m + M}\,\sqrt{\frac{3\,g}{\ell}}. \tag{8.9}$$

Usando conservación de energía, podemos calcular la altura final de la barra después del choque,

$$h = \frac{\ell}{2}\left(\frac{M - 3\,m}{M + 3\,m}\right)^2. \tag{8.10}$$

9. *Cilindro macizo unido a una pared por un resorte.* Uno de los extremos de un resorte ideal de constante elástica k se fija a una pared. El otro extremo se fija al eje de una rueda cilíndrica maciza de radio R y masa M. El resorte se comprime una distancia δ, manteniendo su posición horizontal. Estando el cilindro en contacto con el suelo se suelta éste dede el reposo. Suponga que el suelo es lo suficientemente rugoso de modo que en todo momento el cilindro rueda sin resbalar. Calcule la velocidad angular del cilindro en el momento en que la elongación del resorte es nula.

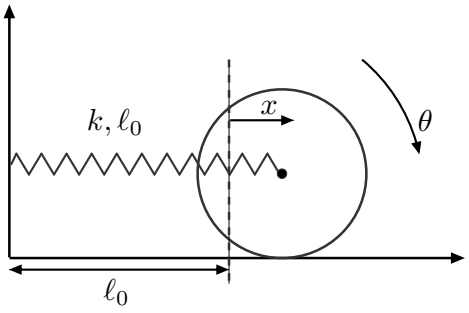


Solución: Si llamamos s a la posición horizontal del Centro de Masa del cilindro medida a a partir del largo natural del resorte, la energía cinética del CM del cilindro es

$$K_{CM} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \tag{9.1}$$

en tanto que la energía potencial del resorte es

$$V(x) = \frac{1}{2}k\,x^2. \tag{9.2}$$



Ahora, sea $\dot{\theta}$ la velocidad angular del cilindro con respecto al CM. Como el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa horizontal,

$$\dot{x} = R\dot{\theta}. \tag{9.3}$$

Finalmente la energía cinética del cilindro con respecto al CM de éste es,

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2} I\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} M \dot{x}^2, \tag{9.4}$$

en que hemos usado la condición de rodadura (9.3) para obtener el último miembro de (9.4). Usando (9.1), (9.2) y (9.4), la energía total del sistema es,

$$E = K_{CM} + K_{cr/CM} + V = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2. \tag{9.5}$$

La energía total del sistema se conserva pues el cilindro rueda sin resbalar. En $t = 0$, $x = -\delta$, y $\dot{x} = 0$, y así,

$$E = E(0) = \frac{1}{2} k \delta^2. \tag{9.6}$$

En el instante en que el resorte se encuentra en su largo natural, $x = 0$ y así de (9.5) y (9.6) la velocidad del CM del cilindro es,

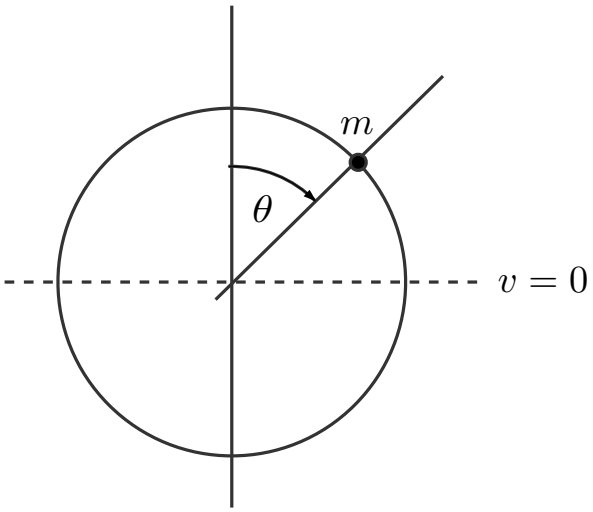
$$v = \dot{x} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\, \delta, \tag{9.7}$$

y de (9.3) y (9.7), la velocidad angular del cilindro en ese instante es,

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2k}{3m}}\, \frac{\delta}{R}. \tag{9.8}$$

10. *Disco con partícula.* Considere el disco de masa M y radio R ilustrado en la figura, y que tiene una partícula de masa m pegada en su borde superior.

a) Primero supongamos que el sistema puede rotar sujeto de un eje fijo (horizontal) que pasa por el centro del disco. Al soltar el sistema desde su posición inicial (que es de equilibrio inestable) determine la velocidad angular máxima que alcanza el sistema si no hay roce entre el eje y el disco.



b) Suponga ahora que el disco no está sujeto a un eje sino que puede rodar sin fricción sobre una mesa horizontal. Si parte del mismo estado (i.e., desde el reposo con la partícula de masa m pegada en el borde superior, encuentre la velocidad angular máxima que alcanza el sistema.

Solución: a) Si suponemos que no hay roce entre el eje de rotación y el disco, la energía del sistema es conservada y está dada por,

$$E = K_{disco} + K_{masa} + V_{disco} + V_{masa}. \tag{10.1}$$

Si elegimos el nivel de referencia gravitatorio al nivel que pasa por el eje del disco, $V_{disco} = 0$. Llamemos θ a la posición angular de m con respecto a la vertical tal como se muestra en la figura. En términos de θ,

$$V_{masa}(\theta) = m\, g\, R \cos\theta. \tag{10.2}$$

Además,

$$K_{masa} = \frac{1}{2} m\, R\, \dot{\theta}^2, \tag{10.3}$$

y

$$K_{disco} = \frac{1}{2} I_{CM}\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} M R^2\, \dot{\theta}^2. \tag{10.4}$$

Entonces, de (10.1), (10.2), (10.3), y (10.4)

$$E = \frac{1}{2} R^2 \left(m + \frac{1}{2} M \right) \dot{\theta}^2 + m\, g\, R \cos\theta. \tag{10.5}$$

Ahora, en el instante inicial $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = 0$, de donde se tiene que,

$$E = E(0) = m\, g\, R. \tag{10.6}$$

En un instante cualquiera, de (10.5), y (10.6) tenemos,

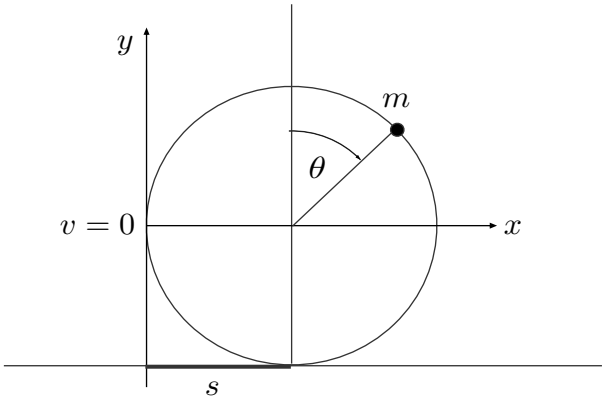
$$\frac{1}{2} R^2 \left(m + \frac{1}{2} M \right) \dot{\theta}^2 = m\, g\, R\, (1 - \cos\theta)\,, \tag{10.7}$$

de donde,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4\, m\, g}{(2m + M) R}\, (1 - \cos\theta)\,. \tag{10.8}$$

El lado derecho de (10.8) es máximo (como función del ángulo θ) cuando $\theta = \pi$ (i.e., cuando m se encuentra en su posición vertical más baja). En ese caso, de (10.8) tenemos,

$$\dot{\theta}_{max} = 2\sqrt{\frac{2\, m\, g}{(2m + M) R}}. \tag{10.9}$$



b) Llamemos nuevamente θ a la posición angular de m con respecto a la vertical (eje fijo). Llamemos s al desplazamiento horizontal del CM del disco. Finalmente,

llamemos x e y a las coordenadas cartesianas de la masa m (suponemos aquí que el eje x pasa por el centro del disco). En términos de s y θ las coordenadas x e y están dadas por,

$$x = s + R \text{ sen}\,\theta. \tag{10.10}$$

e

$$y = R\cos\theta, \tag{10.11}$$

de donde derivando con respecto al tiempo tenemos,

$$\dot{x} = \dot{s} + R\,\cos\theta\,\dot{\theta}. \tag{10.12}$$

e

$$\dot{y} = -R\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}. \tag{10.13}$$

Como no hay roce entre la mesa y el cilindro, el momentum lineal del sistema *disco–masa* en la dirección horizontal es conservado. Así,

$$M\dot{s} + m\dot{x} = 0, \tag{10.14}$$

ya que el momentum lineal en la dirección horizontal es inicialmente cero. De (10.12), y (10.14) tenemos,

$$(M+m)\dot{s} = -m\,R\,\cos\theta\,\dot{\theta}. \tag{10.15}$$

Tal como en la parte a) de este problema la energía es conservada. Sin embargo esta vez,

$$E = E_{disco} + E_{masa} = \left(K_{CM} + K_{cr/CM}\right) + K_{masa} + V_{masa}, \tag{10.16}$$

pues $K_{CM} \neq 0$. Los distintos términos de E están dados por,

$$K_{CM} = \frac{1}{2}M\,\dot{s}^2, \tag{10.17}$$

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}M\,R^2\,\dot{\theta}^2, \tag{10.18}$$

$$K_{masa} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{s}^2 + R^2\,\dot{\theta}^2 + 2\,\dot{s}\,R\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right) \tag{10.19}$$

y

$$V_{masa} = m\,g\,R\cos\theta. \tag{10.20}$$

Además, usando las condiciones iniciales tenemos que $E_{in} = E(t=0) = V_{masa}(\theta = 0) = m\,g\,R$. Reemplazando todas estas expresiones en (10.16), y usando (10.15) para expresar $\dot{s}$ en términos de θ finalmente encontramos,

$$m\,g\,R\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{4}R^2\left[M + 2m - \frac{2m^2\cos^2\theta}{M+m}\right]\dot{\theta}^2, \tag{10.21}$$

i.e., en términos de θ, la velocidad angular del disco está dada por

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4\,m\,g\,(1-\cos\theta)}{R\,(M+2m-2m^2\cos^2\theta/(M+m))}. \tag{10.22}$$

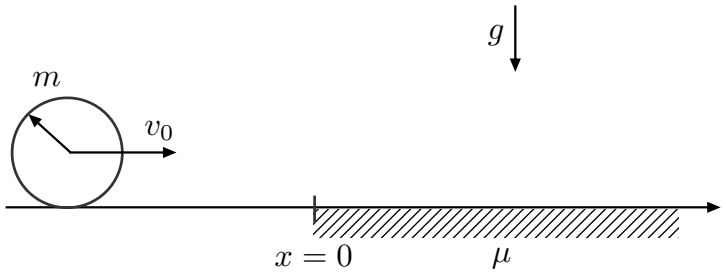
Uno puede verificar que el lado derecho de (10.22) es maximizado para $\theta = \pi$ nuevamente. Así,

$$\omega_{max} = \dot{\theta}(\theta=\pi) = 2\sqrt{\frac{2\,m\,g(M+m)}{M\,R(M+3m)}}. \tag{10.23}$$

11. Una esfera de masa m y radio R viene deslizándose (sin girar) desde $x < 0$, con velocidad $\vec{v} = v_0\hat{\imath}$ ($v_0 > 0$), sobre una superficie horizontal que no tiene roce en $x < 0$, pero que es rugosa (con coeficiente de roce estático μ_e y cinético μ_c) en $x > 0$.

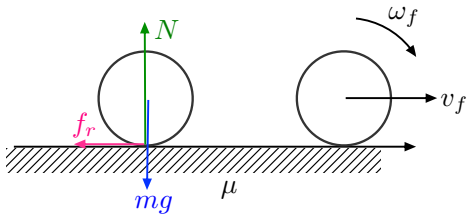
i) Calcule la distancia $x > 0$ que recorre antes de comenzar a rodar sin resbalar.

ii) Calcule la velocidad que alcanza después que esto ocurra.



Solución: Cuando la esfera entra en la región $x > 0$, actúan sobre ella tres fuerzas: su peso, la normal y la fuerza de roce. La fuerza de roce es la única fuerza horizontal y, mientras la esfera ruede resbalando, es no nula. En efecto la fuerza de roce es constante e igual a

$$f_r = \mu_c\,m\,g. \tag{11.1}$$



Así, se trata de un movimiento uniformemente retardado. Antes de calcular la distancia recorrida debemos calcular la velocidad de la esfera una vez que ésta esté rodando sin resbalar. Para ello usaremos *conservación de momentum angular*. El momentum angular con respecto al punto O sobre la superficie horizontal (ver figura) es conservado pues el torque que hace f_r es nulo (el brazo es paralelo a la fuerza) en tanto que los torques que hacen el peso y la normal se anulan entre sí (tienen el mismo brazo y las fuerzas son iguales y de signo contrario). El momentum angular inicial es

$$\vec{L}_O^{in} = -R\, m v_0 \hat{k}. \tag{11.2}$$

(aquí $\hat{k}$ sale de la hoja). Este momentum angular inicial corresponde al momentum inicial del CM con respecto a O. El momentum angular final (es decir una vez que la esfera rueda sin resbalar (con velocidad v_f y velocidad angular ω_f) es,

$$\vec{L}_O^{fin} = \vec{L}_{CM,O}^{fin} + \vec{L}_{cr/CM}^{fin} = -R\, m v_f \hat{k} - I\omega_f \hat{k}. \tag{11.3}$$

Aquí, $\omega_f = v_f/R$ (condición de rodadura) e $I = 2mR^2/5$ (momento de inercia de una esfera maciza). Así de (11.3) tenemos que

$$\vec{L}_O^{fin} = -\frac{7}{5} R\, m v_f \hat{k}. \tag{11.4}$$

Usando la conservación del momentum angular con respecto a O, de (11.2) y (11.4) finalmente obtenemos,

$$v_f = \frac{5}{7} v_0. \tag{11.5}$$

Ahora podemos calcular el tiempo que tarda la esfera en empezar a rodar sin resbalar y la distancia que recorre durante ese lapso de tiempo. Como se trata de movimiento uniformemente retardado,

$$x = v_0\, t - \frac{1}{2} a t^2, \tag{11.6}$$

y

$$v_f = v_0 - a\, t, \tag{11.7}$$

en que $a = f_r/m = \mu_c\, g$. Entonces de (11.7) tenemos

$$t = \frac{v_0 - v_f}{\mu_c g} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{g}. \tag{11.8}$$

Entonces reemplazando este valor de t en (11.6) finalmente obtenemos la distancia recorrida,

$$x = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_c\, g}. \tag{11.9}$$

Comentario: Con estos resultados es fácil calcular la pérdida de energía mecánica de la esfera en este proceso. La energía inicial es

$$E^{in} = K^{in}_{CM} = \frac{1}{2}mv_0^2, \tag{11.10}$$

en tanto que, usando (11.5), la energía final está dada por,

$$E^{fin} = K^{fin}_{CM} + K^{fin}_{cr/CM} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 = \frac{7}{10}mv_f^2 = \frac{5}{14}mv_0^2. \tag{11.11}$$

Finalmente, de (11.10) y (11.11), la energía mecánica perdida es,

$$\Delta E = E^{in} - E^{fin} = \frac{1}{7}mv_0^2 = \frac{2}{7}E^{in}. \tag{11.12}$$

Esta energía perdida se disipa en forma de calor con el frotamiento de las dos superficies mientras la esfera rueda deslizándose.

12. *Cilindro giratorio dejado en un piso rugoso.* Considere un cilindro macizo uniforme de masa m y radio R que originalmente rota con velocidad angular uniforme ω como se muestra en la figura, El cilindro en ese estado se deposita suavemente sobre una superficie horizontal rugosa de coeficiente de roce estático μ_e y dinámico μ_d.

a) Encuentre la velocidad de traslación del CM y la velocidad angular de rotación del cilindro una vez que llega al regimen de rodar sin resbalar.

b) ¿Qué distancia recorre el cilindro desde que se deposita hasta que llega al regimen de rodar sin resbalar.

c) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al regimen de rodar sin resbalar?

d) Calcule la energía perdida por el cilindro.

Solución: Este problema es muy similar al problema anterior. La única diferencia es el tipo de cuerpo (i.e., cilindro macizo en lugar de esfera, y distinto estado inicial). Para encontrar la velocidad de translación y de rotación del cilindro cuando rueda sin resbalar usamos nuevamente conservación de momentum angular con respecto a un punto O en el piso. Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección que sale de la hoja, el momentum angular del cilindro está dado por

$$\vec{L}^{in}_O = I_{CM}(-\omega\,\hat{k}) = -\frac{1}{2}mR^2\omega\,\hat{k}. \tag{12.1}$$

Ahora, si llamamos v_f y ω_f a la velocidad del CM y a la velocidad angular del cilindro cuando se encuentra ya en regimen de rodar sin resbalar, su momentum angular con respecto a O está dado por,

$$\vec{L}_O^{fin} = \vec{L}_{CM,O}^{fin} + \vec{L}_{cr/CM}^{fin} = I_{CM}(-\omega_f\,\hat{k}) - m\,R\,v_f\hat{k}. \tag{12.2}$$

Cuando el cilindro rueda sin resbalar tenemos la condición de rodadura $v_f = R\omega_f$. Reemplazando esta condición en (12.2), usando además que $I_{CM} = mR^2/2$, obtenemos,

$$\vec{L}_O^{fin} = -\frac{3}{2}m\,R^2\,\omega_f\,\hat{k}. \tag{12.3}$$

Usando la conservación de momentum angular, de (12.1) y (12.3) obtenemos que

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{3}\omega. \tag{12.4}$$

Para calcular las soluciones de las partes b) y c) solo tenemos que resolver el movimiento uniformemente acelerado del CM del cilindro. La única fuerza horizontal que actúa sobre él en el período de transición entre el estado inicial y el regimen final de rodar sin resbalar es la fuerza de roce, $\mu\,m\,g$ hacia adelente. La aceleración del CM entonces está dada por $f_r/m = \mu\,g$. Si llamamos T al tiempo de transición y D a la distancia recorrida, tenemos, $v_f = \mu\,g\,T$, y usando (12.4),

$$T = \frac{1}{3}\frac{\omega R}{\mu\,g}. \tag{12.5}$$

Además,

$$D = \frac{1}{2}(\mu\,g)\,T^2 = \frac{1}{18}\frac{(\omega\,R)^2}{\mu\,g}. \tag{12.6}$$

La energía inicial del cilindro está dada por,

$$E^{in} = K_{cr/CM} = \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2 = \frac{1}{4}m\,R^2\,\omega^2. \tag{12.7}$$

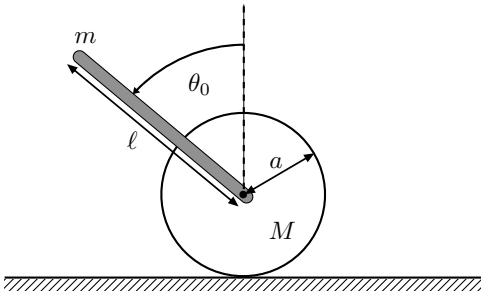
Por otra parte la energía final (i.e., cuando el cilindro rueda sin resbalar) está dada por,

$$E^{fin} = K_{CM} + K_{cr/CM} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega_f^2 = \frac{3}{4}m\,R^2\,\omega_f^2 = \frac{1}{12}m\,R^2\,\omega^2, \tag{12.8}$$

en que usamos la condición de rodadura para obtener la segunda igualdad y (12.4) para obtener la tercera igualdad. Finalmente, la pérdida de energía está dada por,

$$\Delta E = E^{in} - E^{fin} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) m\,R^2\,\omega^2 = \frac{1}{6}m\,R^2\,\omega^2. \tag{12.9}$$

13. *Disco con barra adosada.* En la figura la barra esbelta de masa m y el disco de masa M se sueltan desde el reposo en la posición que se indica en la figura. Si el disco rueda sin resbalar, ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en ese instante?



Nota: Este es el problema 7.41, pág. 337 del libro: A. Bedford y W. Fowler, *Dinámica* (Mecánica para Ingeniería). Addison–Wesley Iberoamericana SA, Wilmington, 1996. (Versión en Castellano de "Engineering Mechanics: Dynamics", publicada en inglés por Addison–Wesley, Reading, 1995).

Solución: Llamemos θ a la posición angular de la barra en un instante cualquiera (después que ésta se ha soltado). Llamemos s al desplazamiento horizontal del CM del disco (ver figura). Llamemos x e y respectivamente a las coordenadas cartesianas del CM de la barra. En términos de s y θ, x e y están dadas por

$$x = \frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta + s, \tag{13.1}$$

e

$$y = \frac{\ell}{2}\cos\theta + a, \tag{13.2}$$

respectivamente. De aquí obtenemos de inmediato que

$$\dot{x} = \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta} + \dot{s}, \tag{13.3}$$

e

$$\dot{y} = -\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{13.4}$$

De (13.3) y (13.4) obtenemos que el módulo al cuadrado de la velocidad del CM de la barra es,

$$(v_{CM}^{bar})^2 = \dot{s}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2 + \ell\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{s}. \tag{13.5}$$

Si tomamos al nivel del CM del cilindro como nivel de referencia del potencial gravitatorio, la energía total del sistema está dada por,

$$E = E_{cilindro} + E_{barra} = K_{CM,cil} + K_{cr/CM,cil} + K_{CM,bar} + K_{cr/CM,bar} + V_{bar}, \quad (13.6)$$

en que las partes de la energía del cilindro están dadas por,

$$E_{cilindro} = K_{CM,cil} + K_{cr/CM,cil} = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}I_{CM,cil}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{4}M\,a^2\,\dot{\theta}^2. \quad (13.7)$$

Por otra parte, las contribuciones a la energía de la barra están dadas por,

$$E_{barra} = K_{CM,bar} + K_{cr/CM,bar} + V_{bar} = \frac{1}{2}m\,(v_{CM}^{bar})^2 + \frac{1}{2}I_{CM,bar}\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,\frac{\ell}{2}\,\cos\theta. \quad (13.8)$$

Nótese que en (13.7) y (13.8) usamos que $I_{CM,cil} = M\,a^2/2$ e $I_{CM,bar} = m\ell^2/12$. Como el cilindro rueda sin resbalar con respecto al suelo, las variables $\dot{s}$ y $\dot{\theta}$ están relacionadas por la *condición de rodadura*

$$\dot{s} = a\,\dot{\theta}. \quad (13.9)$$

Reemplazando la expresión de $(v_{CM}^{bar})^2$ en (13.8), y la *condición de rodadura* en (13.7) y (13.8), y usando (13.6), vemos que la energía total del sistema *barra–cilindro* está dada por,

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left(m\,a^2 + \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{3}{2}M\,a^2 + m\,\ell\,a\,\cos\theta\right) + \frac{1}{2}m\,g\,\ell\,\cos\theta. \quad (13.10)$$

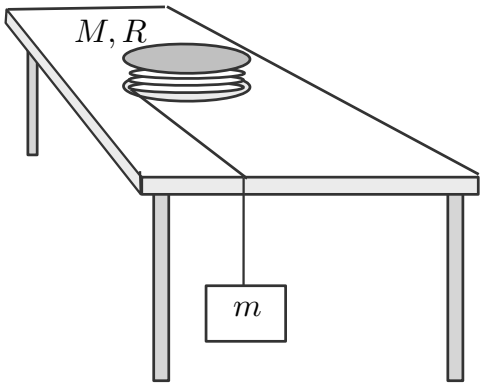
Como el cilindro rueda sin deslizar se conserva la energía del sistema. Así, derivando (13.10) con respecto al tiempo, y simplificando por $\dot{\theta}$ obtenemos,

$$\ddot{\theta}\left(m\,a^2 + \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{3}{2}M\,a^2 + m\,\ell\,a\,\cos\theta\right) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 m\,\ell\,a\,\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}m\,g\,\ell\,\operatorname{sen}\theta = 0. \quad (13.11)$$

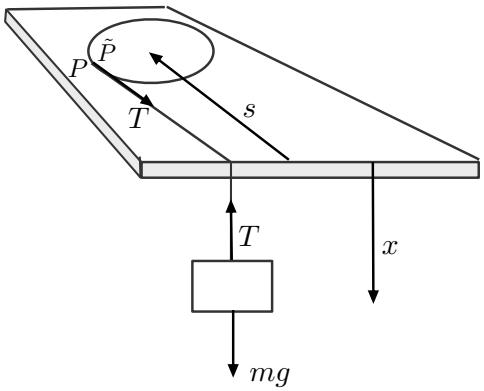
Evaluando esta ecuación en el instante inicial, en que $\theta = \theta_0$, y $\dot{\theta} = 0$, obtenemos finalmente la aceleración angular de la barra en ese instante,

$$\ddot{\theta}(0) = \frac{3\,m\,g\,\ell\,\cos\theta_0}{6\,m\,a^2 + 2\,m\ell^2 + 9\,M\,a^2 + 6\,m\,\ell\,a\,\cos\theta_O}. \quad (13.12)$$

14. *Cilindro Horizontal desenrrollándose.* Por un disco homogéneo de masa M y radio R se enrolla una cuerda que en su otro extremo tiene adosada un cuerpo de masa m. Este disco se acuesta sobre una mesa lisa (sin roce) y el cuerpo de masa m se deja colgando por el borde de ésta. Calcular las aceleraciones lineales de M y m y la aceleración angular de M. Encuentre también la tensión de la cuerda.



Solución: Lo primero que hacemos es identificar las fuerzas que actúan sobre el bloque de masa m que se mueve solo a lo largo de la vertical, las fuerzas que actúan sobre el cilindro y los torques que actúan con respecto al CM del cilindro. Como se indica en la figura, sobre el bloque solo actúan su peso y la tensión de la cuerda. Sobre el cilindro actúa solo una fuerza horizontal, i.e., la tensión de la cuerda, que está actuando en el punto de contacto (P en la figura) entre la cuerda y el cilindro. Además hay dos fuerzas verticales, que no necesitaremos, i.e., el peso del cilindro y la reacción de la mesa sobre éste. El torque que hace T sobre el CM del cilindro está dado por $RT\hat{k}$ en que $\hat{k}$ es la dirección perpendicular a la mesa. Como solo hay una fuerza horizontal actuando sobre el cilindro, el CM de éste se moverá en línea recta.



Ahora introducimos las coordenadas necesarias para describir el movimiento de ambos cuerpos. Llamaremos x a la coordenada vertical de m medida desde la mesa (i.e., desde el punto O de la figura). Por otra parte, llamemos s a la distancia del CM del cilindro desde el borde de la mesa (ver figura). Como el movimiento del CM del cilindro solo ocurre a lo largo de una recta, basta con esta coordenada para

describir su movimiento de traslación. Finalmente llamemos $\dot{\theta}$ a la velocidad angular del cilindro, en el sentido que se muestra en la figura.

Una vez identificadas las fuerzas que actúan sobre el bloque y sobre el cilindro y el torque con respecto al CM que actúa sobre el cilindro, y luego de haber introducido las coordenadas necesarias, podemos escribir las ecuaciones de movimiento de ambos cuerpos. La ecuación de movimiento del CM del bloque está dada por,

$$mg - T = m\,\ddot{x}, \tag{14.1}$$

en tanto que la ecuación de movimiento del CM del cilindro es,

$$-T = M\ddot{s}. \tag{14.2}$$

Usando la regla de la mano derecha y la definición de $\dot{\theta}$, tenemos que el momentum angular con respecto al CM del cilindro está dado por

$$\vec{L}_{cr/CM} = I_{CM}\dot{\theta}\,\hat{k} = \frac{1}{2}M\,R^2\,\dot{\theta}\hat{k}. \tag{14.3}$$

Entonces de la ecuación de torque con respecto al CM obtenemos,

$$T\,R = \frac{1}{2}M\,R^2\,\ddot{\theta}. \tag{14.4}$$

Finalmente debemos determinar la ecuación de ligazón entre los cuerpos por el hecho de estar conectados a través de la cuerda ideal. En este caso es una *condición de rodadura*. Tenemos que imponer que la velocidad del punto de contacto entre la cuerda y el cilindro es la misma, vista desde la cuerda que vista desde el cilindro. Si llamamos P al punto de contacto visto desde la cuerda, obtenemos que

$$v_P = -\dot{x} \tag{14.5}$$

pues P es solidario (por medio de la cuerda) al bloque. Aquí estamos usando la dirección positiva para medir la velocidad alejándonos de la mesa y de ahí el signo menos. Por otra parte usando la ley de composición de velocidades, y llamando $\tilde{P}$ al punto de contacto visto desde el cilindro, tenemos que

$$v_{\tilde{P}} = v_{CM,cil} + v_{\tilde{P},cr/CM} = \dot{s} - R\,\dot{\theta}. \tag{14.6}$$

Imponiendo la condición de rodadura $v_P = v_{\tilde{P}}$ obtenemos a partir de (14.5) y (14.6) que

$$\dot{s} - R\,\dot{\theta} = -\dot{x}, \tag{14.7}$$

y, derivando con respecto al tiempo,

$$\ddot{s} - R\,\ddot{\theta} = -\ddot{x}, \tag{14.8}$$

Usando las ecuaciones (14.1), (14.2) y (14.4) para despejar $\ddot{x}$, $\ddot{s}$ y $\ddot{\theta}$ en términos de la tensión T obtenemos,

$$\ddot{x} = g - \frac{T}{m}, \qquad , \ddot{s} = -\frac{T}{M}, \text{ y} \qquad \ddot{\theta} = \frac{2\,T}{M\,R}. \tag{14.9}$$

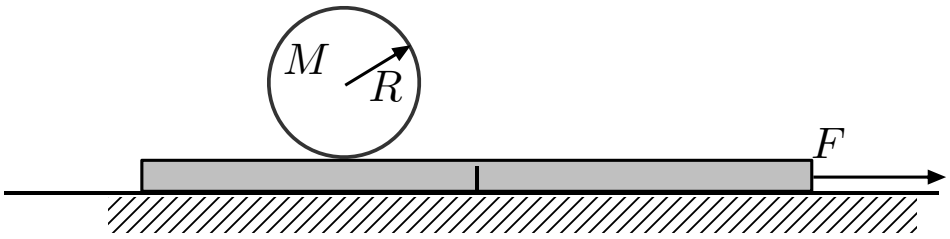
Reemplazando estas expresiones en la condición de rodadura (14.8) y resolviendo para T encontramos,

$$T = \frac{m\,M}{M+3m}\,g. \tag{14.10}$$

Finalmente reemplazando la tensión en (14.9) obtenemos todo lo pedido, i.e.,

$$\ddot{x} = \frac{3\,m\,g}{M+3m}, \qquad \ddot{s} = -\frac{m\,g}{M+3m}, \text{ y} \qquad \ddot{\theta} = \frac{2\,m\,g}{(M+3m)\,R}. \tag{14.11}$$

15. *Cilindro sobre Plataforma.* Un cilindro macizo de masa M y radio R descansa sobre una plataforma de masa m que se encuentra sobre una mesa horizontal, como se muestra en la figura. Suponga que entre la plataforma y el cilindro existe suficiente roce como para que el cilindro ruede sin resbalar sobre la plataforma. Si se tira la plataforma con una fuerza F, calcule:



a) La aceleración a de la plataforma.

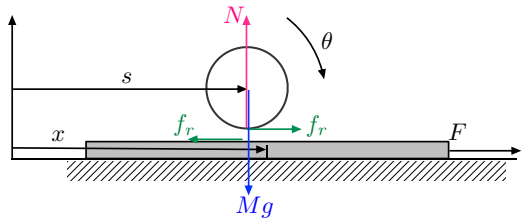
b) La aceleración del centro de masa del cilindro (relativa a la mesa).

c) La aceleración angular del cilindro.

d) La magnitud de la fuerza de roce entre el cilindro y la plataforma.

Solución: Lo primero que tenemos que hacer es separar los cuerpos e identificar todas las fuerzas que actúan sobre la plataforma y las fuerzas y torques que actúan sobre el cilindro. Sobre la plataforma, a lo largo de la horizontal solo actúan la fuerza

externa F y la fuerza de roce que hace el cilindro sobre la plataforma (hacia atrás, ver figura). En el sentido vertical hay tres fuerzas que no vamos a necesitar pero solo por completitud las listamos: el peso de la plataforma, la reacción que hace el piso sobre la plataforma y la fuerza de reacción $-N$ que hace el cilindro sobre la plataforma. Sobre el cilindro actúan la fuerza de roce que hace la plataforma sobre el cilindro (hacia adelante, ver figura), la cual es la única fuerza horizontal; a lo largo de la vertical actúan el peso del cilindro, mg, y la fuerza de reacción, N, de la plataforma sobre el cilindro. Como estas son las dos únicas fuerzas verticales sobre el cilindro, y éste solo se mueve a lo largo de la vertical, tenemos que $N = mg$. Ahora introduzcamos coordenadas para describir los movimientos de la plataforma y del cilindro. Llamemos x a la coordenada horizontal del CM de la plataforma medida desde una pared fija. Llamemos por su parte s a la posición horizontal del cilindro medida con respecto a la misma referencia fija. y por último llamemos ω (en el sentido de los punteros del reloj) a la velocidad angular del cilindro.



Con todo lo anterior ahora podemos escribir las ecuaciones de movimiento de ambos cuerpos y también la *condición de rodadura* (i.e., la condición de rodar sin resbalar del cilindro sobre la plataforma).

La ecuación de movimiento del CM de la plataforma está dada por,

$$F - f_r = M\ddot{x}, \tag{15.1}$$

en tanto que la ecuación de movimiento del CM del cilindro es,

$$f_r = m\ddot{s}. \tag{15.2}$$

La única fuerza que hace torque con respecto al CM del cilindro es la fuerza de roce (hacia adelante en la figura) que hace la plataforma sobre el cilindro, y la cual está actuando en el punto de contacto entre los dos cuerpos. El torque que hace

esta fuerza sobre el CM del cilindro es $f_r\, R\, \hat{k}$ en que $\hat{k}$ sale de la hoja. En términos de ω, usando la regla de la mano derecha, el momentum angular del cilindro con respecto al CM está dado por $\vec{L}_{cr/CM} = I_{CM}\omega(-\hat{k})$. Entonces la ecuación de torque con respecto al CM del cilindro está dada por

$$f_r\, R = -I_{CM}\dot{\omega} = -\frac{1}{2}mR^2\,\dot{\omega} \tag{15.3}$$

pues el cilindro es macizo. Finalmente para encontrar la condición de rodadura, como el cilindro no resbala sobre la plataforma imponemos que los puntos de contacto vistos desde la plataforma y desde el cilindro tienen la misma velocidad, i.e., $v_P = v_{\tilde{P}}$ (en que P y $\tilde{P}$ son los puntos de contacto vistos desde la plataforma y desde el cilindro respectivamente. Obviamente $v_P = \dot{x}$ pues P es solidario a la plataforma. Por otra parte usando composición de velocidades $v_{\tilde{P}} = v_{CM,cil} + v_{\tilde{P},cr/Cil} = \dot{s} - \omega R$. Entonces la condición de rodadura está dada por,

$$\dot{x} = \dot{s} - \omega\, R, \tag{15.4}$$

y de aquí,

$$\ddot{x} = \ddot{s} - \dot{\omega}\, R, \tag{15.5}$$

De las ecuaciones (15.1), (15.2), y (15.3), obtenemos $\ddot{x}$, $\ddot{s}$ y $\dot{\omega}$ en términos de F y f_r, i.e.,

$$\ddot{x} = \frac{1}{M}(F - f_r), \qquad \ddot{s} = \frac{f_r}{m}, \text{y} \qquad \dot{\omega} = -\frac{2}{m\,R}\,f_r. \tag{15.6}$$

Reemplazando estas tres expresiones en la *condición de rodadura* (15.5) finalmente obtenemos la expresión para f_r,

$$f_r = \frac{m}{3M+m}\,F. \tag{15.7}$$

que es la respuesta a la parte d). Reemplazando esta expresión de f_r en (15.6), finalmente obtenemos

a) La aceleración de la plataforma relativa a la mesa,

$$\ddot{x} = \frac{3\,F}{3M+m}. \tag{15.8}$$

b) La aceleración del cilindro relativa a la mesa,

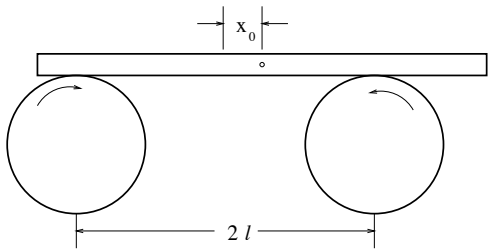
$$\ddot{s} = \frac{F}{3M+m}. \tag{15.9}$$

y

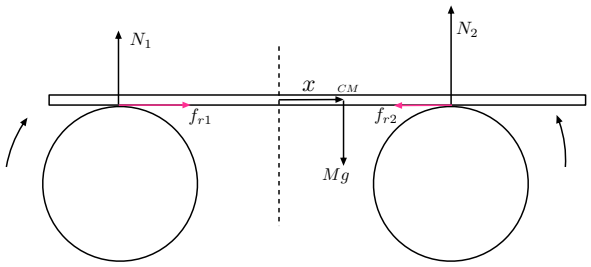
c) La aceleración angular del cilindro,

$$\dot{\omega} = \frac{2\,F}{(3M + m)\,R}. \tag{15.10}$$

16. *Barra Oscilante Sobre Dos Cilindros.* Una barra delgada, pesada, uniforme, de masa M descansa sobre dos rodillos que giran continuamente, en direcciones opuestas, como se indica en la figura. Los centros de los rodillos están separados por una distancia 2ℓ. El coeficiente de roce entre la barra y la superficie de los rodillos es μ, una constante independiente de la velocidad relativa entre las dos superficies, Inicialmente la barra está sostenida en reposo con su centro de masa a una distancia x_0 del punto medio entre los rodillos. Se suelta el sistema en el instante $t = 0$. Determine el movimiento posterior de la barra.



Solución: Sobre la barra pesada actúan 5 fuerzas: las dos normales N_1 y N_2 ejercidas por los dos rodillos (actuando en los puntos de contacto como se indica en la figura), el peso de la barra homogénea (actuando sobre el CM de la barra) y las fuerzas de roce ejercidas por los rodillos sobre la barra (ambas horizontales, y actuando en los puntos de contacto de los rodillos con la barra). Si la barra mantiene su movimiento solo a lo largo de la horizontal, la suma de las fuerzas horizontales debe anularse, i.e.,



$$N_1 + N_2 = Mg \tag{16.1}$$

Si la barra no gira, entonces el torque que hacen todas las fuerzas sobre el CM debe anularse. El peso de la barra no hace torque porque está justamente aplicado sobre el CM. Las fuerzas de roce que hacen los dos rodillos no hacen torque con respecto al centro de masa porque el vector que va del CM al punto de aplicación en cada caso son paralelos. Las únicas dos fuerzas que hacen torque con respecto al CM son las dos normales, N_1 y N_2, y sus brazos son, respectivamente, $(\ell + x)$ y $(\ell - x)$. Entonces tenemos

$$\vec{\tau}_{CM} = [N_2(\ell - x) - N_1(\ell + x)]\,\hat{k} = 0. \tag{16.2}$$

en que $\hat{k}$ sale de la hoja de papel. Entonces N_1 y N_2 satisfacen,

$$N_2(\ell - x) - N_1(\ell + x) = 0. \tag{16.3}$$

Resolviendo (16.1) y (16.3) para N_1 y N_2 encontramos que

$$N_1 = \frac{Mg}{2\ell}(\ell - x) \qquad \text{y} \qquad N_2 = \frac{Mg}{2\ell}(\ell + x). \tag{16.4}$$

Una vez determinados los valores de las reacciones N_1 y N_2, podemos calcular las fuerzas de roce que hacen los dos rodilllos sobre la barra. Ambas fuerzas de roce son horizontales y están dadas por $\vec{f}_{r1} = \mu\, N_1 \hat{\imath}$ y $\vec{f}_{r2} = -\mu\, N_2 \hat{\imath}$. Entonces la ecuación de movimiento de la varilla es,

$$M\ddot{x}\,\hat{\imath} = \mu\,(N_1 - N_2)\;\hat{\imath} \tag{16.5}$$

y, usando los valores de N_1 y N_2 dados por (16.4), obtenemos,

$$M\ddot{x} = -\mu \frac{M\,g}{2\,\ell}\,2\,x \tag{16.6}$$

que finalmente se reduce a la ecuación de movimiento armónico simple,

$$\ddot{x} + \Omega^2\, x = 0, \tag{16.7}$$

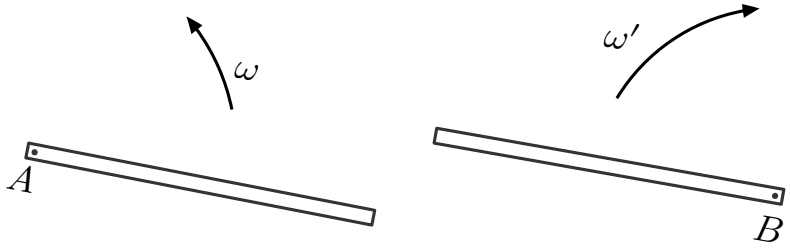
en que $\Omega = \sqrt{\mu\, g/\ell}$. Las soluciones de (16.4) son periódicas de período $2\pi/\Omega$. En particular para las condiciones iniciales del problema, i.e., $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$, la solución de (16.7) está dada por,

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega\, t) \tag{16.8}$$

en que

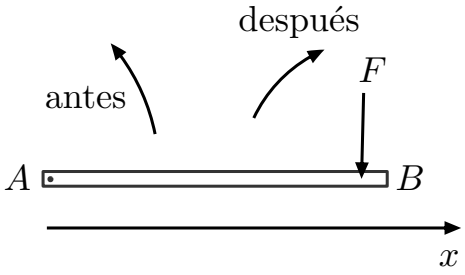
$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu\, g}{\ell}}.$$

17. *Piruetas de una barra.* Una barra rígida de largo L y masa M gira sobre una superficie hrizontal sin roce, en torno a uno de sus extremos, llamémoslo extremo A. En cierto momento se inserta una clavija en el otro extremo, extremo B, y simultáneamente se suelta el extermo A. Producto de esto la barra ahora girará en torno a B. Si la velocidad angular con que la barra gira en torno a A es ω, ¿cuál es la velocidad angular ω' con que la barra gira en torno a B?



Solución:

Haremos este problema por dos métodos.



Método 1

Al clavar la barra en B se ejerce una fuerza sobre ese punto. Esta fuerza no hace torque respecto al punto B, ya que su brazo es cero. Por lo tanto el momento angular respecto a B se conserva en este proceso.

De acuerdo a la figura, como el eje z sale del plano el momento angular inicial de la barra respecto al punto A es

$$\vec{L}_{\text{in/A}} = I_A \omega \hat{z}, \tag{17.1}$$

y el momento angular final respecto a B será

$$\vec{L}_{\text{fin/B}} = -I_B \omega' \hat{z}, \tag{17.2}$$

La conservación de momento angular es respecto a B, por lo que necesitamos calcular el momento angular inicial respecto a B. Justo antes de clavar B la velocidad inicial de cada punto de la barra es $\vec{v} = x_a\omega\hat{y}$ donde x_a es la distancia al extremo A.

$$\vec{L}_{\text{in/B}} = \int_0^L \vec{r}_B \times dm\vec{v} = \int_0^L (\vec{r}_A - L\hat{x}) \times dm\vec{v} = \vec{L}_{\text{in/A}} - L\omega\hat{z}\int_0^L dmx_a.$$

Usamos $dm = \lambda dx_a$ donde λ es la densidad de masa lineal y la integral resulta $ML/2$. Por lo tanto

$$\vec{L}_{\text{in/B}} = \vec{L}_{\text{in/A}} - \omega\hat{z}\frac{ML^2}{2}. \tag{17.3}$$

Usando ahora la conservación de momento angular respecto a B obtenemos

$$I_A\omega\hat{z} - \omega\hat{z}\frac{ML^2}{2} = -I_B\omega'\hat{z},,$$

pero $I_A = I_B = ML^2/3$ por lo que el resultado final es

$$\omega' = \frac{\omega}{2}.$$

Método 2

Usamos coordenadas referidas al centro de masa.

Primero veamos el efecto de la fuerza sobre la velocidad del centro de masa.

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{F}.$$

En este caso la fuerza es súbita y por lo tanto cambia el momentum instantáneamente

$$M\vec{v}_{cmFinal} - M\vec{v}_{cmInicial} = \int \vec{F}dt \tag{17.4}$$

Justo antes y después de clavar B

$$\vec{v}_{cmInicial} = \frac{L}{2}\omega\hat{y}, \qquad \vec{v}_{cmFinal} = \frac{L}{2}\omega'\hat{y},$$

lo que implica que la fuerza en ese instante es $\vec{F} = -F\hat{y}$ y por lo tanto

$$\frac{ML}{2}(\omega' - \omega) = -\int F dt. \tag{17.5}$$

Y el giro respecto al CM

$$\frac{dL_{CM}}{dt} = \tau_{CM}$$

Si el eje z sale del papel, el torque que ejerce la fuerza es negativo. De nuevo, es un torque súbito, por lo que

$$\vec{L}_{cmFinal} - \vec{L}_{cmInicial} = \int \vec{\tau}_{cm} dt$$

En nuestro caso

$$-I_c\omega'\hat{z} - I_c\omega\hat{z} = -\int \frac{L}{2} F dt\, \hat{z}. \tag{17.6}$$

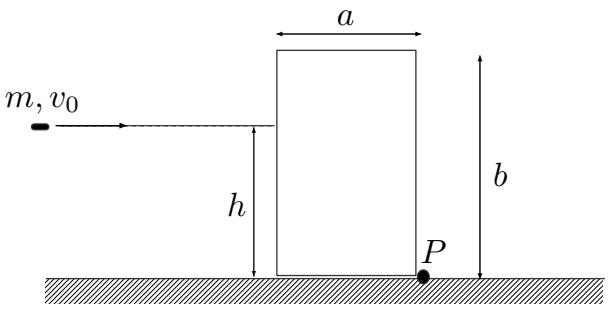
Usando $I_c = ML^2/12$, nos queda

$$\frac{ML}{6}(\omega' + \omega) = \int F dt. \tag{17.7}$$

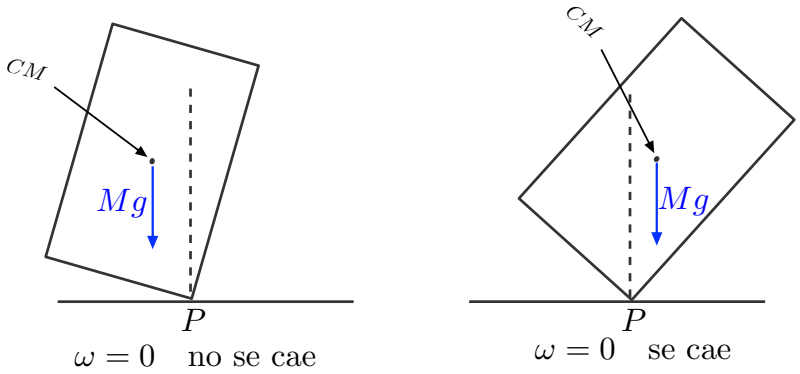
De (17.5) y (17.7), eliminando el impulso, obtenemos

$$\omega' = \frac{\omega}{2}.$$

18. *Choque plástico de proyectil contra bloque.* Un proyectil de masa m se dispara contra un bloque de masa M que se encuentra afirmado por un tope P por lo que no se puede deslizar, como se muestra en la figura. El bloque tiene ancho a y alto b. El proyectil tiene velocidad inicial v_0 y se incrusta en el bloque a una altura h. ¿Cuál es la velocidad mínima del proyectil para que el bloque caiga al suelo? Suponga que $m << M$ por lo que se puede despreciar una vez que se incrustó en el bloque.



Solución:



Al chocar el proyectil el tope P ejerce una fuerza súbita que impide que el bloque se deslice, pero si permite que el bloque gire en torno a P. La presencia de esta fuerza impulsiva significa que en el choque el momentum lineal horizontal no se conserva, pero se conserva el momento angular en torno a P, ya que esta fiuerza no tiene brazo respecto a P. Producto del choque inelástico el bloque adquiere momento angular. Luego del choque debemos considerar la fuerza no impulsiva que es el peso del bloque. Al girar en torno a P el CM del bloque se levanta y por lo tanto aumenta su energía potencial. Como la fuerza de gravedad es conservativa y la fuerza en P no hace trabajo (ya que P no se desplaza), la energía total del bloque se conserva. Si pierde toda su velocidad angular cuando el CM está a la izquierda de P (ver dibujo) el torque que hace el peso respecto a P lo devuelve a su lugar. Pero si el CM está a derecha de P, el torque del peso termina de botar el bloque. Resolvamos esto entonces.

Primero el choque. El momento angular inicial del sistema es el del proyectil.

$$L_{i/P} = mv_0 h$$

Luego del choque el bloque gira en torno a P y

$$L_{f/P} = I_P \omega$$

La conservación de momento angular nos dice que

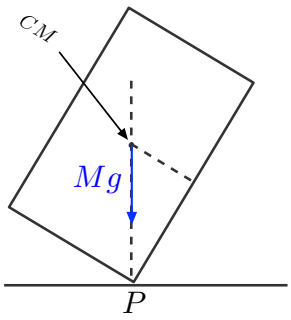
$$\omega = \frac{mv_0 h}{I_P}.$$

Después del choque.

Su energía total es cinética más potencial,

$$E = \frac{1}{2} I_P \omega^2 + Mg\frac{b}{2}.$$

Al girar cambia la posición del CM, como E es constante disminuye ω y aumenta la energía potencial. El caso límite corresponde a que el CM esté justo sobre P en el momento que se anula su velocidad angular.



$\omega = 0$ caso límite

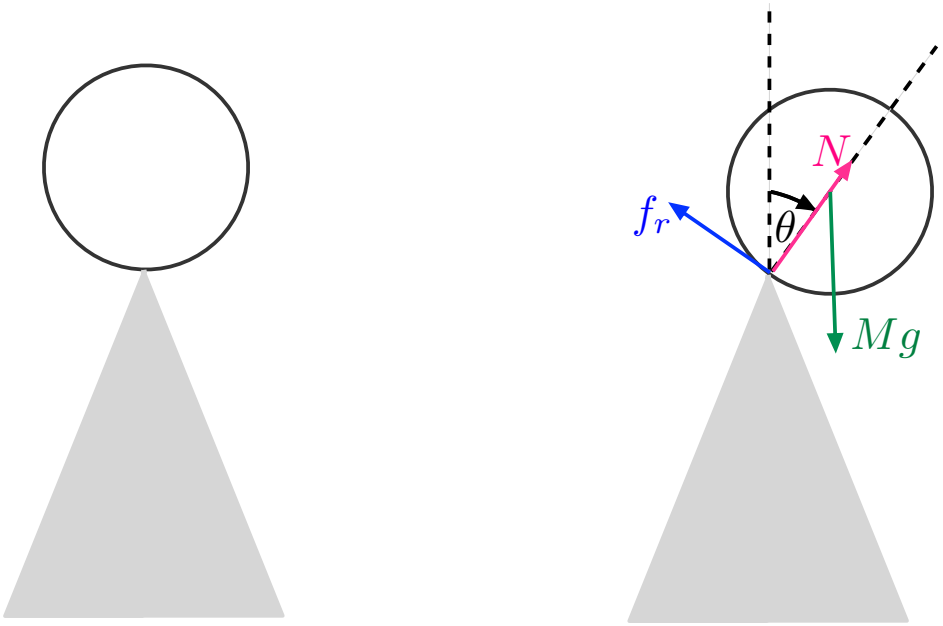
La altura del CM sobre el suelo en esa posición es $L = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}$. Se da vuelta si

$$\frac{1}{2} I_P \omega^2 + Mg\frac{b}{2} \geq MgL$$

Reemplazando el valor de ω y de L encontramos que se da vuelta si

$$v_0^2 \geq \frac{MgI_P}{m^2h^2}(\sqrt{a^2+b^2} - b)$$

19. Un disco se encuentra sobre un pedestal que termina en punta. Producto de un pequeño desequilibrio gira y cae, ¿en qué ángulo se despega del soporte?



Solución:

Usemos coordenadas polares $(\hat{\rho}, \hat{\theta})$ con el origen en el punto de contacto. El eje z entra en el papel. Las ecuaciones de movimiento son

$$M\vec{a}_c = \vec{N} + M\vec{g} + \vec{f_r}$$

Mientras se mantiene en contacto con la base el CM del disco describe un círculo de radio R con centro en P. En coordenadas polares entonce la ecuación de movimiento del CM es

$$M(-R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\,\hat{\theta}) = N\hat{\rho} - f_r\hat{\theta} + Mg(-cos\theta\hat{\rho} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}).$$

La componente $\hat{\rho}$ es

$$N = Mg\cos\theta - MR\,\dot{\theta}^2$$

y la componente $\hat{\theta}$

$$f_r = Mg\operatorname{sen}\theta - MR\,\ddot{\theta}. \tag{19.1}$$

El disco se despega de la base cuando $N = 0$ esto es cuando

$$Mg\cos\theta = MR\,\dot{\theta}^2. \tag{19.2}$$

Ahora consideramos la rotación en torno al punto P de contacto. La unica furza que hace torque en torno a P es la gravedad. Por lo tanto

$$I_P\ddot{\theta} = Rmg\ \operatorname{sen}\theta.$$

Multiplicando por $\dot{\theta}$ vemos que esta ecuación se puede escribir como una derivada exacta, que no es nada más que la conservación de energía (cinética más potencial.). El roce y la normal no hacen trabajo porque el punto P no se desplaza.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta\right) = 0,$$

por lo que

$$\frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta = cte. = (\frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta)\Big|_{\theta=0} = MgR.$$

De esta ecuación despejamos $\dot{\theta}^2$ y la reemplazamos en (19.2). Se obtiene

$$\cos\theta = \frac{2MR^2}{I_P + 2MR^2}.$$

Nota: Este problema también se puede hacer calculando el torque respecto al CM. En ese caso

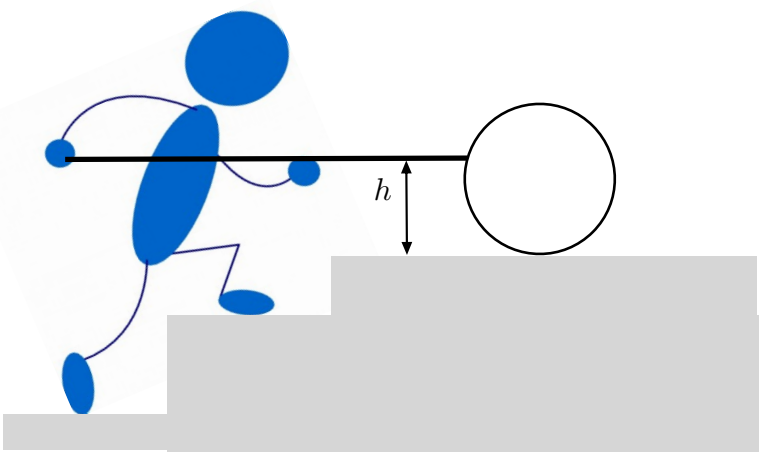
$$I_c\ddot{\theta} = Rf_r$$

y se reemplaza f_r en (19.1) y se obtiene

$$MgR\,\mathrm{sen}\,\theta = (I_c + MR^2)\ddot{\theta} = I_P\ddot{\theta}.$$

igual que antes.

20. A una bola de masa M se le pega un golpe a una altura h. ¿A qué altura hay que pegarle a la bola para que no resbale? Si el golpe da un impulso P_0, ¿qué velocidad adquiere?



Solución:

Con el golpe cambia la velocidad del CM:

$$M(v_{CM} - \cancelto{0}{v_{cm}(0)}) = F\Delta t = P_0.$$

de modo que

$$v_{cm} = \frac{P_0}{M}.$$

La fuerza hace un torque en torno al CM

$$I_c(\omega - \cancelto{0}{\omega_0}) = (h-R)F\Delta t = (h-R)P_0,$$

de donde vemos que la velocidad angular que le da el golpe es

$$\omega = \frac{(h-R)P_0}{I_c}.$$

Si pedimos que ruede sin resbalar, $v_{cm} = \omega R$ de donde se obtiene

$$h = R + \frac{I_c}{MR}.$$

Para una esfera sólida, $I_c = 2MR^2/5$ y $h = 7R/5$.

©R. Benguria, M. C. Depassier, Octubre 2016.