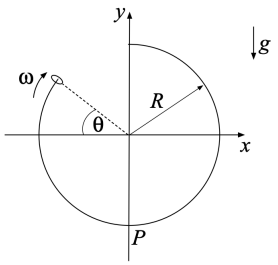
Examen

Fecha: 12 de Diciembre 2023

1. **Problema 1:** Se logra hacer girar un anillo muy pequeño con velocidad angular constante ω a lo largo de una circunferencia de radio R. La circunferencia está cortada en un punto determinado por un ángulo $\theta = 30°$, como se ve en la figura. Al alcanzar este punto el anillo se desprende de la circunferencia y se mueve libremente bajo la acción de la gravedad.

   a) ¿Qué tipo de movimiento realiza el anillo una vez que se desprende de la circunferencia y qué características tiene? (**2 pto**)

   b) Calcule el valor de la velocidad angular ω si el anillo, luego de desprenderse, toca a la circunferencia en su punto más bajo (punto P). (**4 pto**)



Recuerde que $\sin 30° = 1/2$ y $\cos 30° = \sqrt{3}/2$.

a) El tipo de movimiento que lleva el anillo es dos dimensional y de tipo lanzamiento de proyectil dado que esta sometido solo al campo gravitatorio. (**1 pto**)
La velocidad inicial del lanzamiento esta dada por $v = R\omega$ con una dirección de θ con respecto a la horizontal. (**1 pto**)
b) Primero descomponemos la velocidad inicial que posee el anillo en el punto donde se desprende. Recordamos que al estar en un movimiento circurlar se cumple que $v = R\omega$.

$$V_{0x} = \omega R \sin\theta \quad y \quad V_{0y} = \omega R \cos\theta \tag{1}$$

(**1 pto** por entender la velocidad inicial) Integramos en para obtener las ecuaciones de movimiento:

$$x(t) = \omega R \sin\theta t - R\cos\theta \quad y \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \omega R\cos\theta t + R\sin\theta \tag{2}$$

(**1 pto** por las ecuaciones de movimiento correctas) Donde $x_0 = -R\cos\theta$ e $y_0 = R\sin\theta$. La posición final estaría dada por $x(t_p) = 0$ e $y(t_p) = -R$. Ahora encontraremos el tiempo t_p tal que $x(t_p) = 0$.

$$\omega R \sin\theta t_p - R\cos\theta = 0 \implies t_p = \frac{\cos\theta}{\omega\sin\theta} \tag{3}$$

(**1 pto** por encontrar el tiempo) Reemplazamos el t_p en la ecuación de movimiento de y:

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{\cos^2\theta}{\omega^2\sin^2\theta}\right) + \omega R\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\omega\sin\theta}\right) + R\sin\theta = -R \tag{4}$$

$$\implies \frac{1}{2}g\frac{\cot^2\theta}{\omega^2} = R\sin\theta(1+\cot^2\theta) + R$$

$$\implies \omega = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{\frac{g}{2R}\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

■

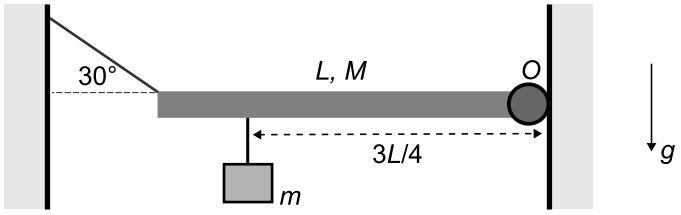
Reemplazando $\theta = 30^\circ$ obtenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} \tag{5}$$

(**1 pto** llegar a la solución final)

■

2. **Problema 2:** Una barra de masa M y largo L está sujetada por la bisagra O y por una cuerda ideal como muestra la figura. La cuerda forma un ángulo de 30° con la horizontal. Además, un bloque de masa m es amarrado con una cuerda ideal a la barra a una distancia de $3L/4$ desde O. Asumiendo que el sistema se encuentra en equilibrio:



(a) Dibuje el DCL de la barra. **(1.5 pto)**

(b) Encuentre las ecuaciones de equilibrio rotacional, i.e., las ecuaciones para las fuerzas y los torques. **(1.5 ptos)**

(c) Encuentre el módulo de la tensión ejercida por la cuerda izquierda. **(1 pto)**

(d) Encuentre el vector fuerza ejercido por la bisagra en O. **(2 ptos)**

Recuerde que $\sin 30^\circ = 1/2$ y $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$.

(a) Las fuerzas ejercidas sobre la barra son la tensión de la cuerda izquierda (0.25 pto), el peso del bloque (0.25 pto), el peso de la barra en su centro de masa (0.5 pto), y la fuerza de la bisagra F_b (0.5 pto). En principio la dirección de la bisagra en el DCL es arbitraria. Su dirección se obtiene durante el problema.



(b) La ecuación de equilibrio en el eje y es (0.25 pto)

$$T\sin 30^\circ - mg - Mg + F_{b,y} = 0\,,$$

y en el eje x (0.25 pto)

$$-T\cos 30^\circ + F_{b,x} = 0\,,$$

donde $F_{b,x}$ y $F_{b,y}$ son los componentes en x e y de F_b, respectivamente. Finalmente, la ecuación de equilibrio de torque (1.0 pto):

$$-LT\sin 30^\circ + \frac{3L}{4}mg + \frac{L}{2}Mg = 0\,,$$

donde hemos utilizado la bisagra O como punto de referencia.

(c) La tensión se obtiene directamente de la última ecuación (1 pto)

$$T = \frac{3m+2M}{2}g\,.$$

■

(d) Dado que ya conocemos la tensión, podemos obtener la fuerza ejercida por la bisagra. De la ecuación de equilibrio en x obtenemos (1.0 pto)

$$F_{b,x} = \frac{(3m+2M)\sqrt{3}}{4} g\,,$$

y de la de y (1.0 pto)

$$F_{b,y} = \frac{m+2M}{4} g\,.$$

Entonces, podemos escribir la fuerzas de la bisagra como

$$\vec{F}_b = F_{b,x}\hat{i} + F_{b,y}\hat{j}\,.$$

■

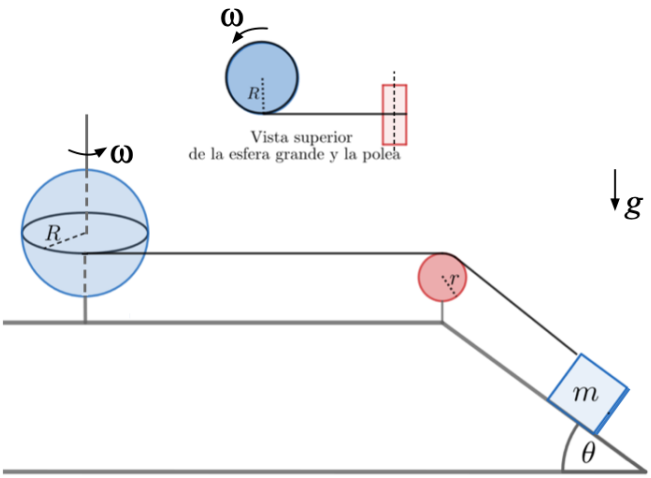
3. **Problema 3:** Considere una esfera maciza de masa M y radio R que puede girar con respecto a un eje vertical fijo como se muestra en la figura. El eje pasa por el centro de la esfera. Se ata una cuerda alrededor del ecuador de la esfera, luego la cuerda pasa por una polea (cilindro macizo de masa m_p y radio r) y termina en el bloque de masa m que se puede mover libremente por el plano inclinado de ángulo θ, ver figura. El sistema es accionado por la fuerza de gravedad.

   a) Encuentre todas las ecuaciones de movimiento del sistema. **(3 ptos)**

   b) Encuentre la aceleración del bloque m. **(0.75 ptos)**

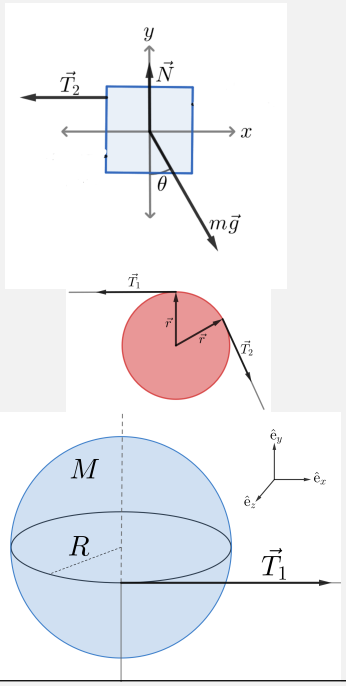
   c) Encuentre las tensiones en los dos tramos de la cuerda. **(1.5 ptos)**

   d) Encuentre las aceleraciones angulares de la esfera y de la polea. **(0.75 ptos)**



NOTA: El momento de inercia con respecto al CM de una esfera maciza es $\frac{2}{5}MR^2$ y el momento de inercia un cilindro macizo con respecto a su CM es $\frac{1}{2}MR^2$.

Según los DCL siguientes:



Si la rotación de la esfera esta caracterizada por $\omega(t)$ y es causada por la tensión T_1 que la cuerda ejerce en el ecuador a distancia R del eje de rotación, entonces la ecuación dinámica para torque es:

$$T_1 R = I_{esf}\dot{\omega}$$

(0.75)
Sobre la polea actúan dos tensiones T_2 en dirección de la masa m y $-T_1$ en dirección de la esfera, por lo tanto la ecuación de torque da:

$$T_2 r - T_1 r = I_p \dot{\omega}_p$$

(0.75) Aquí $\omega_p(t)$ es la frecuencia de rotación de la polea.
El movimiento de la masa m es consecuencia de la tensión T_2 y la aceleración de traslación a, en conclusión:

$$mg\sin\theta - T_2 = ma$$

(0.75)
Finalmente, ya que la cuerda no resbala, se tiene que

$$r\dot{\omega}_p = R\dot{\omega} = a$$

(0.75)
Las incógnitas son T_1, T_2, a, $\dot{\omega}$ y $\dot{\omega}_p$. Resolviendo el sistema y remplazando $I_{esf} = \frac{2}{5}MR^2$, $I_p = \frac{1}{2}m_p r^2$ se obtiene que:

$$a = \frac{r^2R^2}{mr^2R^2 + R^2I_p + r^2I_{esf}}mg\sin\theta = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{1}{2}m_p + \frac{2}{5}M}$$

(0.75)

$$\dot{\omega}_p = \frac{a}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{mg\sin\theta}{m + \frac{1}{2}m_p + \frac{2}{5}M}\right)$$

$$\dot{\omega} = \frac{a}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{mg\sin\theta}{m + \frac{1}{2}m_p + \frac{2}{5}M}\right)$$

(0.75, por ambas ecuaciones)

$$T_1 = \frac{I_{esf}r^2}{mr^2R^2 + R^2I_p + r^2I_{esf}}mg\sin\theta = \frac{2}{5}M\left(\frac{mg\sin\theta}{m + \frac{1}{2}m_p + \frac{2}{5}M}\right)$$

(0.75)

$$T_2 = \frac{r^2I_{esf} + R^2I_p}{mr^2R^2 + R^2I_p + r^2I_{esf}}mg\sin\theta = \left(\frac{1}{2}m_p + \frac{2}{5}M\right)\frac{mg\sin\theta}{m + \frac{1}{2}m_p + \frac{2}{5}M}.$$

(0.75)
Atención: el hecho de reemplazar los momentos de inercia I_p e I_{esf} conduce a simplificaciones, si no se remplaza descontar 1/2 pto. ■