PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
FIS1514 — Dinámica
Segundo Semestre 2025
Profesores: Rafael Benguria, Jaime Clark, Pablo León, Iván Muñoz,
Rodrigo Soto, Diego Teca y Alejandro Varas

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Examen Recuperativo

15 de diciembre 9:40-12:10 hrs

Reglas generales:

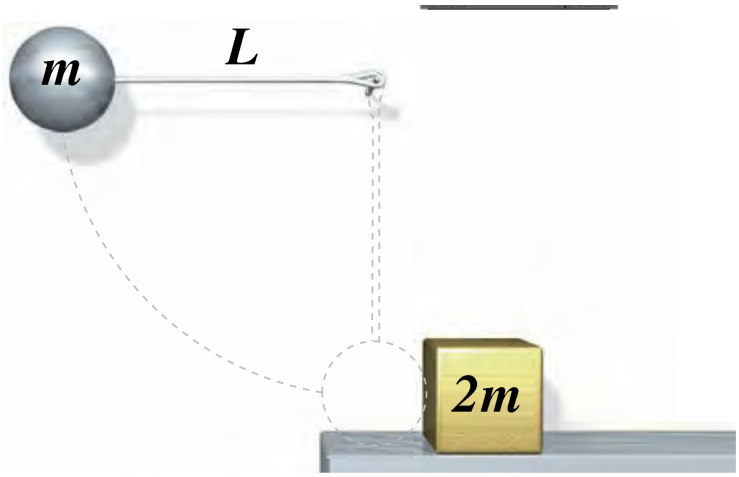
1. Escriba su nombre y RUT de manera clara y legible en cada hoja.
2. El tiempo para responder es 120 minutos.
3. Durante el desarrollo de la interrogación no hay consultas.
4. Está prohibido el uso de calculadoras, celulares, tablets, etc.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Nombre: _____

RUT: _____

Problema 1 [6 puntos]

Una bola de acero de masa m y una cuerda de longitud L y de masa insignificante conforman un péndulo simple que puede pivotar sin fricción como en la figura. Este péndulo se libera del reposo en posición horizontal, y cuando la bola está en su punto más bajo golpea un bloque de masa $2m$ que descansa en un estante. Suponiendo que la colisión es perfectamente elástica y que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa $2m$ y el estante es μ_k . Determine, en función de m, L, μ_k y la aceleración de la gravedad g:



(a) La magnitud de la velocidad de la bola de masa m justo antes del impacto. **(1.5 pts)**.

(b) La magnitud de la velocidad del bloque de masa $2m$ justo después del impacto. **(1.5 pts)**.

(c) La magnitud del impulso ejercido por la bola de masa m sobre el bloque de masa $2m$ **(1.5 pts)**.

(d) La distancia que se desliza el bloque de masa $2m$ antes de detenerse **(1.5 pts)**.

Solución:

a) La magnitud de la velocidad de la bola de masa m justo antes del impacto.

Usando la ocnservación de la energía

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gL} \qquad \textbf{(1 pts)}$$

Por lo tanto, la velocidad de la bola de masa m antes de impacto es

$$\boxed{v_{m,\text{antes}} = \sqrt{2gL}} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

b) La magnitud de la velocidad del bloque de masa $2m$ justo después del impacto.

Conservación del momento lineal

$$mv_1^i = mv_1^f + 2mv_2^f \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

choque perfectamente elástico $e = 1$

$$v_2^f - v_1^f = v_1^i \qquad \Rightarrow \qquad v_1^f = v_2^f - v_1^i \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Reemplazamos en la ecuación de la conservación del momento

$$v_1^i = (v_2^f - v_1^i) + 2v_2^f \qquad \Rightarrow \qquad v_2^f = \frac{2}{3}v_1^i \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Sustituimos $v_1^i = \sqrt{2gL}$, y se obtiene que la velocidad del bloque des pués del impacto es

$$\boxed{v_2^f = \frac{2}{3}\sqrt{2gL}} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

c) La magnitud del impulso ejercido por la bola de masa m sobre el bloque de masa $2m$.

El impulso sobre el bloque es el cambio de momento lineal del bloque:

$$I = \Delta p = (2m)\, v_{2m,\text{después}} - (2m)\cdot 0 = 2m\left(\frac{2}{3}\sqrt{2gL}\right) = \frac{4m}{3}\sqrt{2gL} \qquad \textbf{(0.1 pts)}$$

La magnitud del impulso es

$$\boxed{I = \frac{4m}{3}\sqrt{2gL}} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

d) La distancia que se desliza el bloque de masa $2m$ antes de detenerse.

Para encontrar la distancia que recorrió, usamos $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$ **(0.3 pts)**, con $v_f = 0$ y velocidad inicial $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gL}$, nos falta la aceleración. Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección horizontal al bloque:

$$\sum F_x = (2m)\, a \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

La única fuerza horizontal que actúa sobre el bloque es la fuerza de fricción cinética, opuesta al movimiento $\sum F_x = -f_k = -\mu_k(2m)g$, por lo tanto, se encuentra que la aceleración es

$$a = -\mu_k g \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Usamos la ecuación de la cinemática

$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} = \frac{\frac{8}{9}gL}{2\mu_k g} = \frac{4L}{9\mu_k} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Finalmente, la distancia que recorrió el bloque antes de detenerse es

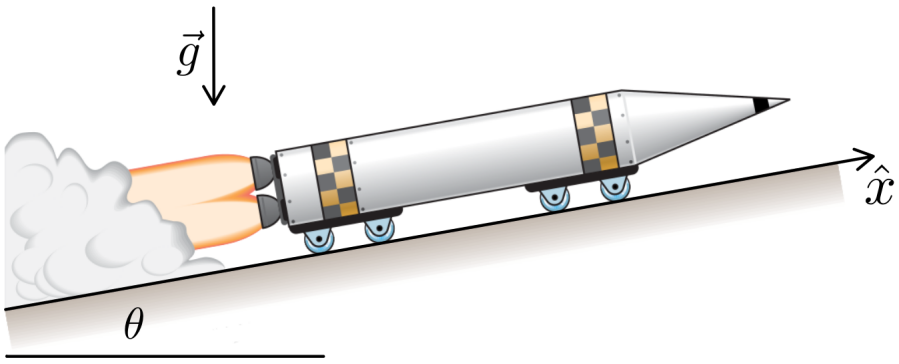
$$\boxed{d = \frac{4L}{9\mu_k}} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Problema 2 [6 puntos]

Un vehículo propulsado por un motor de reacción se mueve hacia arriba a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El motor del cohete expulsa gases a una velocidad relativa constante $\vec{u}$ en dirección opuesta al movimiento del vehículo. El vehículo parte desde el reposo con una masa total inicial m_0, la cual incluye tanto la estructura como el combustible. Durante el funcionamiento del motor, la masa $m(t)$ del vehículo disminuye debido al consumo de combustible a una tasa constante $\dot{m}$. Cuando el combustible se agota y la masa del vehículo llega a un valor final m_f, el empuje desaparece. A partir de ese instante, el vehículo continúa su movimiento únicamente bajo la acción de la gravedad. Considere que no hay fricción.



(a) Determine el tiempo t_b que demora en consumirse completamente el combustible. **(1 pts)**.

(b) Determine la rapidez $v(t)$ del vehículo durante la combustión suponiendo que parte desde el reposo y determine su valor máximo v_{max}. **(1.5 pts)**.

(c) Determine la magnitud de la aceleración $a(t)$ del vehículo durante la combustión y evalúe al inicio y al final del proceso, comentando cuál es mayor o si son iguales. **(1.5 pts)**.

(d) Suponiendo que cuando el combustible se agota, la rapidez del vehículo es v_m, determine el tiempo que tarda el vehículo en detenerse bajo la acción de la gravedad desde el instante en que se agota el combustible. **(1 pts)**.

(e) Suponiendo que cuando el combustible se agota, la rapidez del vehículo es v_m, determine la distancia adicional s_{ad} recorrida por el vehículo sobre el plano, desde el instante en que se agota el combustible hasta que se detiene. **(1 pts)**.

Solución:

(a) Mientras el combustible se está consumiendo, la masa del vehículo y su combustible está dada por:

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Cuando el combustible se agota, $m(t_b) = m_f$ **(0.3 pts)**, entonces:

$$m_f = m_0 - \dot{m}t_b \implies \boxed{t_b = \frac{m_0 - m_f}{\dot{m}}} \qquad \textbf{(0,4pts)}$$

(b) El vehículo pierde masa, por lo que aplicando el principio de impulso-momentum en la dirección del eje $\hat{x}$, se obtiene la ecuación de movimiento del objeto de masa variable $m(t)$ sobre el plano inclinado, dada por:

$$\sum F_{\text{ext}} = m(t)\frac{dv}{dt} - u\dot{m} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Dado que la única fuerza externa al sistema es la fuerza de gravedad, y que $m(t) = m_0 - \dot{m}t$, se tiene que:

$$-m(t)g\sin\theta = m(t)\frac{dv}{dt} - u\dot{m} \quad \Longrightarrow \quad dv = \left(\frac{u\dot{m}}{m_0 - \dot{m}t} - g\sin\theta\right)dt \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Integrando:

$$v(t) = \int_0^t \left(\frac{u\dot{m}}{m_0 - \dot{m}t} - g\sin\theta\right)dt \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right) - g\,t\sin\theta} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Durante la combustión, el máximo de $v(t)$ ocurre en t_b, es decir, cuando $m(t_b) = m_f$ **(0.3 pts)**, por lo tanto:

$$v_{max} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - g\,t_b\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_{max} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - g\,\frac{m_0 - m_f}{\dot{m}}\sin\theta} \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

(c) La aceleración del vehículo está dada por:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{u\dot{m}}{m_0 - \dot{m}t} - g\sin\theta \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Luego:

$$a(0) = \frac{u\dot{m}}{m_0} - g\sin\theta \qquad \textbf{(0.3 pts)} \qquad \text{y} \qquad a(t_b) = \frac{u\dot{m}}{m_f} - g\sin\theta \qquad \textbf{(0.3 pts)}$$

Como $m_f < m_0$, se tiene que:

$$\frac{u\dot{m}}{m_0} < \frac{u\dot{m}}{m_f} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a(0) < a(t_b)} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

(d) Una vez que el combustible se agota la magnitud de la aceleración a lo largo del eje $\hat{x}$ es constante, dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad dv = -(g\sin\theta)\,dt \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Integrando:

$$0 - v_m = -g\sin\theta\,t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t = \frac{v_m}{g\sin\theta}} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

(e) La diferencia de energía mecánica entre el instante en que el vehículo se detiene y el instante en que se agota su combustible es:

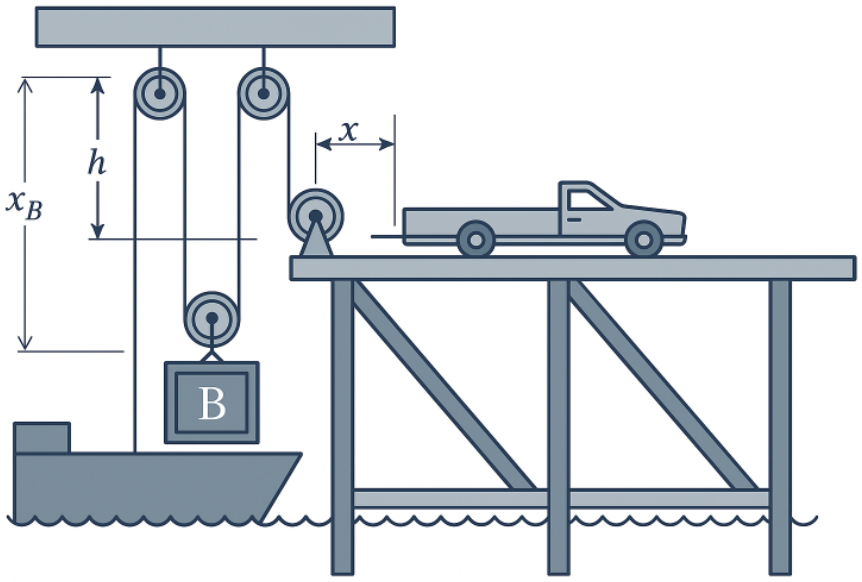
$$m_f g(s_{ad}\sin\theta) - \frac{1}{2}m_f v_m^2 = 0 \quad \textbf{(0.5 pts)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{s_{ad} = \frac{v_m^2}{2g\sin\theta}} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Problema 3 [6 puntos]

El camión mostrado en la figura se utiliza para levantar el contenedor B de un barco, por medio de un sistema de poleas. El cable de longitud L es inextensible y todas las poleas tienen un radio r despreciable. El camión inicia su movimiento desde el reposo en $x = 0$ y acelera hacia la derecha con aceleración constante $a = a_0$, hasta recorrer una distancia horizontal $x(t)$.



a) Determine la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$ del camión.

b) Si $a_0 = 6$ m/s^2, determine cuánto tiempo tarda el camión en recorrer 75 m y qué velocidad lleva en ese instante.

c) Determine la velocidad del contenedor B cuando el camión ha recorrido 75 m e indique su dirección.

Solución:

a) Determine la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$ del camión.

El camión tiene aceleración constante a_0, por lo tanto

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{v(t)} dv = \int_0^t a_0 dt \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

se obtiene que la velocidad es

$$\boxed{v(t) = a_0\, t} \qquad \textbf{(0.5 pts)} \tag{1}$$

Para la posición del camión

$$v = \frac{dx}{dt} = a_0\, t \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{x(t)} dx = \int_0^t a_0 t\, dt \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

se obtiene que la posición del camión en función del tiempo es

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\, a_0\, t^2} \qquad \textbf{(0.5 pts)} \tag{2}$$

b) Si $a_0 = 6$ m/s^2, determine cuánto tiempo tarda el camión en recorrer 75 m y qué velocidad lleva en ese instante.

El tiempo se obtiene usando la ecuación (2)

$$x(t) = \frac{1}{2}\, a_0\, t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{a_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75\,\text{m}}{6\ \text{m/s}^2}} = 5\,\text{s} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

El tiempo que demora en recorrer 75 m es de

$$\boxed{t = 5\,\text{s}} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Encontrado el tiempo, podemos usar la ecuación (1) para encontrar la velocidad.

$$v(t) = a_0\, t = 6\ \text{m/s}^2 \cdot 5\,\text{s} = 30\ \text{m/s} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Por lo tanto, la velocidad que lleva el camión cuando pasaron 5 segundo es de

$$\boxed{v = 30\ \text{m/s}} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

c) Determine la velocidad del contenedor B cuando el camión ha recorrido 75 m.

La cuerda es inextensible, así que la suma de todos los tramos variables es constante. La ecuación de ligadura es

$$x + 3x_B = \ell \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

donde x representa al camión, y x_B a la longitud de la cuerda del bloque. Derivando

$$\dot{x} + 3\dot{x}_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_B = -\frac{\dot{x}}{3} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

donde $\dot{x}$ es la velocidad del camión ($v = 30$ m/s). Reemplazamos

$$\dot{x}_B = -\frac{\dot{x}}{3} = -\frac{30\ \text{m/s}}{3} = -10\ \text{m/s}. \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Por lo tanto, cuando el camión recorrio 75 m hacia la derecha, el bloque B subio a una velcodiad de

$$\boxed{\dot{x}_B = -10\ \text{m/s}.} \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

hacia arriba.

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Problema 4 [6 puntos]

Una tabla larga y delgada de masa M se apoya sobre dos cilindros idénticos de masa m y radio R cada uno como se muestra en la figura. Se aplica una fuerza F sobre la tabla producto de lo cual los cilindros ruedan y la tabla se desplaza sobre ellos sin resbalar. La tabla es muy larga por lo que se puede suponer que su peso está soportado en partes iguales por los dos cilindros. Los coeficientes de roce entre la tabla y los cilindros y entre los cilindros y el suelo son conocidos. Dato: El momento de inercia de los cilindros es $I_c = mR^2/2$

(a) Haga el diagrama de cuerpo libre de la tabla y de los cilindros indicando todas las fuerzas que actúan sobre ellos. **(1 pts)**.

b) Escriba la ecuación de movimiento para la tabla y los cilindros (Piense con cuidado la condición de que la tabla no deslice sobre los cilindros) **(3 pts)**

c) Calcule la aceleración de la tabla y de los cilindros. **(2 pts)**

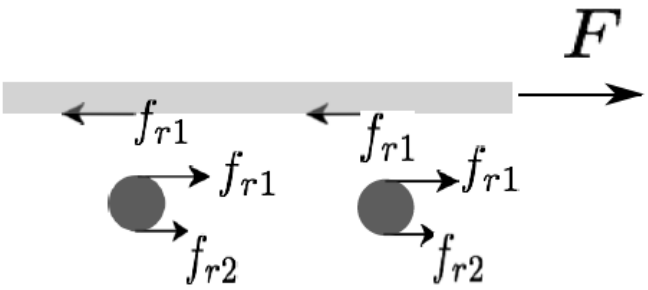


Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Desarrollo:

(a) Definamos el roce entre la tabla y los cilindros como f_{r1}, y el roce entre los cilindros y el suelo como f_{r2}. A continuación se muestra el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas horizontales actuando sobre el sistema. Las fuerzas verticales que no están dibujadas son sobre las ruedas: el peso de cada rueda sobre su centro de masa, la fuerza normal que ejerce el suelo y la fuerza normal que ejerce la tabla sobre la rueda. Sobre la tabla actúa el peso de la tabla, y la normal que ejerce la rueda sobre la tabla. **(1 pts)**



(b) Escribiendo las ecuaciones de movimiento horizontales, tenemos que la tabla se puede expresar como

$$Ma_T = F - 2f_{r1}, \qquad \textbf{(0.6 pts)} \tag{3}$$

mientras que para los cilindros se tiene

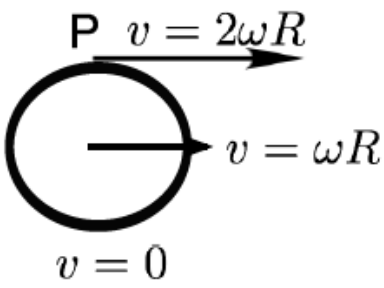
$$Ma_c = f_{r1} + f_{r2}. \qquad \textbf{(0.6 pts)} \tag{4}$$

Ahora, la ecuación de torque para los cilindros se puede escribir de la siguiente manera

$$I\alpha = R(f_{r1} - f_{r2}). \qquad \textbf{(0.6 pts)} \tag{5}$$

Para que el cilindro pueda rodar sin deslizar se debe cumplir

$$a_c = R\alpha. \qquad \textbf{(0.6 pts)} \tag{6}$$



Por otra parte, para que la tabla no deslice sobre los cilindros, la velocidad de la tabla debe ser igual a al velocidad de la parte superior del cilindro (la parte en contacto con la tabla), tal como se indica en la figura. La velocidad en dicho punto P se puede obtener como la velocidad de P respecto al centro de masas, mas la velocidad del centro de masas respecto al suelo, lo cual permite obtener que la condición de que la tabla no deslice es entonces

$$v_P = v_T = 2\omega R. \qquad \textbf{(0.6 pts)} \tag{7}$$

A partir de las ecuaciones (3) a (7) se construye el sistema de ecuaciones completo.

(c) A partir de (4) y (5) se despeja

$$2f_{r1} = ma_c + \alpha \frac{I_c}{R}, \qquad \textbf{(0.25 pts)}$$

usando (6) y (7), y el valor del momento de inercia dado se obtiene

$$2f_{r1} = \frac{3}{4} m a_T. \qquad \textbf{(0.25 pts)}$$

Reemplazando esta expresión en (3) se encuentra la aceleración de la tabla

$$a_T = \frac{F}{M + \frac{3}{4}m}, \qquad \textbf{(0.75 pts)}$$

y la aceleración de las cilindros, el cual es la mitad, o sea

$$a_c = \frac{1}{2} \frac{F}{M + \frac{3}{4}m}, \qquad \textbf{(0.75 pts)}$$