PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Examen Final

Duración total: 200 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

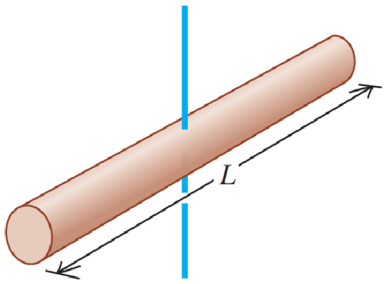
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/5$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

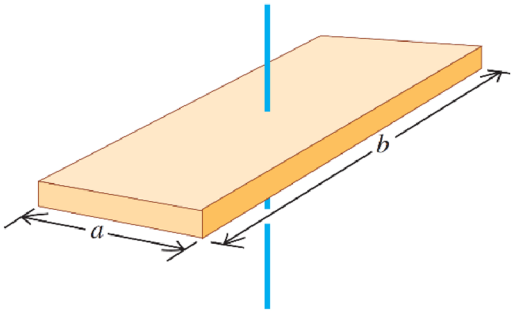
Varilla delgada,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



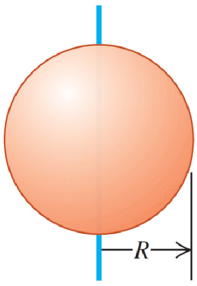
Placa rectangular,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



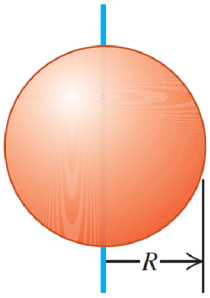
Esfera hueca de
pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



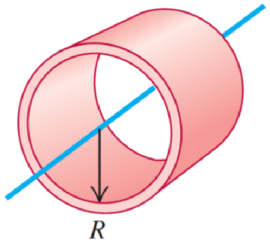
Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



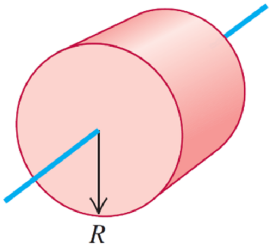
Cilindro hueco de
pared delgada

$$I = MR^2$$



Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



Problema 1 [1 punto]

Un cilindro sólido de masa $20\,kg$ llamado A está conectado por un cable a un bloque de masa $20\,kg$. El coeficiente de fricción dinámico entre el bloque y la superficie inclinada es $\mu_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, mientras que el cilindro rueda sin deslizar. El sistema comienza desde el reposo; i.e. $v_0 = 0$ y $\omega_0 = 0$. Asuma que $g = 10\,m/s^2$.

Determine la distancia recorrida x cuando la velocidad del bloque es $v = 3\,m/s$.

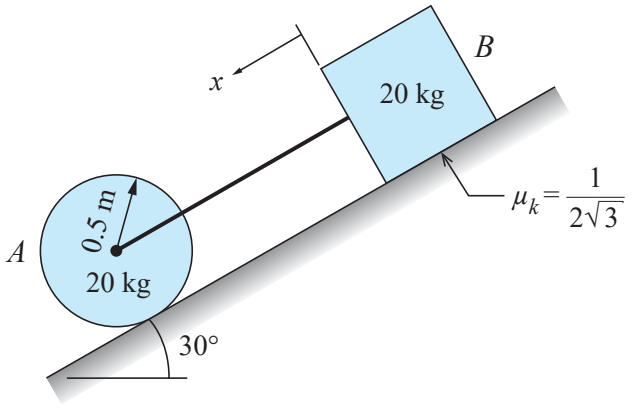
a) $x = \frac{3}{2}\,m$

b) $x = \frac{9}{2}\,m$

c) $x = \frac{9}{8}\,m$

d) $x = \frac{9}{10}\,m$

e) $x = \frac{6}{5}\,m$



Solución

Usando el principio de trabajo–energía:

$$V_1 + T_1 + U_{12}^{\star} = V_2 + T_2$$

$$[mg \cdot x \cdot \sin(30°) + mg \cdot x \cdot \sin(30°)] + 0 - F_r \cdot x = 0 + \left[\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2\right]$$

Sabemos además que:

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$F_r = \mu \cdot N = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(mg\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{mg}{4}$$

, y con ello:

$$\left[mg\frac{x}{2} + mg\frac{x}{2}\right] - \frac{mg}{4} \cdot x = \frac{5}{4}mv^2$$

$$\rightarrow \qquad x = \frac{5v^2}{4g - g} = \frac{5 \cdot 9}{40 - 10} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}\,m$$

Problema 2 [1 punto]

Una rueda de inercia $I = \frac{2}{3}mR^2$ gira con velocidad angular ω_0. En el instante $t = 0$ se aplican los frenos: una zapata hace contacto con el manto de la rueda con fuerza N, como muestra la Figura 1. El coeficiente de roce entre la zapata y la rueda es μ. Determine el instante de tiempo $t^\star$ en que la rueda se detiene.

a) $t^\star = \dfrac{2\,m\,R\,\omega_0}{3\,\mu\,N}$

b) $t^\star = \dfrac{2\,m\,R^2\,\omega_0}{3\,\mu\,N}$

c) $t^\star = \dfrac{4\,m\,R\,\omega_0}{9\,\mu\,N}$

d) $t^\star = \dfrac{4\,m\,R^2\omega_0}{9\,\mu\,N}$

e) $t^\star = \dfrac{m\,R\,\omega_0}{3\,\mu\,N}$

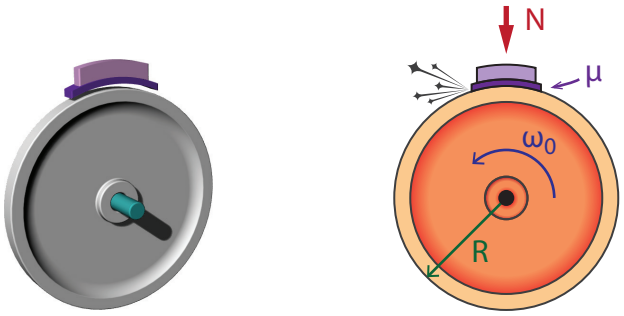


Figura 1: Rueda de inercia $I = \frac{2}{3}mR^2$ siendo frenada por una zapata de freno.

Solución

La fuerza de roce al aplicar el patín es:

$$F_r = \mu \cdot N$$

, y el momento (torque) que genera la fuerza de roce con respecto al centro de giro es:

$$\mathbf{m}_z = -F_r \cdot R = -(\mu N) \cdot R$$

La segunda ley de newton aplicada a cinemática rotacional es:

$$\sum \mathbf{m}_z = I \cdot \boldsymbol{\alpha}_z$$

$$-\mu N R = \left(\frac{2}{3}\,mR^2\right)\boldsymbol{\alpha}_z$$

$$\alpha = (-\mu N R)\left(\frac{3}{2\,mR^2}\right) = -\frac{3\mu N}{2mR}$$

, donde α es la aceleración angular. Integrando y utilizando las condiciones iniciales, la velocidad angular es:

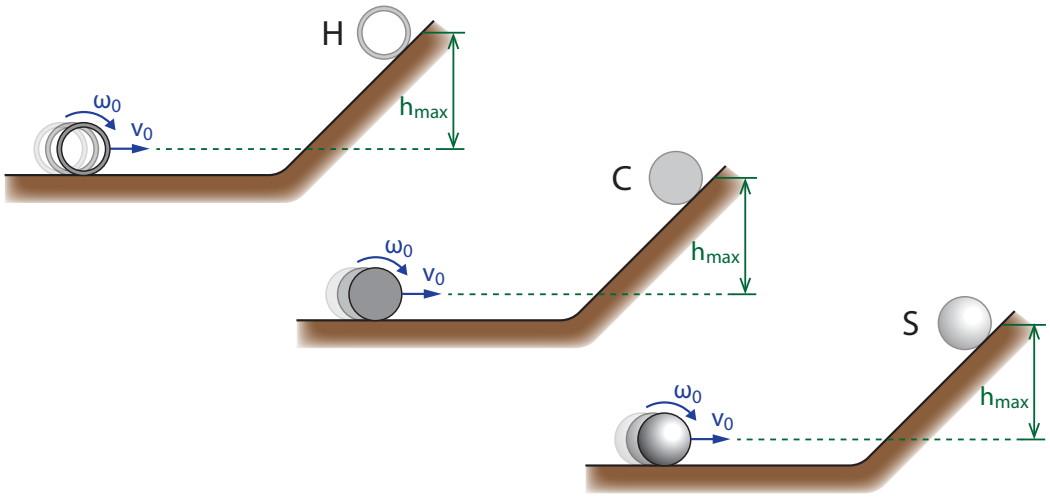
$$\omega\,(t) = \omega_0 + \alpha\,t = \omega_0 - \frac{3\,\mu N}{2\,mR}\,t$$

Resolviendo el tiempo $t^\star$ donde $\omega\,(t^\star) = 0$, se obtiene:

$$t^\star = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{2\,mR\,\omega_0}{3\,\mu N}$$

Problema 3 [1 punto]

Se tienen 3 cuerpos: un cilindro hueco de pared delgada (H), un cilindro sólido (C), y una esfera sólida (S); todos de igual masa ($m_H = m_C = m_S$) e igual radio ($r_H = r_C = r_S$). Estos comienzan su carrera en el plano horizontal rodando sin deslizar con velocidad traslacional v_0 y velocidad angular ω_0. Los cuerpos suben por un plano inclinado rodando sin deslizar. ¿Qué puede concluir respecto a las alturas máximas que alcanzan?



a) Todos los cuerpos llegan a la misma altura máxima $h_{\max}$ ya que todos comienzan con las mismas velocidades (traslacional y angular).

b) $(h_{\max})_H > (h_{\max})_C > (h_{\max})_S$

c) $(h_{\max})_S > (h_{\max})_C > (h_{\max})_H$

d) $(h_{\max})_C > (h_{\max})_S > (h_{\max})_H$

e) $(h_{\max})_C > (h_{\max})_H > (h_{\max})_S$

Solución

La altura máxima alcanzada será igual a la energía cinética inicial; i.e.:

$$T_1 = V_2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = mgh_{\max}$$

Es decir, aquel cuerpo con mayor energía inicial llegará más alto. Como todos los cuerpos tienen igual masa, el primer término en T_1 será idéntico para los 3 cuerpos, pero su energía cinética rotacional será proporcional a las respectivas inercias (ya que ω_0 es común a todos los cuerpos). En este caso:

$$I_H = mr^2 \quad ; \quad I_C = \frac{1}{2}mr^2 \quad ; \quad I_S = \frac{2}{5}mr^2$$

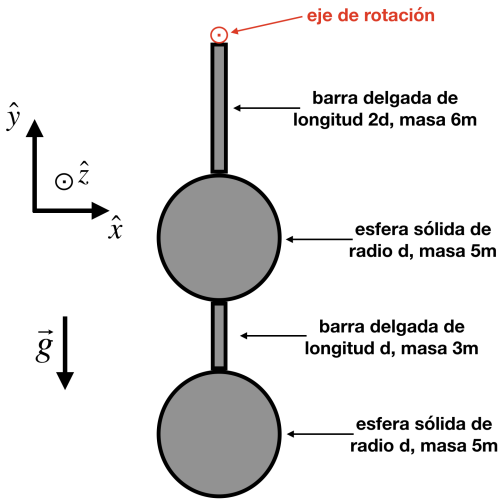
$$I_H > I_C > I_S$$

, y con ello:

$$(h_{\max})_H > (h_{\max})_C > (h_{\max})_S$$

Enunciado para los siguientes 3 problemas

Se forma un artefacto pegando 4 objetos como se muestra en la figura: una barra delgada de longitud $2d$ y masa $6m$, seguido por una esfera sólida de radio d y masa $5m$, seguido por una barra delgada de longitud d y masa $3m$, y terminando por otra esfera sólida de radio d y masa $5m$. Los cuatro objetos son homogéneos, es decir de densidad uniforme. El artefacto se cuelga de un sólo punto de sujeción formando un péndulo, de forma que puede rotar libremente (sin ningún tipo de roce) respecto a un eje de rotación perpendicular a la hoja y que pasa por el extremo superior de la barra de longitud $2d$.



Nota: las respuestas a cada problema son totalmente independientes, así que se recomienda que si no puede resolver uno de ellos avance al siguiente de todas maneras.

Problema 4 [1 punto]

Determine el momento de inercia I del artefacto en función de m y d respecto al eje de rotación mostrado en la figura anterior:

a) $I = 143\,md^2$

b) $I = 298\,md^2$

c) $I = 252\,md^2$

d) $I = 126\,md^2$

e) $I = 200\,md^2$

El momento de inercia total se determina sumando los momentos de inercia de cada objeto:

$$I_O = I_{\mathrm{O-barra1}} + I_{\mathrm{O-esfera1}} + I_{\mathrm{O-barra2}} + I_{\mathrm{O-esfera2}}$$

, donde:
$$I_{\mathrm{O-barra1}} = \frac{1}{3}(6m)(2d)^2 = 8\,md^2$$
$$I_{\mathrm{O-esfera1}} = I_{\mathrm{G-esfera1}} + m_{\mathrm{esfera1}} \cdot \bar{d}^2_{\mathrm{esfera1}} = \frac{2}{5}(5m)\,d^2 + (5m)(3d)^2 = 47\,md^2$$
$$I_{\mathrm{O-barra2}} = I_{\mathrm{G-barra2}} + m_{\mathrm{barra2}} \cdot \bar{d}^2_{\mathrm{barra2}} = \frac{1}{12}(3m)\,d^2 + (3m)(4d)^2 = 61\,md^2$$
$$I_{\mathrm{O-esfera2}} = I_{\mathrm{G-esfera2}} + m_{\mathrm{esfera2}} \cdot \bar{d}^2_{\mathrm{esfera2}} = \frac{2}{5}(5m)\,d^2 + (5m)(6d)^2 = 182\,md^2$$

Es decir, el segundo momento de inercia (másico) para el sitema que gira sobre el pivote superior es:

$$I_O = (8 + 47 + 61 + 182)\,md^2 = 298\,md^2$$

Problema 5 [1 punto]

Determine la distancia d_{CM} entre el eje de rotación y el centro de masa del artefacto de la pregunta anterior en función de d:

a) $d_{\mathrm{CM}} = \dfrac{129}{38}d$

b) $d_{\mathrm{CM}} = \dfrac{95}{38}d$

c) $d_{\mathrm{CM}} = \dfrac{71}{19}d$

d) $d_{\mathrm{CM}} = \dfrac{141}{19}d$

e) $d_{\mathrm{CM}} = \dfrac{63}{19}d$

Solución

Para obtener la distancia al centro de masa del artefacto total consideramos la distancia al centro de masa de cada uno de los objetos por separado y hacemos el promedio ponderado como si fueran partículas:

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{CM}} &= \frac{d(6m) + 3d(5m) + (4d + \frac{d}{2})(3m) + 6d(5m)}{19m} \\ &= md\frac{\left(6 + 15 + \frac{27}{2} + 30\right)}{19m} \\ &= \frac{129}{38}d \end{aligned}$$

Problema 6 [1 punto]

Si ahora se posiciona el péndulo a un ángulo pequeño respecto a la vertical y se deja oscilar, encuentre el periodo de oscilación T_n. Recuerde que para ángulos pequeños se cumple que $\sin\theta \approx \theta$. Exprese su respuesta en términos de I, m, d_{CM} y g.

Nota: Aquí I es la inercia respecto al eje de rotación y no respecto al centro de masa del artefacto.

a) $T_n = 2\pi\sqrt{\dfrac{d_{\mathrm{CM}}}{g}}$

b) $T_n = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{19mgd_{\mathrm{CM}}}}$

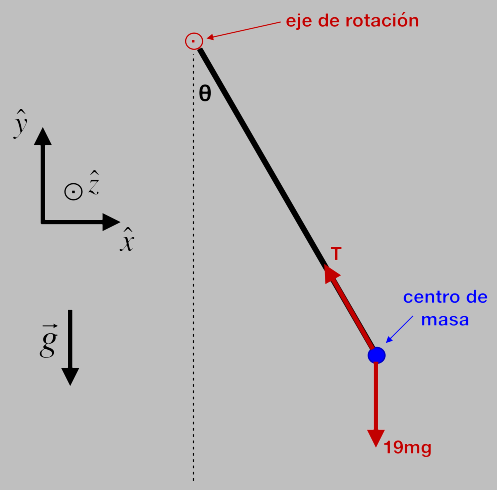
c) $T_n = 2\pi\sqrt{\dfrac{I^2}{38m^2gd_{\mathrm{CM}}^2}}$

d) $T_n = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{38mgd_{\mathrm{CM}}}}$

e) $T_n = 2\pi\sqrt{\dfrac{d_{\mathrm{CM}}}{2g}}$

Solución

Aplicamos la segunda ley de Newton para rotaciones ($\Sigma\vec{\tau} = I\alpha$) al péndulo como un todo y en la dirección $\hat{z}$, notando que la tensión no hace torque (momento) respecto al eje de rotación:



$$-19\,mgd_{\mathrm{CM}}\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

En la aproximación $\sin\theta \approx \theta$ nos queda:

$$\ddot{\theta} + \frac{19\,mgd_{\mathrm{CM}}}{I}\theta = 0$$

de donde reconocemos que $\omega = \sqrt{\frac{19mgd_{\mathrm{CM}}}{I}}$, y por ende:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{19\,mgd_{\mathrm{CM}}}}$$

Problema 7 [1 punto]

Una raqueta (de tenis) con un sensor de fuerza golpea a una pelota de masa $0{,}1\,kg$. La pelota viene con una velocidad inicial $v_0 = +10\,m/s$ en la misma dirección de movimiento de la raqueta: i.e. después del golpe continúa en la misma dirección "+x". El sensor registró el diagrama de fuerza que se muestra en la figura. ¿Cuál es la velocidad final de la pelota de tenis?
Asuma que los efectos de la gravedad son despreciables, y que el movimiento es completamente unidimensional (horizontal).

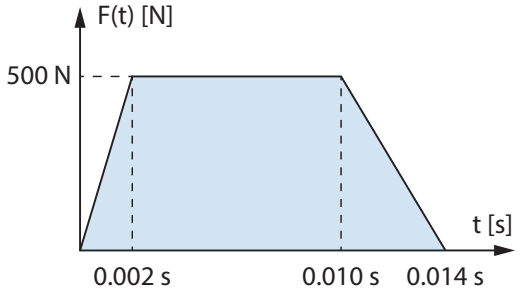
a) $v_f = 55\,m/s$

b) $v_f = 65\,m/s$

c) $v_f = 45\,m/s$

d) $v_f = 70\,m/s$

e) $v_f = 150\,m/s$



Solución
Usando el principio de impulso–momentum:

$$mv_0 + \int_0^{0{,}014} F\,(t)\ \mathrm{d}t = mv_f$$

$$(0{,}1)\,(10) + \left[\frac{1}{2}\,(0{,}002)\,(500) + (0{,}008)\,(500) + \frac{1}{2}\,(0{,}004)\,(500)\right] = (0{,}1)\,(v_f)$$

$$1 + 5{,}5 = (0{,}1)\,(v_f)$$

$$v_f = 65\,m/s$$

Problema 8 [1 punto]

El cohete de tres etapas Saturn V envió a los astronautas del programa Apolo a aterrizar en la Luna en seis misiones diferentes. Durante la primera etapa el cohete es impulsado por cinco enormes motores que queman un hidrocarburo similar al queroseno. El cohete completamente cargado tiene una masa total de $3 \cdot 10^6\, kg$, de los cuales $2/3$ corresponden al combustible de la primera etapa, que es quemado en los primeros $200\, s$ de vuelo a una tasa constante. Si el cohete expulsa el combustible quemado a una rapidez constante, relativa al cohete, de $3500\, m/s$. ¿Cuál es la aceleración del cohete al inicio de la primera etapa?
Nota: Asuma que el cohete parte del reposo, tiene trayectoria vertical, y además $g = 10\, m/s^2$.

a) $2\, m/s^2$

b) $\dfrac{5}{3}\, m/s^2$

c) $\dfrac{6{,}5}{3}\, m/s^2$

d) $\dfrac{3}{5}\, m/s^2$

e) 0

Solución
La fuerza externa es la gravitatoria (peso del cohete), actuando en el eje z:

$$F_{\text{ext}} = -m\, g$$

La 2^a Ley de Newton para el cohete en la situación descrita es:

$$-m\,(t)\; g = m\,(t)\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - v_{\text{esc}}\, \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

, de donde podemos despejar la aceleración del cohete:

$$a\,(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{-m\,(t)\; g + \; v_{\text{esc}}\, \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}{m\,(t)}$$

La velocidad a la que el cohete expulsa el combustible quemado es: $v_{\text{esc}} = -3500\, m/s$.
La rapidez con que se quema el combustible es constante:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha = -\frac{2}{3}\; \frac{3 \cdot 10^3\, kg}{200\, s} = -10^4\, kg/s$$

Al inicio de la etapa $m\,(t = 0) = 3 \cdot 10^6\, kg$.
Por lo tanto, la aceleración del cohete es:

$$a\,(t = 0) = \frac{5}{3}\, m/s^2$$

Problema 9 [1 punto]

Un bloque de masa $m_1 = m$ se deja caer desde una altura h_0 sobre una plataforma de masa $m_2 = 3m$ que está unida a un resorte de constante k. La plataforma y el resorte están en reposo antes de la colisión. Si el coeficiente de restitución asociado al choque es $e = 1/2$, la rapidez (magnitud de velocidad) del bloque justo después de la colisión es:

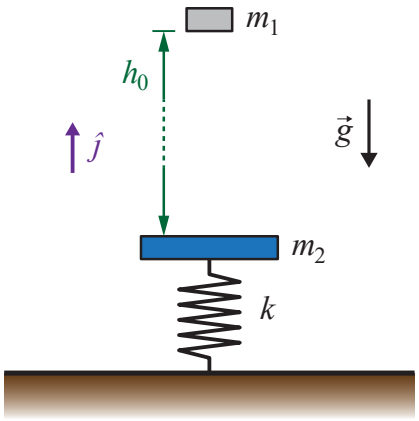
a) $\frac{3}{8}\sqrt{2g\,h_0}$

b) $\frac{3}{4}\sqrt{g\,h_0}$

c) $\sqrt{2g\,h_0}$

d) $\frac{1}{8}\sqrt{2g\,h_0}$

e) $\frac{2g\,h_0}{8}$



Solución

Para obtener la magnitud de la velocidad justo antes del impacto aplicamos conservación de energía mecánica al bloque de masa m_1: $E_m = K_0 + V_0 = K_i + V_i$.
Tomando la altura inicial de la plataforma como origen del potencial gravitatorio y sabiendo que el bloque parte del reposo:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2_{\text{bloque}_i} \qquad \rightarrow \qquad v_{\text{bloque}_i} = -\sqrt{2g\,h_0}$$

Para obtener la magnitud de la velocidad del bloque justo después del choque aplicamos conservación del momentum y la expresión del coeficiente de restitución:

$$mv_{\text{bloque}_i} + 3mv_{\text{plataforma}_i} = mv_{\text{bloque}_f} + 3mv_{\text{plataforma}_f}$$
$$e = \frac{v_{\text{plataforma}_f} - v_{\text{bloque}_f}}{v_{\text{bloque}_i} - v_{\text{plataforma}_i}} = \frac{1}{2}$$

Como la plataforma está en reposo antes del choque, $v_{\text{plataforma}_i} = 0$, y con ello:

$$mv_{\text{bloque}_i} = mv_{\text{bloque}_f} + 3mv_{\text{plataforma}_f}$$
$$v_{\text{plataforma}_f} - v_{\text{bloque}_f} = \frac{v_{\text{bloque}_i}}{2}$$

Despejando v_{bloque_f} se llega a:

$$v_{\text{bloque}_f} = -\frac{v_{\text{bloque}_i}}{8}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de v_{bloque_i} se obtiene:

$$v_{\text{bloque}_f} = -\frac{\sqrt{2g\,h_0}}{8}$$

Problema 10 [1 punto]

Considere el sistema mostrado en la figura, en el cual un cilindro muy pequeño P se deja evolucionar libremente en el tiempo $t = 0$ desde la posición $r = r_0$ dentro de un tubo que gira con una velocidad angular constante w_0 alrededor de un eje vertical ($\hat{z}$). Considere que inicialmente ($t = 0$) el cilindro está en la posición $r\,(0) = r_0$ y sin velocidad con respecto al tubo $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. Desprecie el roce entre el cilindro y el tubo.

¿Cuál de las siguientes expresiones representa adecuadamente la fuerza que el tubo ejerce sobre el cilindro P para un tiempo $t \geq 0$ y en el cual el cilindro aún está dentro de este?

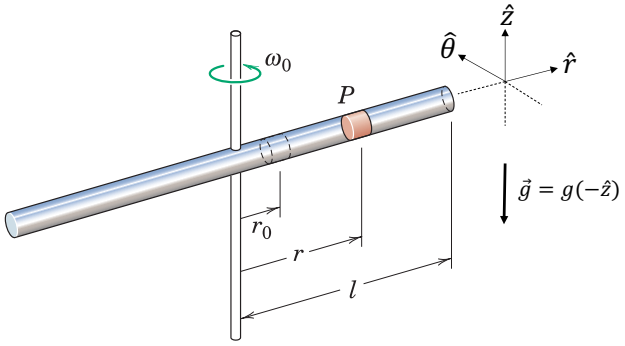
a) $\vec{F} = f_r\hat{r} + f_\theta\hat{\theta} + f_z\hat{z}$

b) $\vec{F} = f_z\hat{z}$

c) $\vec{F} = f_\theta\hat{\theta} + f_z\hat{z}$

d) $\vec{F} = f_r(-\hat{r}) + f_z\hat{z}$

e) $\vec{F} = f_r(-\hat{\theta}) + f_z\hat{z}$



Nota: f_r, f_θ y f_z son escalares mayores o iguales a cero.

Solución

En general se tiene que:

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$$

En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} & & \mathbf{f}_r = 0 \quad &\rightarrow \quad \mathbf{a}_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = 0 \\ \omega = \dot{\theta} = \text{cte} \quad &\rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \quad &\rightarrow \quad \mathbf{f}_\theta = m\mathbf{a}_\theta = 2m\dot{r}\omega_0 \\ \mathbf{a}_z = 0 \quad &\rightarrow \quad \mathbf{f}_z - mg = 0 \quad &\rightarrow \quad f_z = mg \end{aligned}$$

Es decir:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_\theta\,\hat{\theta} + \mathbf{f}_z\,\hat{z}$$

Errata: La pregunta debía decir "*f_r, f_θ y f_z son escalares mayores a cero*", y no "*mayores o iguales a cero*". Debido a ello, también se aceptará como respuesta válida la siguiente solución:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_r\,\hat{r} + \mathbf{f}_\theta\,\hat{\theta} + \mathbf{f}_z\,\hat{z}$$

Problema 11 [1 punto]

La figura muestra un juguete móvil que consta de cuatro objetos que cuelgan de tres barras de masa despreciable. Encuentre el valor de m_3 si el sistema está en equilibrio.

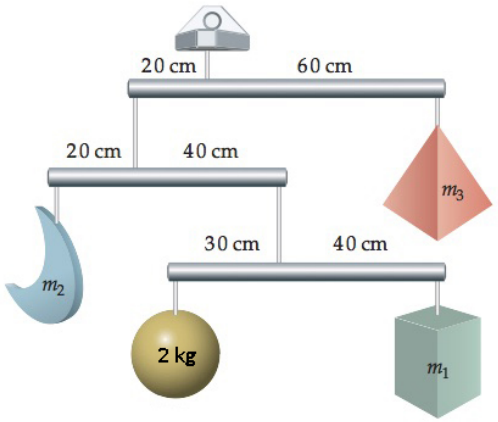
a) $\frac{7}{2}\,kg$

b) $\frac{7}{4}\,kg$

c) $\frac{63}{4}\,kg$

d) $63\,kg$

e) $\frac{33}{12}\,kg$



Solución

Para que el sistema esté en equilibrio se debe cumplir las condiciones de equilibrio:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum \vec{F} = 0$$

En este caso, basta con resolver la ecuación $\sum \vec{\tau} = 0$ para cada una de las tres barras. Además, como todos los pesos se ejercen de forma perpendicular a la barra, se cumplirá:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \pm d\, mg\hat{k}$$

, donde el signo queda definido según la *regla de la mano derecha*, y d es la menor distancia desde el centro de giro a la línea de acción de la fuerza.
Para la barra más baja, la condición $\sum \vec{\tau} = 0$ equivale a:

$$(0{,}3\,m)\,(2\,kg)\,(g) - (0{,}4\,m)\,(m_1)\,(g) = 0$$
$$m_1 = \frac{3}{2}\,kg$$

Con el valor de m_1, ahora se busca el equilibrio de la barra intermedia:

$$(0{,}2\,m)\,(m_2)\,(g) - (0{,}4\,m)\,(2 + m_1)\,(g) = 0$$
$$m_2 = \frac{4\,(2 + {}^{3}\!/_{4}2)}{2} = 7\,kg$$

Finalmente, haciendo equilibrio para la barra más alta:

$$(0{,}2\,m)\,(2 + m_1 + m_2)\,(g) - (0{,}6\,m)\,(m_3)\,(g) = 0$$
$$m_3 = \frac{7}{2}\,kg$$