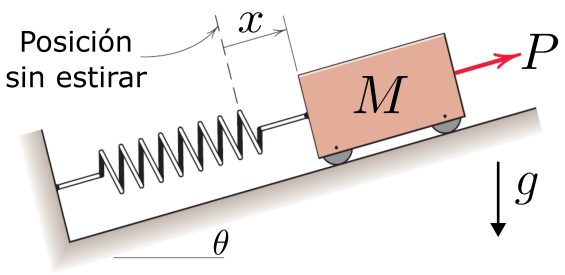
Control 2: FIS1514 - Dinámica

Instituto de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs: E. Arévalo, B. Loewe, D. Teca,
Primer Semestre 2025

1. El carrito de masa M de la figura se encuentra ubicado sobre un plano inclinado con ángulo de elevación θ y atado a un resorte de constante k. Considere que el resorte no está deformado en la posición $x = 0$. Bajo la acción de una fuerza constante P que apunta paralela al plano, y partiendo desde el reposo, el carrito se mueve desde la posición inicial x_i hasta la posición final x_f.



(a) Determine el trabajo realizado sobre el carrito por el resorte.

(b) Determine el trabajo realizado sobre el carrito por su peso.

(c) Asumiendo que x_f es el máximo valor que toma x, determine P en términos de x_i, x_f, M, g, θ y k.

a) Usando el que para una fuerza conservativa $W = -\Delta U$ tenemos que

$$W_R = -(U_f^R - U_i^R) = -(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2) = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

b) El peso es una fuerza conservativa. Luego si h_i y h_f denotan las alturas iniciales y finales del carrito, entonces

$$W_G = -(U_f^G - U_i^G) = -(mgh_f - mgh_i).$$

Por trigonometría: $h_i = x_i \sin(\theta)$ y $h_f = x_f \sin(\theta)$. Luego

$$W_G = -(U_f^G - U_i^G) = mg\sin(\theta)(x_i - x_f).$$

c) Usando el teorema de energía y trabajo, tenemos que $\Delta K = W_T$, donde W_T denota el trabajo total. El carrito parte del reposo ($K_i = 0$) y termina en reposo (x llega a su valor máximo x_f, $K_f = 0$). Luego $\Delta K = 0$. Concluimos entonces que:

$$W_T = W_R + W_G + W_P = 0, \tag{1}$$

en donde W_P denota el trabajo hecho por la fuerza P. Como esta fuerza es contante, este trabajo esta dado por $W_P = P(x_f - x_i)$. Con esto,

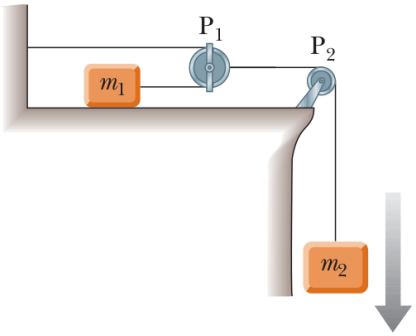
$$W_R + W_G + W_P = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) + mg\sin(\theta)(x_i - x_f) + P(x_f - x_i) = 0. \tag{2}$$

Despejando P obtenemos finalmente

$$P = mg\sin(\theta) + \frac{1}{2}k(x_i + x_f). \tag{3}$$

■

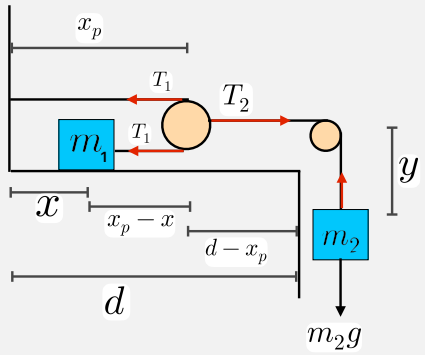
2. Un objeto de masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a un objeto de masa m_2 por medio de una polea muy ligera P_1 y una polea fija ligera P_2, como se muestra en la figura.



a) si $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ son las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente, determine la ecuación de ligadura del sistema y la relación entre las aceleraciones que se deriva de ella.

b) Determine las aceleraciones $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ en términos de g y de las masas m_1 y m_2.

a) Ecuación de Ligadura



Llamemos ℓ_1 al largo de la cueda que une m_1 con la pared y que pasa por la polea 1

$$(x_p - x) + x_p = \ell_1 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_p - x = \ell_1 \tag{4}$$

y ℓ_2 el largo de la cuerda que une m_2 con la polea 1

$$(d - x_p) + y = \ell_2 \tag{5}$$

lo único que varia es x e y, por lo tanto, podemos despejar x_p de ecuación (4) y reemplazar en (5) para tener una sola ecuación de ligadura que contenga ambas variables. Despejamos x_p

$$x_p = \frac{\ell_1 + x}{2}$$

Reemplazamos en (5)

$$\left(d - \frac{\ell_1 + x}{2}\right) + y = \ell_2$$

derivamos dos veces respecto al tiempo, y se obtiene la relación

$$-\frac{\ddot{x}}{2} + \ddot{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = 2\ddot{y}$$

Por lo tanto, la ecuación de ligadura y la relación entre las aceleraciones $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ son

$$\boxed{\left(d - \frac{\ell_1 + x}{2}\right) + y = \ell_2 \qquad \& \qquad \ddot{x} = 2\ddot{y}}$$

■

b) Aceleraciones

Usando la segunda ley de Newton, tenemos

$$\forall\, m_1: \qquad T_1 = m_1\ddot{x} \tag{6}$$

$$\forall\, m_2: \qquad m_2 g - T_2 = m_2\ddot{y} \tag{7}$$

La relación entre las tensiones es $2T_1 = T_2$, así que a la ecuación (6) la multiplicamos por dos, reemplazamos $\ddot{x} = 2\ddot{y}$, con esto obtenemos T_2 y usamos (7) para encontrar el valor de $\ddot{y}$. De (6)

$$T_2 = 2T_1 = 2m_1\ddot{x} = 2m_1 \cdot 2\ddot{y} = 4m_1\ddot{y} \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = 4m_1\ddot{y}$$

Reemplzamos en (7)

$$\begin{aligned} m_2 g - T_2 &= m_2\ddot{y} \\ m_2 g - 4m_1\ddot{y} &= m_2\ddot{y} \\ m_2 g &= m_2\ddot{y} + 4m_1 = (4m_1 + m_2)\ddot{y} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aceleración $\ddot{y}$ es

$$\ddot{y} = \frac{m_2\, g}{4m_1 + m_2}$$

y como $\ddot{x} = 2\ddot{y}$, entonces

$$\ddot{x} = 2\ddot{y} = 2 \cdot \frac{m_2\, g}{4m_1 + m_2} = \frac{2m_2\, g}{4m_1 + m_2}$$

Finalmnete, las aceleraciones son

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2m_2\, g}{4m_1 + m_2} \quad \& \quad \ddot{y} = \frac{m_2\, g}{4m_1 + m_2}}$$

■

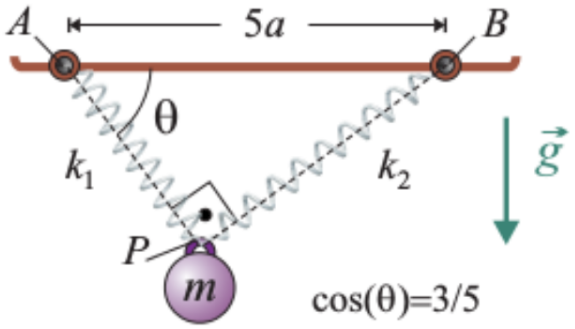
Rúbrica

Pregunta (a)	0.5 pts Dibujo 1 pts Ec. (4) 1 pts Ec. (5) 0.5 pts $\ddot{x} = 2\ddot{y}$	Pregunta (b)	0.5 pts Ec. (6) 0.5 pts Ec. (7) 1 pts $\ddot{x}$ 1 pts $\ddot{y}$

Se permite puntaje intermedio. Por ejemplo si en el diagrama solo dibujo correctamente la dirección de las fuerzas, se asigna 0.2 pt. Esto queda a criterio del corrector

■

3.



Los resortes AP y BP, de masas despreciables, tienen longitudes naturales $\ell_{1_0} = 2a$ y $\ell_{2_0} = 2a$, respectivamente. Sus constantes elásticas de Hooke, k_1 y k_2, son conocidas. Cada resorte está fijo por un extremo a los puntos A y B, respectivamente, ubicados sobre un plano horizontal y separados una distancia de $5a$. Los extremos libres de ambos resortes se unen en un punto común P, al cual se encuentra conectada una partícula de masa m.
Se considera que el sistema está en equilibrio estático. En esta configuración, se verifica que los segmentos AP y BP son perpendiculares entre sí, y que AP forma un ángulo θ con la horizontal, tal que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por cada resorte al sostener la masa m en equilibrio, suponiendo que ambos se encuentran estirados respecto a su longitud natural?

b) Suponga ahora que la masa m se elimina del sistema (es decir, $m = 0$). Si los extremos libres de ambos resortes permanecen conectados entre sí, ¿cómo será la nueva configuración de equilibrio? Realice un esquema claro que represente esta situación.

c) En la nueva configuración de equilibrio del sistema (sin la masa m), determine la posición del punto de contacto entre los extremos libres de los dos resortes.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por cada resorte al sostener la masa m en equilibrio, suponiendo que ambos se encuentran estirados respecto a su longitud natural?

Solución

En la figura, sea ℓ_1 la distancia entre los puntos AP y ℓ_2 la distancia entre BP. Sea, además, $H = 5\,a$, la distancia entre AB. Entonces

$$\cos\theta = \frac{3}{5} = \frac{\ell_1}{H}.$$

Por tanto

$$\ell_1 = 3\,a.$$

Nótese que

$$\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} = H$$

por tanto

$$\ell_2 = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4\,a.$$

La relación entre el trabajo hecho por una fuerza conservativa y el potencial es $W_C = -\Delta U$. Entonces el trabajo hecho por el resorte AP es:

$$W_{C_1} = -\frac{1}{2}k_1(\ell_1 - \ell_{1_0})^2 \;=\; -\frac{1}{2}k_1(3a - 2a)^2 \;=\; -\frac{1}{2}k_1 a^2.$$

De igual manera, el trabajo hecho por el resorte BP es:

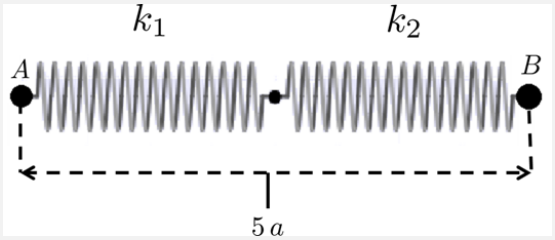
$$W_{C_2} = -\frac{1}{2}k_2(\ell_2 - \ell_{2_0})^2 \;=\; -\frac{1}{2}k_2(4a - 2a)^2 \;=\; -2k_2 a^2.$$

■

b) Suponga ahora que la masa m se elimina del sistema (es decir, $m = 0$). Si los extremos libres de ambos resortes permanecen conectados entre sí, ¿cómo será la nueva configuración de equilibrio? Realice un esquema claro que represente esta situación.

Solución

Dado que la longitud natural de cada resorte es $2a$ y la distancia entre los puntos A y B es $5a$, se concluye que ambos resortes estarán necesariamente estirados, incluso si se encuentran dispuestos de forma horizontal. Por tanto, la configuración de equilibrio en este caso corresponde a la que se muestra en la figura a continuación.



■

c) En la nueva configuración de equilibrio del sistema (sin la masa m), determine la posición del punto de contacto entre los extremos libres de los dos resortes.

Solución

Supongamos que el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el punto A, y que el eje horizontal coincide con el segmento que une los puntos A y B. Denotemos por x_0 la posición de equilibrio, sobre dicho eje, del punto de contacto entre los extremos libres de los dos resortes (ahora conectados entre sí y sin la masa m).
En esta configuración, la segunda ley de Newton se reduce a la condición de equilibrio estático de fuerzas elásticas:

$$-k_1(x_0 - \ell_{1_0}) - k_2\left(x_0 - (H - \ell_{2_0})\right) = 0,$$

donde $H = AB = 5a$ representa la distancia entre los puntos fijos A y B.
Resolviendo para x_0, se obtiene:

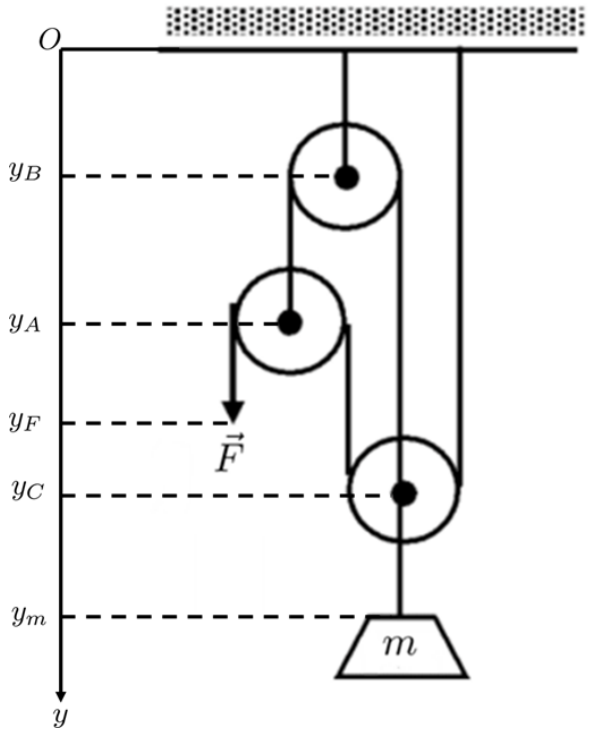
$$x_0 = \frac{k_1\ell_{1_0} + k_2(H - \ell_{2_0})}{k_1 + k_2}.$$

Sustituyendo los valores dados para las longitudes naturales, $\ell_{1_0} = 2a$ y $\ell_{2_0} = 2a$, se llega a:

$$x_0 = \frac{2a\,k_1 + 3a\,k_2}{k_1 + k_2} = 2a + a\,\frac{k_2}{k_1 + k_2}.$$

■

4. Considere el sistema de poleas mostrado en la figura. Se asume que no hay fricción, que las poleas tienen masa y radio despreciables, y que las cuerdas son inextensibles.



Responda a las siguientes preguntas:

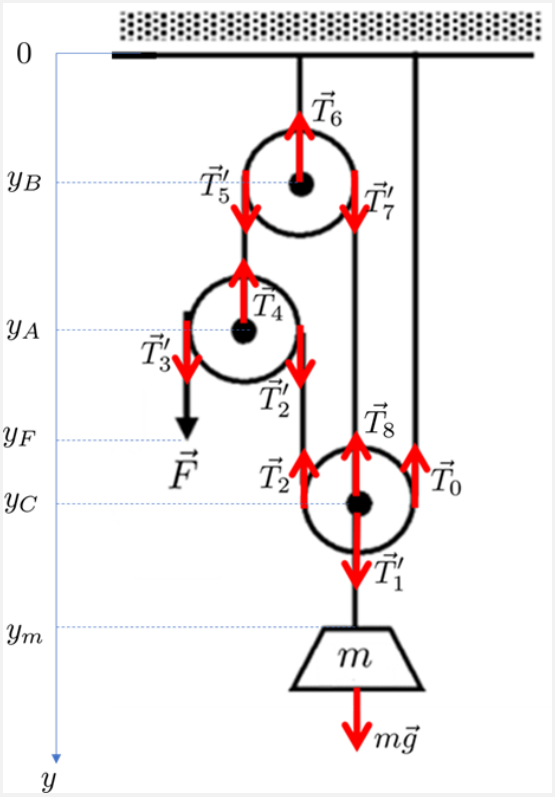
a) En estado estacionario (equilibrio), ¿cuál es el valor de la fuerza $F = |\vec{F}|$ en función del peso mg?

b) Determine las condiciones de ligadura del sistema (relaciones impuestas por la inextensibilidad de las cuerdas).

c) En el caso dinámico, ¿cuál es la relación entre la aceleración del extremo de la cuerda donde se aplica la fuerza $\vec{F}$ y la aceleración de la masa m?

a) En estado estacionario, ¿cual es el valor de la fuerza $F = |\vec{F}|$ en términos del peso mg?

Solución



Ya que las cuerdas transmiten la tensión, de la figura observamos que

$$|\vec{F}| = |\vec{T}_3'| = |\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_0| = F$$

y

$$|\vec{T}_4| = |\vec{T}_5'| = |\vec{T}_7'| = |\vec{T}_8|.$$

Por otro lado de los diagramas de cuerpo libre de las poleas vemos que

$$|\vec{T}_3'| + |\vec{T}_2'| = |\vec{T}_4| = 2F,$$

$$|\vec{T}_2| + |\vec{T}_8| + |\vec{T}_0| = |\vec{T}_1'| = 2F + 2F = 4F,$$

y

$$|\vec{T}_1'| = mg.$$

Por tanto

$$F = \frac{mg}{4}.$$

donde $g = |\vec{g}|$.

■

b) Determine las condiciones de ligadura del sistema.

Solución

Las condiciones de ligadura en terminos de las coordenadas mostradas en la figura son:

$$(y_F - y_A) + (y_C - y_A) + y_C = \text{constante}$$

$$(y_A - y_B) + (y_C - y_B) = \text{constante}$$

$$y_m - y_C = \text{constante}$$

$$y_B = \text{constante}$$

La forma diferencial de estas condiciones es

$$dy_F + 2dy_C - 2dy_A = 0$$
$$dy_A + dy_C = 0$$
$$dy_m - dy_C = 0$$

■

c) En el caso dinámico, ¿cuál es la relación entre la aceleración del extremo de la cuerda donde se aplica la fuerza $\vec{F}$ y la aceleración de la masa m?

Solución

Combinando las relaciones diferenciales se obtiene que

$$dy_F = -4dy_m.$$

Por tanto

$$\frac{d^2y_F}{dt^2} = -4\frac{d^2y_m}{dt^2}.$$

■