Interrogación 1

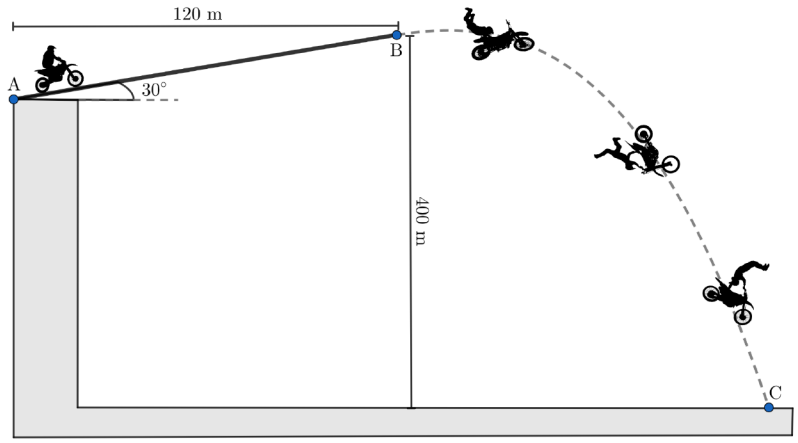
Fecha: 13 de Septiembre 2023

1. Un intrépido motociclista está listo para impresionar a la audiencia con una emocionante acrobacia mientras salta desde una rampa inclinada. Comenzando en el punto A con una rapidez inicial de 12 m/s, experimenta una aceleración descrita por la función $a(t) = 3t^2$ (medida en m/s^2). Después de 2 segundos, al llegar al punto B, ejecuta su acrobacia.
   Utilizando esta información, debes determinar:

   (a) La rapidez de salida en el punto B **[2 puntos]**.

   (b) La altura máxima que alcanza el motociclista medida desde el suelo. Si no encuentra la rapidez pedida en el inciso anterior, puede asumir que el motociclista sale con una rapidez inicial v_0 en el punto B **[2 puntos]**.

   (c) La distancia horizontal recorrida, medida desde el punto A **[2 puntos]**



Ayuda:

- Para resolver el ejercicio, tome $g = 10$ m/s^2.
- Recuerde que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.

NOTA: El ejercicio tiene una inconsistencia:
Si la moto tiene $v_0 = 12$ m/s y la aceleración va como $a(t) = 3t^2$, no logra avanzar $x(t = 2) \neq 120\cos(30)$. Veamos por qué:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (t^3 + v_0)dt = x_0 + \frac{t^4}{4} + v_0 t$$

Si evaluamos para $t = 2$ asumiendo que $x_0 = 0$, se obtiene que $x(t) = 28$ m. Este cálculo no era necesario para desarrollar la pregunta y el dato no se ocupa hasta el final del item c). Se evaluará esta pregunta con mucho cuidado y se verá el caso a caso si produjo potenciales problemas.

(a) Dado que el primer tramo es rectilíneo, la velocidad con respecto al tiempo viene dada por **[+0.5]**:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt', \tag{1}$$

con lo que **[+1.0]**

$$v(t) = 12 + \int_0^t (3t'^2)dt' = t^3 + 12. \tag{2}$$

El motociclista se tarda 2 segundos en llegar al punto B, por lo que su velocidad será **[+0.5]**:

$$\boxed{v_B = v(2) = 2^3 + 12 = 20\text{m/s}.} \tag{3}$$

(b) Mientras el motociclista está en el aire, las ecuaciones de movimiento en la dirección vertical vienen dadas por **[+0.5]**:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{4}$$

La altura máxima se da cuando la velocidad final en y es cero, lo que da el tiempo que le toma en llegar a dicha altura, es decir **[+0.5]**,

$$0 = v_{0y} - gt \rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g}. \tag{5}$$

En este caso, dado que $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, con $\theta = 30^\circ$ y v_0 la velocidad de salida en B (20 m/s), se tiene que **[+0.5]**

$$t = \frac{20 \cdot \sin(30^\circ)}{10}\text{s} = 1\text{s}. \tag{6}$$

Así, la altura máxima se encuenta con la segunda ecuación de movimiento evaluada en $t = 1$s **[+0.5]**:

$$y = 400 + 20 \cdot \sin(30^\circ) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 = 400 + 10 - 5 = 405\text{m}. \tag{7}$$

(c) Primero es necesario encontrar el tiempo de vuelo. Si se pone un sistema de referencia tal que el origen de su coordenada vertical esté en el suelo, la condición para hallar el tiempo de vuelo t_V es que $y = 0$. Por lo tanto **[+0.5]**:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = 400 + 20 \cdot \sin(30^\circ)t_V - \frac{1}{2} \cdot 10t_V^2 \rightarrow 5t_V^2 - 10t_V - 400 = 0 \tag{8}$$

Resolviendo la cuadrática **[+0.5]**:

$$t_V = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 5 \cdot 400}}{2 \cdot 5} = \frac{10 \pm \sqrt{8100}}{10} = \frac{10 \pm 90}{10} = \begin{cases} 10\text{s} \\ -8\text{s} \end{cases} \tag{9}$$

por lo tanto, el tiempo para llegar a C es:

$$t_V = 10\text{s}. \tag{10}$$

■

Ahora, la ecuación de movimiento en el eje horizontal (medida desde el punto A) viene dada por **[+0.5]**:

$$x = x_0 + v_{0x}t, \tag{11}$$

y el alcance horizontal máximo se obtiene al evaluar en el tiempo de vuelo **[+0.5]** (dada la inconsistencia con la distancia que aparece en el dibujo se dejará dicha distancia como d:

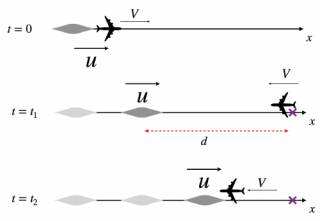
$$x_{\text{max}} = d + 20 \cdot \cos(30^\circ) \cdot 10 = (d + 100\sqrt{3})\text{m} \tag{12}$$

■

2. Un portaviones se mueve según el eje x con una velocidad constante u respecto del mar. Inicialmente, despega un avión con velocidad V constante respecto del mar, en la dirección paralela al movimiento del portaviones. La misión es alejarse a una distancia d del portaviones a un punto de observación $\times$. Lo que ocurre en un tiempo t_1. Luego el avión vuelve a re-encontrarse con el portaviones después de un tiempo total de vuelo t_2.

   (a) Encuentre el tiempo, t_1 en términos de d, u, V. **[3 puntos]**

   (b) Encuentre el tiempo de vuelo, t_2 en términos de d, u, V. **[3 puntos]**



(a) Desde el sistema de referencia del portaviones, el avión se aleja hacia el punto $\times$ con una velocidad $V-u$ respecto del portaviones (1.5 pto). Luego, el tiempo de vuelo a $\times$ es:

$$t_1 = \frac{d}{V-u}.$$

(1.5 pto)

(b) El tiempo t_2 es el tiempo de ida, t_1 ya calculado, más el tiempo de vuelta, sea éste t_{vuelta}. Durante el trayecto de vuelta el avión tiene una velocidad $V+u$ respecto del portaviones (1.5 pto).
Luego el tiempo de vuelta es

$$t_{\text{vuelta}} = \frac{d}{V+u}.$$

(1. pto)
En conclusión, el tiempo t_2 es:

$$t_2 = \frac{d}{V-u} + \frac{d}{V+u} = \frac{2Vd}{V^2-u^2}.$$

(0.5 pto)

Nota. También puede hacerse desde el sistema de referencia del mar.

(a) Desde el sistema de referencia del mar, para llegar a $\times$ el avión recorre una distancia Vt_1. Esta distancia debe ser igual a $d+ut_1$ (1.5 pto). Luego, $Vt_1 = d+ut_1$ el tiempo de vuelo a $\times$ es:

$$t_1 = \frac{d}{V-u}.$$

(1.5 pto)

(b) El tiempo t_2 es el tiempo de ida, t_1 ya calculado, más el tiempo de vuelta, sea éste t_{vuelta}. Durante el trayecto de vuelta el avión recorre una distancia Vt_{vuelta}, y esta distancia es d, menos (pues el portaviones se acerca) ut_{vuelta}, luego, $Vt_{\text{vuelta}} = d - ut_{\text{vuelta}}$ (1.5 pto).
En conclusión, el tiempo de vuelta es

$$t_{\text{vuelta}} = \frac{d}{V+u}.$$

(1. pto)
En conclusión, el tiempo t_2 es:

$$t_2 = \frac{d}{V-u} + \frac{d}{V+u} = \frac{2Vd}{V^2-u^2}.$$

(0.5 pto)

■

3. Un automóvil de masa M (que incluye la masa del conductor) sube por una cuesta con pendiente θ_1 a velocidad constante v. Si la pendiente se reduce abruptamente a un ángulo de θ_2 en el punto A, pero la fuerza que ejerce el motor del automóvil permanece constante:

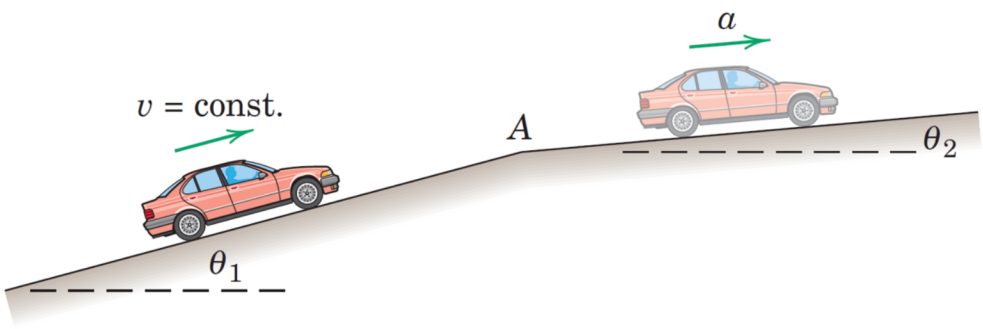
   a) Realice el diagrama de cuerpo libre para cada situación [0,5 ptos c/u].

   b) Determine la aceleración a del automóvil, justo luego de pasar el punto A [2 ptos].

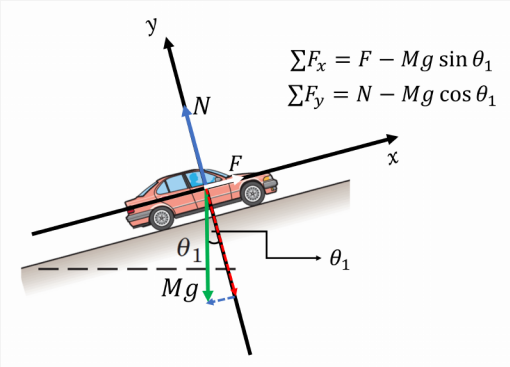
   c) Si el conductor repite el viaje, pero ahora con una maleta de masa m puesta sobre la parrilla del auto, determine la fuerza que ejercerá el motor para que el auto se mueva a velocidad constante previo al punto A. [1 pto]

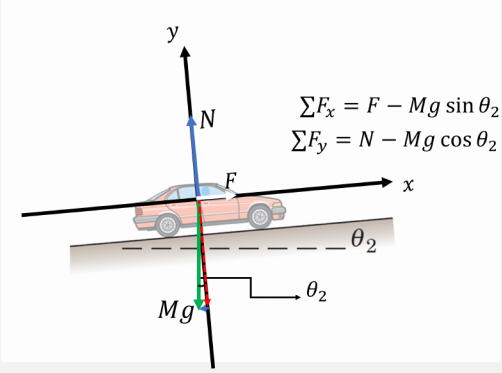
   d) Con base en la pregunta anterior, ¿qué sucederá con la aceleración luego de pasar por el punto A en comparación con la aceleración de la situación original? [1 pto]

   e) Determine la fuerza normal luego de pasar por el punto A considerando la masa del auto y de la maleta. [1 pto]



a) Los diagramas de cuerpo libre para antes y después del punto A son respectivamente **[0.5 puntos c/u]**:





b) Antes del punto A, como viaja a velocidad constante, tenemos que la aceleración es cero. Por lo tanto: $F - Mg\sin\theta_1 = 0$

De aquí encontramos la fuerza constante del motor **[1 punto]**:

$$F = Mg\sin\theta_1 \tag{13}$$

Ahora, consideremos el tramo posterior a A:

$$F - Mg\sin\theta_2 = Ma$$

Reemplazando la fuerza encontrada en la ecuación 13:

$$Mg\sin\theta_1 - Mg\sin\theta_2 = Ma \tag{14}$$

Luego, la aceleración del automóvil es **[1 punto]**:

$$a = g(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

c) Para determinar la fuerza F_2 solo se necesita cambiar M por $M + m$ en la ecuación 13, luego **[1 punto]**:

$$F_2 = (M + m)g\sin\theta_1$$

d) Para encontrar la aceleración, reemplazamos F_2 en ecuación 14 y nos daremos cuenta de que la aceleración no varía **[1 punto]** :

$$a = g(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

e) Para determinar la fuerza normal utilizamos la ecuación de la suma de fuerzas en el eje "y" del DCL de a), pero considerando ahora la suma de las masas:

$$N - (M + m)g\cos\theta_2 = 0$$

Luego, la normal viene dada por **[1 punto]**:

$$N = (M + m)g\cos\theta_2$$

■