Interrogación 2

Fecha: 12 de Junio 2024

1. Un cohete tiene una masa inicial M, de la cual el 80 % es combustible. Quema combustible a una tasa constante de c (masa por unidad de tiempo) y expulsa sus gases a una velocidad relativa u. Suponga que g es constante y desprecie cualquier efecto de la resistencia del aire. A partir de lo anterior encuentre una expresión para:

   a) la fuerza que ejercen los gases sobre el cohete (fuerza de empuje o thrust). **(2 ptos)**

      Hint: Considere la ecuación para el cohete sin fuerzas externas y recuerde la ecuación de la segunda ley de Newton

   b) el tiempo que tarda en quemarse todo el combustible. **(2 ptos)**

   c) la velocidad del cohete en el instante en que se quemó todo el combustible. **(2 ptos)**

   Las variables conocidas son M, c, g y u.

a) **1 pto por encontrar la correcta expresión para el cohete, 0.5 pto por notar que dm_c/dt corresponde c y 0.5 ptos por encontrar F_e**

Partimos considerando la ecuación del cohete:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_c \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \vec{u}\frac{dm_c}{dt} \tag{1}$$

donde $\vec{F}_{ext}$ corresponde a las fuerzas externas, m_c a la masa del cohete en un instante de tiempo t, $\vec{v}$ es la velocidad del cohete y $\vec{u}$ la velocidad de escape de los gases relativa al cohete.

En este caso tenemos que las fuerzas externas se reducen al peso del cohete $m_c g$.

El término de la derecha de la ecuación (1), se denomina fuerza de empuje o $Thrust$, luego, reemplazando con la información entregada, tenemos que la magnitud de la fuerza de empuje viene dada por:

$$F_e = uc$$

dado que la tasa de quemado del combustible, corresponde a dm_c/dt

b) **0.5 ptos por escribir la expresión de tasa de quemado 1 pto por integrar y evaluar y 0.5 pto por despejar t**

Sabemos que la tasa de quemado es:

$$-\frac{dm_c}{dt} = c$$

Integrando la ecuación anterior, y evaluando en el tiempo inicial y un tiempo cualquiera obtenemos:

$$M - m(t) = ct$$

De la ecuación anterior podemos obtener el tiempo t_q en que la masa llega al 20 % de la original:

$$M - 0{,}2M = ct \implies t_q = \frac{0{,}8M}{c}$$

c) **1 pto por encontrar la solución para $v(t)$ y 1 pto por reemplazar lo conocido y reducir la expresión**

La solución de la ecuación (1) viene dada por:

$$v(t_f) - v(t_i) = u \ln\left(\frac{m_c(t_i)}{m_c(t_f)}\right) - g(t_f - t_i)$$

con t_i como el tiempo inicial y t_f un tiempo cualquiera. Utilizamos esta solución para encontrar la velocidad que lleva el cohete en el instante de quemado t_f:

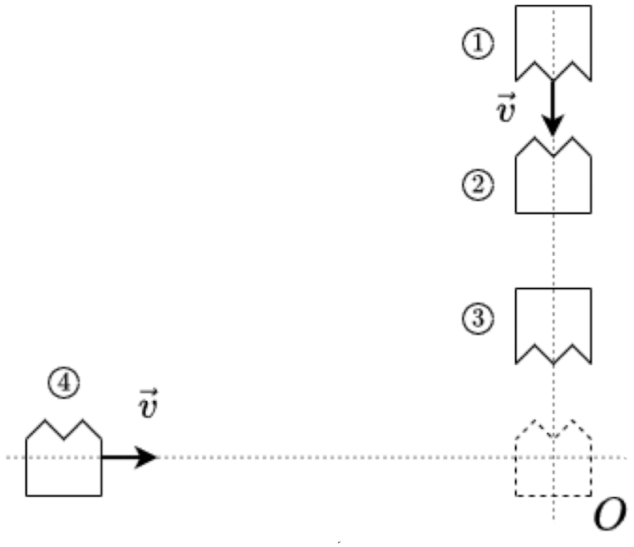
$$v(t_q) = u \ln\left(\frac{M}{0{,}2M}\right) - g\left(\frac{0{,}8M}{c}\right)$$

Finalmente la velocidad es:

$$\vec{v}(t_q) = \left(u \ln(5) - \frac{0{,}8Mg}{c}\right)\hat{y}$$

■

2. Un sistema de bloques, todos de igual masa, colisionan entre sí sobre una mesa horizontal libre de roce. Las colisiones entre las caras lisas son elásticas, mientras que entre las caras zigzag hay colisiones perfectamente inelásticas (plásticas).
Inicialmente, los bloques 2 y 3 están en reposo, mientras que los bloques 1 y 4 se desplazan con velocidades de módulo v, en direcciones perpendiculares, como se muestra en la figura.



Suponiendo que los bloques 3 y 4 colisionan por las caras en zigzag en el punto O y que los bloques se consideran puntuales, determinar:

a) Las velocidades de salida de la colisión entre bloque 1-2. (**1 ptos**)

b) Las velocidades de salida producto de la colisión con el bloque 3. (**2.5 ptos**)

c) Las velocidades de salida producto de la colisión con 4. (**2.5 ptos**)

Para todo el ejercicio, se considera el eje x positivo hacia la derecha y el eje y positivo hacia "abajo" en el dibujo.
a) Consideramos primero el choque 1-2. Ya que es inelástico, se conserva el momento lineal,

$$p_i = p_f$$
$$mv = 2mv_{f12}$$
$$v_{f12} = \frac{1}{2}v\hat{j}$$

(**0.5 ptos** por conservación de momentum. y **0.5** llegar al valor de la velocidad)
b) Ahora, el choque (1+2)-3 es elástico y se conserva la energía y el momento,

$$p_i = 2mv_{12} = 2m\frac{v}{2}$$
$$p_f = 2mv_{123} + mv_3 \quad (2)$$

entonces,

$$mv = 2mv_{123} + mv_3.$$

■

Luego,

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_{12}^2 = \frac{mv^2}{4}$$

$$E_f = \frac{1}{2}(2m)v_{123}^2 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

entonces,

$$\frac{mv^2}{4} = mv_{123}^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 \tag{3}$$

de las ecuaciones (2) y (3),

$$v = 2v_{123} + v_3 \tag{4}$$

$$v_{123} = \sqrt{\frac{v^2 - 2v_3^2}{4}}\hat{j} \tag{5}$$

reemplazando (5) en (4),

$$v_3 = \frac{2}{3}v\hat{j} \tag{6}$$

en el eje y.
(**1.25 ptos** por conservación de momentum y energía, y **1.25 pto** por obtener los valores correctos de las velocidades)
c) Analizamos ahora el choque 3-4, donde se conserva el momento en el eje $\hat{x}$ y en el eje $\hat{y}$. Eje $\hat{x}$:

$$p_i = mv$$

$$p_f = 2mv_{34x}$$

entonces

$$v_{34x} = \frac{1}{2}v$$

Eje $\hat{y}$:

$$p_i = mv_3 = \frac{2}{3}mv \tag{7}$$

$$p_f = 2mv_{34y} \tag{8}$$

entonces

$$v_{34y} = \frac{1}{3}v$$

por ende,

$$\vec{v}_{34} = \frac{1}{2}v\hat{i} + \frac{1}{3}v\hat{j} \tag{9}$$

(**1.25 ptos** por conservación de momentum , y **1.25 ptos** por el valor correcto de la velocidad)

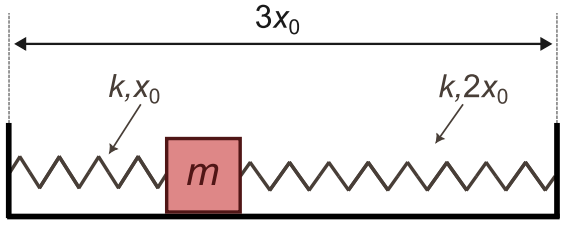
■

3. Un bloque de masa m oscila debido a la acción de dos resortes como muestra la figura. El resorte de la izquierda tiene una constante elástica k y largo natural x_0, mientras que el resorte de la derecha tiene constante elástica k y largo natural $2x_0$. Si el sistema se encuentra confinado entre dos paredes separadas por una distancia $3x_0$, determine:

   a. La ecuación de movimiento del bloque. **(3 ptos.)**

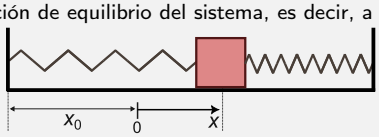
   b. El período de oscilación. **(1 pto.)**

   c. La rapidez máxima que puede tener el bloque de tal manera que éste nunca choque con la pared izquierda. **(2 ptos.)**



Hint: La solución del oscilador armónico ($\ddot{x} + \omega^2 x = 0$) se puede escribir como $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$.

a) Para resolver este problema utilizamos una coordenada x para describir el movimiento horizontal. Por conveniencia, fijamos el punto $x = 0$ en la posición de equilibrio del sistema, es decir, a una distancia x_0 de la pared izquierda.



La ecuación de movimiento se puede obtener de dos formas:

Forma 1: Conservación de la energía

La energía cinética del bloque en un instante arbitrario es

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

mientras que la energía potencial es

$$U = U_L + U_R = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^2 = kx^2. \quad \textbf{[1 pto.]}$$

Por conservación de la energía, tenemos que $E = T + U$ es constante, por tanto $dE/dt = 0$ **[0.5 ptos]**. Desarrollando:

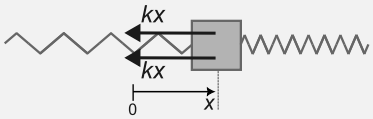
$$\frac{dE}{dt} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + 2kx\dot{x}. \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Diviendo por $\dot{x}$ se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0. \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

Forma 2: Leyes de Newton

Del DCL identificamos dos fuerzas **[0.5 ptos.]**:



■

De la segunda ley de Newton tenemos que

$$\sum F_x = m\ddot{x}, \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

donde las fuerzas son

$$\sum F_x = -kx - kx = -2kx. \quad \textbf{[1.5 pto.]}$$

Se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0. \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

No es necesario dibujar el DCL mientras se identifiquen correctamente las fuerzas con sus signos.

---

b) Primero, la frecuencia angular de oscilación se obtiene de la ecuación de movimiento:

$$\omega = \sqrt{2k/m}. \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

El período se obtiene de $T = 2\pi/\omega$. Obtenemos

$$T = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}. \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

c) Utilizando la solución del oscilador armónico, tenemos que la posición del bloque en función del tiempo es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta).$$

Para que el bloque no choque con la pared izquierda se tiene que imponer:

$$|x(t)| \leq x_0 \quad \rightarrow \quad A \leq x_0. \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

Por otro lado, la velocidad toma la forma

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \delta). \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

Por tanto, la rapidez máxima es

$$v_{\text{max}} = \omega A. \quad \textbf{[0.5 ptos]}$$

Utilizando la condición para A, obtenemos

$$v_{\text{max}} = x_0\sqrt{2k/m}. \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

■