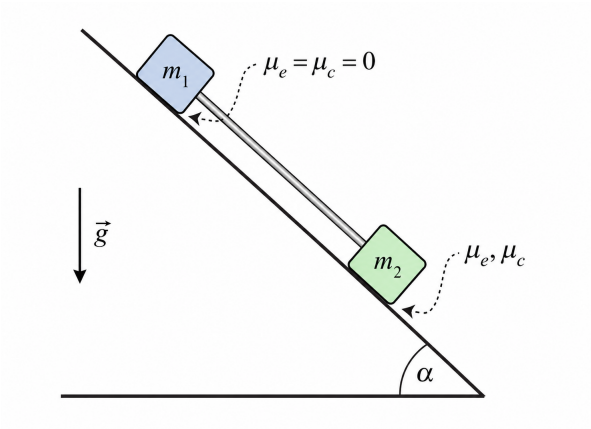
Interrogación 2

Fecha: 05 de junio 2026

1. Dos bloques de masas m_1 y m_2 están unidos por una barra ideal (sin masa, inextensible e incomprensible). El conjunto se coloca sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal, como muestra la figura.

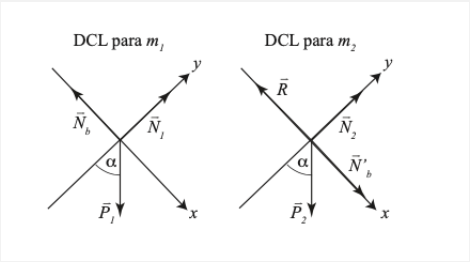


La masa m_1 no experimenta roce con la superficie, mientras que entre la masa m_2 y la superficie hay roce con coeficientes de roce estático μ_e y cinético (dinámico) μ_c.

a) (**4 pts.**) Determine el valor máximo que puede tener m_1 para que el conjunto no acelere.

b) (**2 pts.**) Si para el valor máximo de m_1 encontrado en a) el sistema justo comienza a deslizar, determine la magnitud de la aceleración.

a) Los DCLs para las dos masas son los siguientes (**0.5 puntos cada uno**):



La barra ideal es inextensible e incompresible por lo que los módulos de la tensión de la barra son iguales $N_b = N_b'$ (**0.2 puntos**)

Escribamos la segunda ley de Newton para cada cuerpo en el instante en que el conjunto está a punto de deslizar hacia abajo, es decir, cuando la fuerza de roce estático es máxima

$$R = \mu_e N_2 \qquad \textbf{(0.3 puntos)}$$

Para el bloque m_1:

$$x: \quad -N_b + m_1 g \sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_b = m_1 g \sin\alpha, \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

$$y: \quad N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 = m_1 g \cos\alpha. \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Para el bloque m_2:

$$x: \quad N_b + m_2 g \sin\alpha - \mu_e N_2 = 0, \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

$$y: \quad N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_2 = m_2 g \cos\alpha. \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

■

Combinando las ecuaciones y despejando m_1 obtenemos el valor máximo que puede tomar m_1 para que el conjunto no deslice:

$$m_1 = m_2 \left(\frac{\mu_e}{\tan\alpha} - 1 \right). \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

b) Si el conjunto comienza a deslizar,

$$R = \mu_c N_2, \qquad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Debido a que la barra es ideal existe una aceleración común a para ambas masas, de la segunda ley de Newton para m_1 tenemos

$$-N_b + m_1 g \sin\alpha = m_1 a. \qquad \textbf{(0.3 puntos)} \tag{1}$$

y para m_2 tenemos

$$N_b + m_2 g \sin\alpha - \mu_c m_2 g \cos\alpha = m_2 a. \qquad \textbf{(0.5 puntos)} \tag{2}$$

Combinando ambas expresiones y despejando la aceleración encontramos

$$a = g\sin\alpha - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mu_c g \cos\alpha. \qquad \textbf{(0.5 puntos)} \tag{3}$$

Reemplazando el valor de m_1 encontrado en (b) obtenemos

$$a = g\sin\alpha \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_e} \right). \qquad \textbf{(0.5 puntos)} \tag{4}$$

Esta solución es válida para $\mu_c \leq \mu_e$

■

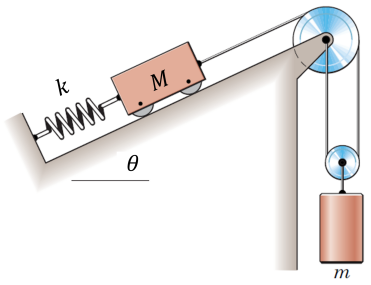
2. El sistema mostrado en la figura se libera desde el reposo. El carro de masa M y la masa colgante m están conectados mediante un cable ideal que pasa por una polea ideal. Inicialmente, el resorte está estirado una distancia x_0 respecto de su longitud natural. El carro desciende una distancia s a lo largo del plano inclinado antes de detenerse nuevamente. Suponga que no hay fricción. Considere conocidos los valores de m, M, k, x_0, θ y g.

   a) **(1.5 ptos)** Determine el trabajo realizado por el resorte.

   b) **(1 pto)** Determine el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre la masa M.

   c) **(1.5 ptos)** Determine el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre m.

   d) **(2 ptos)** Utilice el teorema de trabajo y energía para determinar la distancia s recorrida por el carro.



a) **Trabajo realizado por el resorte**

La deformación inicial y final del resorte son

$$x_i = x_0, \qquad x_f = x_0 - s.$$

(0.5 pt)

El trabajo realizado por el resorte puede obtenerse a partir de la variación de energía potencial elástica,

$$W_r = -\Delta U_e = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right).$$

(0.25 pt)

Sustituyendo las deformaciones inicial y final,

$$W_r = -\left[\frac{1}{2}k(x_0 - s)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\right].$$

(0.25 pt)

Por lo tanto,

$$W_r = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - s)^2.$$

(0.25 pt)

Simplificando,

$$\boxed{W_r = kx_0 s - \frac{1}{2}ks^2}$$

(0.25 pt)

■

b) **Trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre M**
El carro desciende una distancia s a lo largo del plano inclinado, por lo que su descenso vertical es

$$\Delta y_M = s \sin\theta.$$

(0.5 pt)

El trabajo realizado por la fuerza de gravedad es

$$W_{g,M} = Mg\,\Delta y_M.$$

(0.25 pt)

Sustituyendo,

$$\boxed{W_{g,M} = Mg\,s\sin\theta}$$

(0.25 pt)

c) **Trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre m**
De la restricción geométrica asociada a la polea móvil,

$$2\,\Delta y_m = s.$$

(0.75 pt)

Por lo tanto,

$$\Delta y_m = \frac{s}{2}.$$

(0.25 pt)

Como la masa m asciende, el trabajo realizado por la gravedad es

$$W_{g,m} = -mg\,\Delta y_m.$$

(0.25 pt)

Sustituyendo,

$$\boxed{W_{g,m} = -\frac{1}{2}mgs}$$

(0.25 pt)

d) **Determinación de s mediante el teorema trabajo–energía** Como el sistema parte y termina en reposo,

$$K_i = K_f = 0.$$

Por lo tanto,

$$W_r + W_{g,M} + W_{g,m} = 0.$$

(0.5 pt)

Sustituyendo,

$$kx_0 s - \frac{1}{2}ks^2 + Mg\,s\sin\theta - \frac{1}{2}mgs = 0.$$

(0.5 pt)

Factorizando,

$$s\left(kx_0 + Mg\sin\theta - \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}ks\right) = 0.$$

(0.5 pt)

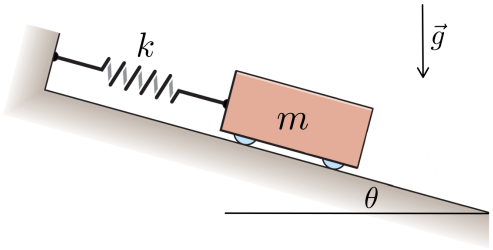
La solución no trivial es

$$\boxed{s = \frac{2kx_0 + 2Mg\sin\theta - mg}{k}}$$

(0.5 pt)

■

3. Un bloque de masa $m = 4\,\text{kg}$ se desliza sin fricción sobre un plano inclinado de ángulo $\theta = 30°$, tal como se muestra en la figura. El bloque está unido a un resorte ideal de constante elástica $k = 100\,\text{N/m}$, paralelo al plano inclinado y fijo en su extremo superior. La coordenada x se mide a lo largo del plano desde la posición de equilibrio, positiva hacia abajo del plano. En $t = 0$, el bloque se encuentra en $x_0 = 0{,}10\,\text{m}$ y se suelta desde el reposo, es decir, $v_0 = 0\,\text{m/s}$. Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$.



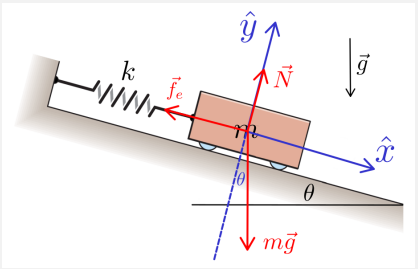
a) (1.5 ptos) Determine la ecuación diferencial del movimiento.

b) (1.5 ptos) Determine la posición $x(t)$ del bloque.

c) (1.5 ptos) Determine la amplitud de la oscilación y evalúe con los valores del problema.

d) (1.5 ptos) Determine la rapidez máxima del bloque y evalúe con los valores del problema.

a) Consideremos un sistema de referencia con el eje x paralelo al plano inclinado en dirección hacia abajo, tal como se muestra en la figura.



Al aplicar la segunda ley de Newton cuando el resorte se ha deformado una distancia x desde la posición equilibrio del bloque sobre el plano inclinado se tiene:

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - k(s_{eq} + x),$$

(0.5 ptos)

donde s_{eq} es la deformación estática del resorte.
En la situación de equilibrio estático se tiene que $mg\sin\theta = ks_{eq}$ **(0.5 ptos)**, por lo tanto:

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx} \quad \text{o equivalentemente} \quad \boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x}$$

(0.5 ptos)

Finalmente, definiendo $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m}$, se tiene que:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0}$$

■

b) Podemos considerar la solución general:

$$x(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t)$$

(0.3 ptos)

Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{x}(t) = A\omega_n\cos(\omega_n t) - B\omega_n\sin(\omega_n t)$$

(0.3 ptos)

Considerando que $x(0) = x_0$ **(0.2 ptos)** y que $\dot{x}(0) = v_0$ **(0.2 ptos)**, al evaluar en $t = 0$ se tiene que $B = x_0$ **(0.2 ptos)** y que $A = v_0/\omega_n$ **(0.2 ptos)**, por lo tanto:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t) + x_0\cos(\omega_n t)}$$

(0.1 ptos)

Forma alternativa: podríamos haber usado:

$$x(t) = C\sin(\omega_n t + \phi) \quad \text{y} \quad \dot{x}(t) = C\omega_n\cos(\omega_n t + \phi)$$

(0.3 ptos cada una)

Usando las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ **(0.2 ptos)** y que $\dot{x}(0) = v_0$ **(0.2 ptos)**, al evaluar en $t = 0$:

$$C\sin\phi = x_0 \qquad \text{y} \qquad C\omega_n\cos\phi = v_0$$

Elevando ambos términos al cuadrado y sumando obtenemos que $C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}}$ **(0.2 ptos)**. Además:

$$\tan\phi = \frac{x_0}{v_0/\omega_n} = \frac{\omega_n x_0}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right)$$

(0.2 ptos)

cuidando el cuadrante según los signos de x_0 y v_0. Así, finalmente:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}}\sin\left(\omega_n t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right)\right)$$

(0.1 ptos)

c) La solución también la podemos escribir como:

$$x(t) = C\sin(\omega_n t + \phi)$$

(0.5 ptos)

donde la amplitud es $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ **(0.3 ptos)**. Usando que $A = v_0/\omega_n$ **(0.1 ptos)** y que $B = x_0$ **(0.1 ptos)** se tiene que:

$$\boxed{C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}}}$$

(0.3 ptos)

Usando los valores del problema $\boxed{C = 0{,}1\,\text{m}}$ **(0.2 ptos)**.

d) La velocidad del bloque está dada por:

$$\dot{x}(t) = C\omega_n\cos(\omega_n t + \phi)$$

(0.5 ptos)

por lo tanto $v_{max} = C\omega_n$ **(0.4 ptos)**, es decir:

$$\boxed{v_{max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}x_0^2}}$$

(0.4 ptos)

Usando los valores del problema $boxed v_{max} = 0{,}5\,\text{m/s}$ **(0.2 ptos)**.

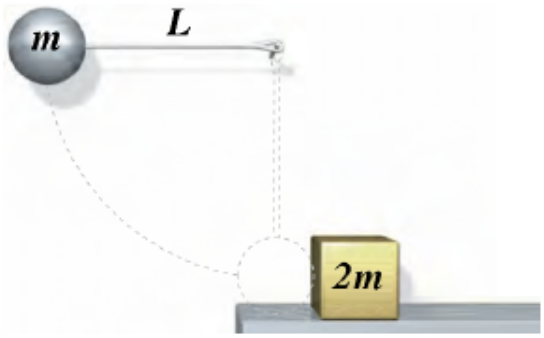
■

4. Una bola de acero de masa m y una cuerda de longitud L (de masa despreciable) forman un péndulo simple que puede oscilar sin fricción como se muestra en la figura. Este péndulo se libera desde el reposo en posición horizontal, y cuando la bola está en su punto más bajo golpea un bloque de masa $2m$ que descansa en un estante. Suponiendo que la colisión es perfectamente elástica y que se conocen m, L y la aceleración de la gravedad g, determine:

   a) La magnitud de la velocidad de la bola justo antes del impacto. **(1.5 ptos)**

   b) La magnitud de la velocidad del bloque justo después del impacto. **(2.5 ptos)**

   c) La magnitud del impulso ejercido por la bola sobre el bloque. **(2 ptos)**



a) Para obtener la magnitud de la velocidad justo antes del impacto aplicamos conservación de la energía mecánica para la bola:

$$K_1 + V_1 = K_2 + V_2$$

Tomando la altura del bloque como origen del potencial gravitatorio y sabiendo que la bola parte del reposo:

$$mgL = \frac{1}{2}mv_{bola,i}^2$$

De donde se obtiene:

$$v_{bola,i} = \sqrt{2gL}$$

(0.75 por conservación de energía aplicada al contexto y 0.75 por llegar al resultado)

b) Para obtener la magnitud de la velocidad del bloque justo después del choque aplicamos conservación del momentum. Como el choque es elástico, también se conserva la energía cinética.

$$m\vec{v}_{bola,i} + 2m\vec{v}_{bloque,i} = m\vec{v}_{bola,f} + 2m\vec{v}_{bloque,f}$$

$$\frac{m}{2}v_{bola,i}^2 + \frac{2m}{2}v_{bloque,i}^2 = \frac{m}{2}v_{bola,f}^2 + \frac{2m}{2}v_{bloque,f}^2$$

■

b) Como el bloque antes del choque está en reposo, el sistema queda

$$m\vec{v}_{bola,i} = m\vec{v}_{bola,f} + 2m\vec{v}_{bloque,f}$$

$$\frac{m}{2}v_{bola,i}^2 = \frac{m}{2}v_{bola,f}^2 + \frac{2m}{2}v_{bloque,f}^2$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$v_{bloque,f} = \frac{2m}{m+2m}v_{bola,i} = \frac{2}{3}v_{bola,i}$$

Sustituyendo el valor obtenido en (a):

$$v_{bloque,f} = \frac{2}{3}\sqrt{2gL}$$

Camino Alternativo:

En vez de usar conservación de energía se puede ocupar coeficiente de restitución $e = 1$.

$$e = 1 = \frac{|v_{bloque,f} - v_{bola,f}|}{|v_{bola,i} - v_{bloque,i}|} = \frac{|v_{bloque,f} - v_{bola,f}|}{|v_{bola,i}|}$$

se llega a lo mismo.

(0.75 por conservación de energía (o coeficiente de restitución) y 0.75 por al conservación del momentum, 0.5 pto resolver el sistema y 0.5 por llegar al resultado)

c) Ahora ya no analizamos el sistema bola-bloque, donde sí se conserva el momentum lineal, si no que nos piden analizar desde el bloque. Entonces, para obtener el impulso que la bola ejerce sobre el bloque, aplicamos el teorema del impulso-momento al bloque:

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = 2m\vec{v}_{bloque,i} - 2m\vec{v}_{bloque,f}$$

Como inicialmente el bloque está en reposo:

$$\vec{J} = 2m\vec{v}_{bloque,f}$$

Por lo tanto, la magnitud del impulso es:

$$J = 2m * \frac{2}{3}\sqrt{2gL} = \frac{4m}{3}\sqrt{2gL}$$

(0.5 por teorema impulso-momentum y 0.75 por el contexto, y 0.75 por llegar al resultado)

■