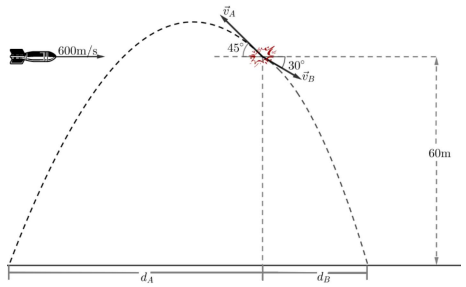
Interrogación 2

Fecha: 14 de junio 2023

1. Un proyectil de masa $M = 4$ kg viaja con una velocidad horizontal de 600 m/s antes que explote y se rompa en dos fragmentos A y B de masas $m_A = 1{,}5$ kg y $m_B = 2{,}5$ kg. La explosión del proyectil ocurre a una altura $h = 60$ m respecto al suelo. Si los fragmentos viajan a lo largo de la trayectorias parabólicas mostradas, en donde la velocidad del fragmento A forma un ángulo $\theta_A = 45^\circ$ con la horizontal y la velocidad del fragmento B forma un ángulo $\theta_B = 30^\circ$ con la horizontal, como se muestra en la figura, determine:

   a) La magnitud de la velocidad de cada fragmento justo después de la explosión. (3.0 ptos)

   b) Las distancias horizontales d_A y d_B donde los fragmentos A y B chocan con el suelo. (3.0 ptos)



Solución:

a) Por conservación de momento lineal, tenemos para el eje x:
(1 pt)

$$Mv_x = m_A v_A^x + m_B v_B^x$$
$$Mv_x = -m_A v_A \cos 45^\circ + m_B v_B \cos 30^\circ \quad (1)$$

y luego para el eje y:
(1 pt)

$$0 = m_A v_A^y + m_B v_B^y$$
$$0 = m_A v_A \sin 45^\circ - m_B v_B \sin 30^\circ \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (1) y (2) se tiene:
(1 pt)

$$v_A \approx 3091 \text{ m/s}$$
$$v_B \approx 2623 \text{ m/s}$$

b) Para encontrar las distancia d_A y d_B primero debemos encontrar el tiempo que demoran en caer desde la altura inicial h

$$0 = h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para el fragmento A se tiene
(0.5 pts)

$$0 = 60 + 3091 \sin 45^\circ t_A - \frac{1}{2} 9{,}8 t_A^2$$

resolviendo la ecuación cuadrática para t_A
(0.5 pts)

$$t_A \approx 445{,}6 \text{ s}$$

Luego el alcance horizontal es:
(0.5 pts)

$$d_A = x_0 + v_{0x} t_A$$
$$d_A \approx 974000 \text{ m} = 974 \text{ km}$$

Para el fragmento B:
(0.5 pts)

$$0 = 60 - 2623 \sin 30^\circ t_B - \frac{1}{2} 9{,}8 t_B^2$$

resolviendo la ecuación cuadrática para t_B
(0.5 pts)

$$t_B \approx 0{,}046 \text{ s}$$

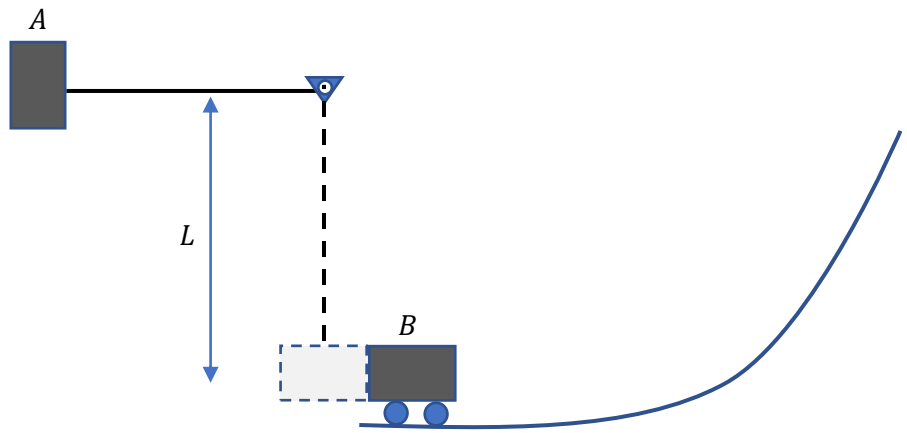
Luego el alcance horizontal es:
(0.5 pts)

$$d_B = x_0 + v_{0x} t_B$$
$$d_B \approx 104 \text{ m}$$

■

Problema 2

El bloque A de masa m se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la figura y posteriormente golpea un carro B también de masa m. La longitud de la cuerda desde la que cuelga el cuerpo A es L.



a) Calcule la velocidad con que el cuerpo A impacta el cuerpo B. (1 pto)

En los incisos b y c) suponga que la colisión entre los cuerpos A y B es elástica. Suponga también que la superficie por la que se desplaza el cuerpo B es lisa.

b) Calcule las velocidades finales de los cuerpos A y B inmediatamente después de la colisión. (2.0 pto)

c) Calcule la altura a la que sube el cuerpo B sobre la superficie inclinada. (1 pto)

En el inciso d) suponga que el coeficiente de restitución de la colisión es e.

d) Calcule las velocidades finales de los cuerpos A y B inmediatamente después de la colisión y demuestre que cuando $e = 1$ la respuesta coincide con la obtenida en el inciso b. (2.0 ptos)

Solución:

a) De la conservación de la energía

$$E_i = E_f$$

Colocando el cero de energía potencial gravitatoria en el punto de colisión la ecuación anterior es

(1 pto)

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gL}$$

b) De la conservación del momento lineal y la energía cinética tenemos
(0.5 pts)

$$mv_{Ai} = mv_{Af} + mv_{Bf}$$

$$\frac{1}{2}mv_{Ai}^2 = \frac{1}{2}mv_{Af}^2 + \frac{1}{2}mv_{Bf}^2$$

Simplificando,

$$v_{Ai} = v_{Af} + v_{Bf}$$

$$v_{Ai}^2 = v_{Af}^2 + v_{Bf}^2$$

Escribiendo las ecuaciones como

(0.5 pts)

$$v_{Ai} - v_{Af} = v_{Bf}$$

$$(v_{Ai} - v_{Af})(v_{Ai} + v_{Af}) = v_{Bf}^2$$

Dividiendo las ecuaciones obtenemos

$$v_{Ai} + v_{Af} = v_{Bf} \quad \rightarrow \quad v_{Af} = v_{Bf} - v_{Ai}$$

Entonces de

(0.5 pts)

$$v_{Ai} = v_{Af} + v_{Bf} = v_{Bf} - v_{Ai} + v_{Bf}$$

De donde

(0.5 pts)

$$v_{Bf} = v_{Ai} = \sqrt{2gL} \quad y \quad v_{Af} = v_{Bf} - v_{Ai} = 0$$

c) Para calcular la altura a la que el cuerpo B sube, de la conservación de la energía

(1.0 pto)

$$\frac{1}{2}mv_{Bf}^2 = mgH$$

$$H = L$$

d) El coeficiente de restitución es

(0.5 pts)

$$e = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ai} - v_{Bi}} = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ai}}$$

Es decir

(0.5 pts)

$$v_{Bf} = ev_{Ai} + v_{Af}$$

De la conservación de P

(0.5 pts)

$$mv_{Ai} = mv_{Af} + mv_{Bf}$$

$$mv_{Ai} = mv_{Af} + m(ev_{Ai} + v_{Af})$$

$$v_{Af} = \frac{v_{Ai} - ev_{Ai}}{2}$$

y

$$v_{Bf} = ev_{Ai} + \frac{v_{Ai} - ev_{Ai}}{2} = \frac{(e+1)v_{Ai}}{2}$$

Notemos que si $e = 1$

(0.5 pts)

$$v_{Bf} = v_{Ai}, \quad v_{Af} = 0$$

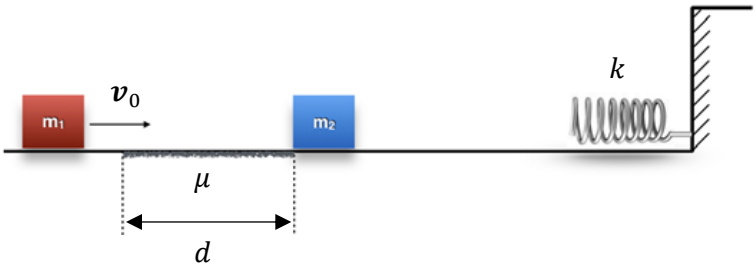
Comentarios:

En el inciso b) se puede usar la relación: $v_{Bf} - v_{Af} = v_{Ai}$ que también es correcto, asignar puntaje equivalente.

Problema 3

En el problema que se muestra en la figura se lanza un bloque de masa m_1 con una velocidad inicial v_0 en la dirección de un bloque de masa m_2 que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. El choque entre los dos bloques es perfectamente inelástico .

Entre $x = 0$ y $x = d$ la región es rugosa con un coeficiente de roce cinético μ. Todo el resto de las superficies son lisas. Luego del choque, el bloque de masa m_2 se mueve por la superficie (libre de roce) hasta impactar con un resorte ideal de constante elástica k.



a) Calcule la velocidad v_1 del bloque de masa m_1 justo antes de chocar. (1.0 pto)

b) Calcule la velocidad final (V) del sistema después de la colisión (1.5 pto)

c) Calcule la compresión máxima (δ) del resorte. (1.5 pto)

d) ¿cuál debe ser la constante elástica mínima para que el sistema consiga de vuelta atravesar la región rugosa? (2.0)

Solución:

a) Justo antes de chocar, la masa m1 pasa por la zona rugosa, luego el cambio de energía mecánica será igual al trabajo realizado por la fuerza de roce cinético

(0.5 pts)

$$W_f = \Delta E = E_f - E_i$$

$$-\mu m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2$$

Despejando la rapidez v_1

(0.5 pts)

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d}$$

b) Durante la colisión, el momento lineal del sistema se conserva, luego:
(0.5 pts)

$$P_i = P_f$$

Considerando que es una colisión perfectamente inelástica, se tiene:

(0.5 pts)

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V$$

Finalmente, despejamos la velocidad V

(0.5 pts)

$$V = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

c) Para encontrar la compresión máxima del resorte, sabemos que toda la energía cinética del sistema compuesto por $m1$ y $m2$, se transforma en energía potencial elástica

(1.0 pto)

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} k \delta^2$$

Despejando la compresión máxima se tiene:
(0.5 pts)

$$\delta = V \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}}$$

d)Al regresar el sistema compuesto por $m1$ y $m2$, debe pasar nuevamente por la zona rugosa, luego se tiene que:

(0.5 pts)

$$W_f = E_f - E_i$$

La constante mínima debe ser tal que la energía mecánica al pasar por toda la zona rugosa sea cero

(0.5 pts)

$$E_f = 0$$

Como la energía se conserva entre el resorte y antes de ingresar a la zona rugosa, la energía cinética con la que ingresa es la misma con la que sale anteriormente, luego:

(0.5 pts)

$$-\mu(m_1 + m_2)gd = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

$$\mu gd = \frac{1}{2}V^2$$

Donde

$$V^2 = \frac{k}{(m_1 + m_2)}\delta^2$$

Despejando la compresión mínima

(0.5 pts)

$$\delta_{min} = \sqrt{2\mu gd\frac{(m_1 + m_2)}{k}}$$

Comentarios:

1. En el enunciado, hay un error de redacción ya que dice que el bloque $m2$ se devuelve, y es el sistema $m1 + m2$. Considerar correcto si se realiza el análisis solo con $m2$ al regreso.

2. En el inciso d) dice calcular la "constante elástica mínima" debería decir "compresión mínima del resorte", por lo tanto, considerar correcto si despejan k en vez de δ_{min}.