Capítulo 8.

Cargas Distribuidas

1. Introducción

En el capítulo anterior vimos las ecuaciones de equilibrio general de un sistema cuando sobre él aplicamos fuerzas y momentos localizados. En este capítulo veremos como generalizar lo anterior en presencia de fuerzas distrbuidas, las que están caracterizadas por una densidad de fuerzas aplicadas en forma continua sobre un intervalo. En los capítulos siguientes veremos diversas situaciones que involucran cargas didtribuidas. Podemos pensar en la cargas distrbuidas à la

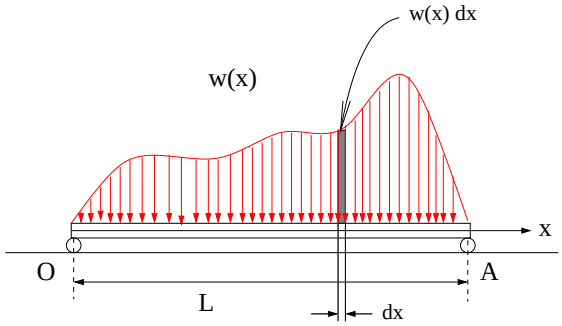


Figura 1: Barra empotrada con carga distribuida uniforme.

Riemann (ver figura siguiente) en que hay N fuerzas concentradas, en los puntos $x_1 = dx/2, x_2 = 3dx/2, \cdots, x_i = (i - (1/2))dx, \cdots, x_N = (N - (1/2))dx$, de modo que $N\,dx = L$. La fuerza concentrada aplicada en el punto x_i es $F_i = w(x_i)\,dx$. Entonces la fuerza resultante, está dada por la suma de las fuerzas anteriores, i.e.,

$$F_N = \sum_{i=1}^{N} w(x_i)\,dx,$$

y, tomando el límite $N \to \infty$, obtenemos finalmente la fuerza resultante de toda la carga distribuida,

$$F = \int_0^L w(x)\,dx. \tag{1}$$

Ya conocida la fuerza resultante de la carga distribuida es preciso determinar el punto de aplicación equivalente. Lo que necesitamos imponer es que el momento resultante de las fuerzas distribuidas con respecto a cualquier punto (digamos el punto O de la figura anterior), sea igual al momento ejercido por la fuerza resultante F con respecto al mismo punto. Llamemos d a la distancia desde el punto O al punto de aplicación de la fuerza quivalente F. Es precisamente esta

distancia d la que queremos determinar. El torque (momento) con respecto al punto O ejercido por la fuerza $w(x)\,dx$ está dado por $-x\,w(x)\,dx\hat{k}$, en que $\hat{k}$ es el vecto que sale de la hoja de papel. Aquí, x es precisamente el *brazo* de la fuerza $w(x)\,dx$ con respecto al punto O. De nuevo pensando à la Riemann, el torque realizada por toda la distribución de fuezras, es la suma de los torques individuales, suma que podemos expresar como,

$$M_O = -\int_0^L x\,w(x)\,dx\hat{k}. \tag{2}$$

Por otra parte, el torque ejercido por F con respecto al punto O está dado por,

$$-F\,d\hat{k},$$

y d debe ser tal que este torque coincide precisamente con M_O (dado por (2). De este modo encontramos,

$$d = \frac{1}{F}\int_0^L x\,w(x)\,dx, \tag{3}$$

y, finalmente usando (1), obtenemos

$$d = \frac{\int_0^L x\,w(x)\,dx}{\int_0^L w(x)\,dx}. \tag{4}$$

Calculemos ahora la fuerza equivalente de las distribuciones más simples.

Ejemplo 1: *Fuerza resultantes y posición equivalente de una distribución de carga lineal.* Consideremos primero la carga lineal,

$$w(x) = w_0\frac{x}{L}, \tag{5}$$

que ilustramos en la figura siguiente. Usando (1) encontramos que la fuerza

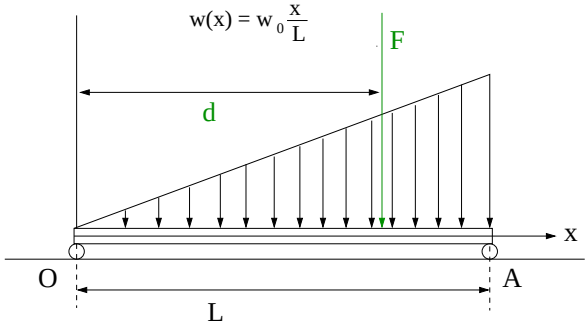


Figura 2: Distribución de carga lineal

equivalente en este caso está dada por

$$F = \int_0^L w(x)\,dx = \int_0^L w_0\frac{x}{L}\,dx = \frac{1}{2}w_0\,L. \tag{6}$$

Y, usando (3) encontramos que,

$$d = \frac{1}{F}\int_0^L x\, w_0 \frac{x}{L}\, dx = \frac{w_0}{L\,F}\int_0^L x^2\, dx = \frac{w_0 L^3}{3L\,F} = \frac{2}{3}L, \tag{7}$$

(aquí usamos (6) para concluir la última igualdad). En la figura siguiente están representdas la fuerza resultante y el punto de aplicación equivalente para la distribución lineal de fuerzas.

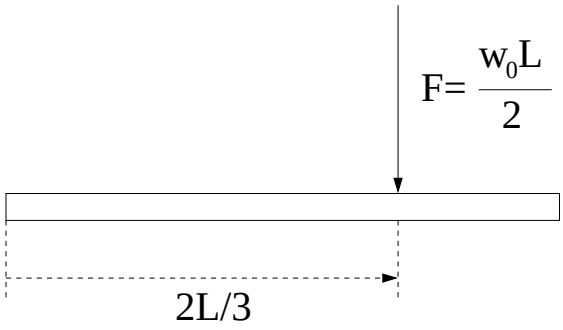


Figura 3: Fuerza resultante y punto de aplicación equivalente para una distribución de carga lineal

Ejemplo 2: *Fuerza resultantes y posición equivalente de una carga distribuida constante.* Consideremos ahora una distribución de carga constante,

$$w(x) = w_0 \tag{8}$$

que ilustramos en la figura siguiente. Usando (1) con $w(x) = w_0$, la fuerza

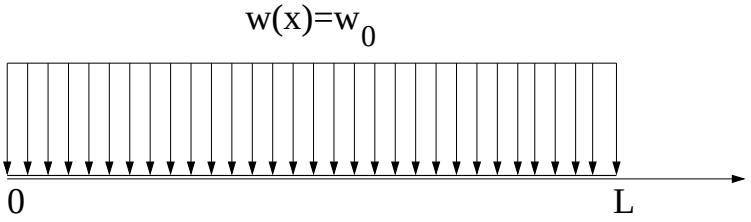


Figura 4: Distribución de carga uniforme.

resutante en este caso está dada por,

$$F = \int_0^L w(x)\, dx = \int_0^L w_0(x)\, dx = w_0\, L, \tag{9}$$

en tanto que el punto de aplicación equivalente esta vez está dado por,

$$d = \frac{1}{F}\int_0^L x w_0\, dx = \frac{1}{w_0\, L}\frac{1}{2} w_0\, L^2 = \frac{1}{2}L. \tag{10}$$

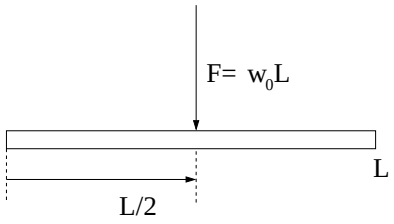


Figura 5: Fuerza resultante y punto de aplicación equivalente para una distribución de carga uniforme.

La fuerza resultante y el punto de aplicación equivalente están ilustrados en la figura siguiente.

Comentario: En general para una distribución de carga simétrica en torno al punto medio (i.e., en torno a $x = L/2$ en la figura 1), se tiene que

$$d = L,$$

como en el caso de la distribución uniforme. La demostración de esto es la siguiente. Usando (3) y escribiendo $x = (x - (L/2)) + L/2$ podemos escribir,

$$d = \frac{1}{F}\int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) w(x)\, dx + \frac{1}{F}\frac{L}{2}\int_0^L w(x)\, dx.$$

El segundo término de esta expresión es precisamente $L/2$ (usando (1)). Por otra parte, como $w(x)$ es simétrico con respecto al punto medio de la distribución, i.e., en torno a $L/2$, el primer término se anula. La simetría de $w(x)$ se puede escribir como $w((L/2) + z) = w((L/2) - z)$, y haciendo el cambio de variable: $x \to z$, dado por $x = (L/2) + z$, en la primera integral obtenemos,

$$\int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) w(x)\, dx \qquad = \textstyle\int_{-L/2}^{L/2} z w(z)\, dz =$$
$$\int_{-L/2}^{0} z\, w(z)\, dz + \int_0^{L/2} z\, w(z)\, dz \quad = \textstyle\int_0^{L/2} z(w(z) - w(-z))\, dz = 0.$$

Ejemplo 3: Fuerza resultante y punto de aplicación equivalente de una distribución de fuerza sinusoidal. Como último ejemplo, encontremos la fuerza resutante y su punto de aplicación para la distribución,

$$w(x) = w_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\, x}{L}\right).$$

Usando (1) tenemos en este caso que,

$$F = w_0 \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\, x}{L}\right) dx = w_0 \int_0^L \frac{d}{dx}\left[-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\, x}{L}\right)\right] dx$$

y, usando el teorema fundamental del cáculo concluimos que

$$F = \frac{2}{\pi} w_0 \, L.$$

Y, como en este caso la distribución es simétrica con respecto al punto medio tenemos que

$$d = \frac{L}{2}.$$

2. Ejemplos de equilibrio general de sistemas que incluyen cargas distribuidas.

En esta sección resolveremos algunos ejemplos de equilibrio general que incluyen cargas distribuidas.

Ejemplo 1: *Equilibrio de una barra empotrada con una carga distribuida constante.* Consideremos una barra sin masa de largo L, empotrada en una pared vertical (en el punto A de la figura). Sobre la barra existe una carga distrbuída, $w(x) = w_0$ (constante) como se indica. Determine las reacciones N_x y N_y y el momento de fuerza M en el punto A.

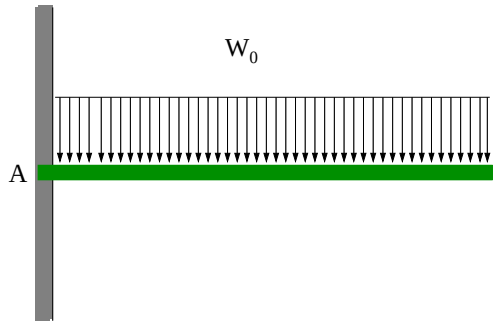


Figura 6: Barra empotrada con carga distribuida uniforme.

Solución: Lo primero que hacemos es reemplazar la carga distribuida por una fuerza equivalente. Como se trata de una fuerza distribuida uniforme, la fuerza equilvalente es simplemente $w_0 \, L$ (i.e., el área bajo la curva $w(x) = w_0$). Y en este caso el punto de aplicación de la fuerza equivalente está en el punto medio de la barra, i.e., $d = L/2$. Entones, hemos reducido el problema de equilibrio global de la barra al equilibrio del sistema equivalente descrito en la figura de abajo. Finalmente para resolver el equilibrio imponemos que la suma de las fuerzas externas a lo largo de la horizontal sea nula, a lo largo de la vertical sea nula, y el Momento de fuerzas con respecto a un punto cualquiera sea nulo. En este caso estas tres condiciones quedan dadas por,

$$N_x = 0, \tag{11}$$

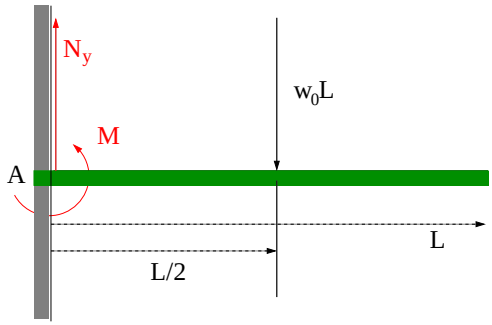


Figura 7: Sistema equivalente al de la barra empotrada con carga distribuida uniforme.

$$N_y - F = N_y - w_0\, L = 0, \tag{12}$$

y,

$$M - F\, d = M - w_o \frac{L}{2} = 0, \tag{13}$$

de donde despejamos,

$$N_x = 0, \qquad N_y = w_0\, L, \qquad \text{y} \qquad M = w_0\, \frac{L}{2}. \tag{14}$$

Ejemplo 2: *Equilibrio de una barra sostenida por una cuerda y por un soporte de pasador, con carga distribuida.* Consideremos una barra sin masa de largo L,

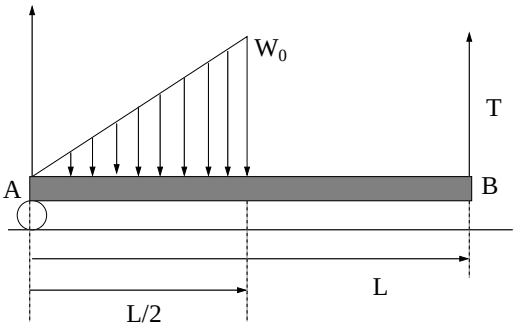


Figura 8: Barra sostenida por una cuerda y por un soporte de pasador, con carga distribuida

sostenida en un extremo por un soporte con pasador, fijo en el suelo (ver figura) y en el otro extremo por una cuerda, atada a la pared (ver figura). Determine las reacciones A_x y A_y del soporte en A y la tensión de la cuerda.

Solución: Lo primero que hacemos es reemplazar la carga distribuida por una o más fuerzas equivalentes. La carga distribuida es lineal y ocupa la mitad

izquierda de la barra (entre 0 y $L/2$). Por lo visto en la seccin anterior, la podemos reemplazar por una fuerza equivalente F, en que

$$F = w_0 \frac{L}{4},$$

i.e., el área bajo la curva que define la distribución. En cuanto al punto de aplicación equivalente, como vimos en la sección anterior, éste se ubica a una distancia (2/3) del largo de la distribución, i.e.,

$$d = \frac{2}{3}\frac{L}{2} = \frac{L}{3}.$$

Luego planteamos las ecuaciones de equilibrio general. Así obtenemos,

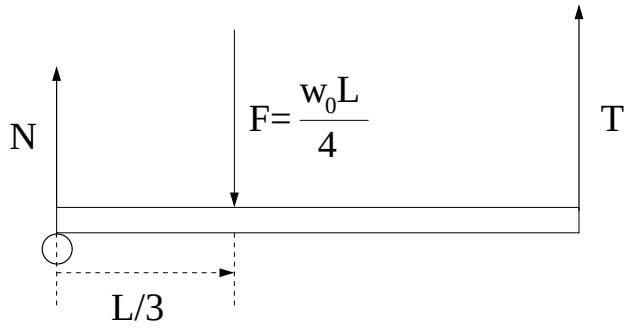


Figura 9: Sistema equivalente.

$$T + N = F = w_0 \frac{L}{4},$$

e, imponiendo que el torque con respecto a A sea nulo, obtenemos

$$F\frac{L}{3} = T\,L,$$

de donde finalmente obtenemos,

$$T = w_0 \frac{L}{12}, \qquad y, N = w_0 \frac{L}{6}$$

.

Referencias

[1]

©Rafael Benguria, Noviembre de 2014.