Dinámica de una partícula

Este es el capítulo central de la mecánica. En el capítulo anterior aprendimos a describir el movimiento de una partícula. Ahora analizaremos las causas del movimiento. El marco apropiado lo constituyen las *Leyes de Newton* que fueron postuladas por Isaac Newton (1642–1727) en el *Principia* en 1687 [6]. Para poder discutir el movimiento de sistemas complejos es necesario comenzar haciendo algunas idealizaciones y abstracciones. De partida consideraremos el movimiento de *partículas puntuales*. Esto es simplemente una idealización de cuerpos u objetos cuyas dimensiones geométricas son pequeñas comparadas con distancias características del movimiento (ver la Introducción del Capítulo 1). Tal como lo hicimos anteriormente, la posición de cada partícula con respecto a un origen fijo está determinada por su vector posición $\vec{r}\,(t)$. Además a cada partícula puntual le asociaremos una cantidad real positiva m que denominaremos la *masa de la partícula*. Como consecuencia de la tercera ley de Newton que veremos más adelante veremos como medir la masa de una partícula. Dada la masa de la partícula y su velocidad $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, definiremos el *momentum lineal* $\vec{p}\,(t)$ de la partícula como el producto $m\,\vec{v}\,(t)$.

Las partículas hacen movimientos interesantes debido a su interacción con otras partículas (o con el resto del mundo). Una partícula que no interactúa con otras partículas o que no sufre la acción del medio que la rodea va a realizar movimientos triviales. La interacción de las partículas entre sí, o con el medio externo se manifiesta a través de lo que se denominan *fuerzas*. La naturaleza de las fuerzas se determina por su efecto sobre las partículas, el cual va a quedar determinado por la segunda ley de Newton. Existe una gran variedad de interacciones entre partículas. Unas pocas de ellas son de caracter fundamental (como la gravedad, o las leyes de interacción eléctrica y magnética, etc.) El resto se deriva de las anteriores mediante análisis relativamente complejos. En este curso haremos modelos idealizados y simples de estas fuerzas derivadas. Como hemos dicho anteriormente, la acción de una partícula sobre otra se manifiesta a través de una *fuerza*, que es una

cantidad vectorial y que típicamente denotaremos por $\vec{F}$. Con todos estos antecedentes preliminares podemos ir de inmediato a los postulados de Newton.

Primera Ley de Newton: Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o de movimiento uniforme y rectilíneo, a menos que sea obligado a cambiar ese estado debido a fuerzas que actúan sobre él.

Segunda Ley de Newton: La variación del momentum de un cuerpo es proporcional a la fuerza aplicada sobre él, i.e.,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{1}$$

Además, si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, la fuerza neta que actúa sobre él es la suma vectorial de las fuerzas aplicadas.

Tercera Ley de Newton [Ley de Acción y Reacción]: Las interacciones mútuas que ejercen dos cuerpos entre sí son de la misma magnitud y de sentido contrario.

Comentarios: Estos tres postulados de Newton no son válidos en sistemas de referencia cualquiera. Sólo son válidos en los que se denominan sistemas de referencias inerciales que en realidad constrituyen una clase de equivalencia de sistemas que se mueven unos relativos a otros con velocidad uniforme. En aquellos sistemas que aceleran con respecto a cualquiera de estos sistemas inerciales las leyes de Newton deben ser corregidas. La Primera Ley, que también se conoce como Principio de Relatividad de Galileo, es más bien una definición de los sitemas de referencia inerciales. La segunda Ley expresa el resultado de la acción de las fuerzas sobre el movimiento de los cuerpos. Es parte importante de esta ley la composición vectorial de las fuerzas. Por último, la tercera ley de Newton combinada con la segunda proporciona un método para medir la masa de los cuerpos.

La masa de los cuerpos

Consideremos un sistema aislado, compuesto solamente por dos cuerpos que interactúan entre sí (por ejemplo, mediante un resorte) como se indica en la figura 1. Si llamamos $\vec{F}_{12}$ la fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el cuerpo 1 y $\vec{F}_{21}$ la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2, por la tercera ley de Newton tenemos

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2}$$

Por otra parte, usando la segunda ley de Newton para cada uno de los cuerpos del sistema, tenemos

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{12} \tag{3}$$

y

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{21} \tag{4}$$

respectivamente, en que $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son respectivamente las aceleraciones de los cuerpos 1 y 2. Sumando las ecuaciones (3) y (4), utilizando la Ley de Acción y Reacción (2) obtenemos,

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \tag{5}$$

De ésta última ecuación se tiene

$$m_2 = m_1\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \tag{6}$$

La ecuación (6) permite medir la masa de un cuerpo cualquiera en términos de la masa

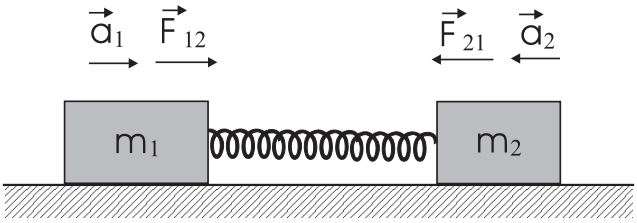


FIGURA 1. Medición de la masa de un cuerpo

de un cuerpo que se adopte como *patrón*. En efecto, adoptando al cuerpo 1 como patrón,

podemos medir la masa de 2 (en unidades de m_1) a través del experimento bosquejado en la figura 1. Separamos los cuerpos 1 y 2 estirando el resorte y a continuación medimos las aceleraciones de ambos cuerpos. El cuociente entre las masas es inversamente proporcional a la razón entre las aceleraciones. En el Sistema Internacional de unidades se adopta como patrón de masa, la masa de un litro (i.e., un decímetro cúbico) de agua. A este patrón se le llama *kilo* o *kilogramo*.

Una vez adoptada la unidad de masa tenemos de inmediato la unidad de fuerza, a través de la Segunda Ley de Newton. De esta segunda ley vemos que lea unidad de fuerza en el Sistema Internacional de Unidades es el kg-m/s^2. A esta unidad de fuerza se le conoce como *Newton* N.

Modelamiento de Fuerzas

Como hemos dicho anteriormente la interacción de los cuerpos se manifiesta a través de fuerzas, y el efecto de estas fuerzas sobre el movimiento de los cuerpos queda determinado a través de la segunda ley. En la naturaleza existen cuatro tipos fundamentales de fuerzas: la interacción gravitacional, la interacción electromagnética, las interacciones nucleares y las interacciones débiles. En este curso solo tendremos oportunidad de referirnos ampliamente al primer tipo de interacción (ver Capítulo 6).

El resto de las interacciones entre los cuerpos se derivan de estas fuerzas fundamentales. Sin embargo, no es el propósito de este texto derivar las fuerzas con las que trabajamos a diario a partir de las interacciones fundamentales. Lo que haremos es simplemente hacer modelos simples de estas interacciones derivadas.

El Peso

Como veremos en detalle en el Capítulo 6, todos los cuerpos sobre la superficie de la Tierra son atraídos por ésta. La fuerza está dirigida hacia el centro de ésta. Como el Radio de la Tierra es tan grande comparado con nuestro tamaño, para nosotros sentados en esta sala, la superficie de la Tierra nos parece simplemente como un plano infinito (no vemos

su curvatura). Entonces los cuerpos parecen ser atraídos a lo largo de lo que llamamos la vertical (i.e., la dirección perpendicular a la superficie de la Tierra). Si consideramos desplazamientos pequeños con respecto al Radio de la Tierra, es un hecho experimental que la fuerza que la Tierra hace sobre un cuerpo de masa m es proporcional a la masa y esta dirigida a lo largo de la vertical hacia el suelo. A esta fuerza ejercida por la Tierra sobre un cuerpo la llamaremos *el peso* del cuerpo. A la constante de proporcionalidad la llamaremos *aceleración de gravedad* (por razones que serán evidentes poco mas adelante) y la denotaremos por g. Experimentalmente, en el Sistema Internacional de Unidades se tiene que aproximadamente

$$g \approx 9,81 \text{ m/s}^2 \tag{7}$$

Entonces, el peso de un cuerpo de masa m está dado por

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \tag{8}$$

en que $\vec{g}$ es un vector cuya magnitud es g y cuya dirección es a lo largo de la vertical y hacia el suelo (ver figura 2).

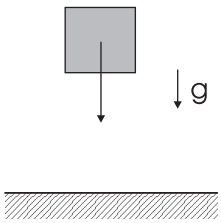


FIGURA 2. El peso de un cuerpo.

Si tenemos un cuerpo de masa m sobre el cual sólo actúa la fuerza de atracción de la tierra (lo que hemos dado en llamar el peso del cuerpo), este cuerpo acelera de acuerdo a la segunda ley de Newton. En efecto, de (1) y (8) tenemos

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \tag{9}$$

y, simplificando la masa del cuerpo tenemos que,

$$\vec{a} = \vec{g}. \tag{10}$$

De modo que todo cuerpo sobre el cual sólo actúa su peso, se mueve con aceleración uniforme. El valor de la aceleración es independiente de la masa del cuerpo (un hecho experimental que fue observado originalmente por Galileo Galilei). La magnitud de la aceleración es precisamente la aceleración de gravedad (i.e., $\approx 9,81$ [m/seg^2]) y su dirección es vertical hacia abajo.

La Normal o Reacción

De nuestra experiencia diaria sabemos que un cuerpo colocado sobre una mesa horizontal, a pesar de tener peso, no se mueve. De acuerdo a la segunda ley de Newton esto sólo es posible si la fuerza neta sobre el cuerpo es nula. Entonces, necesariamente la mesa está ejerciendo una fuerza sobre el cuerpo en cuestión de modo que en este caso la fuerza resultante sobre el cuerpo es nula. La fuerza que ejerce la mesa sobre el cuerpo se conoce como *fuerza normal* o simplemente *normal* o también *fuerza de reacción*. La fuerza normal es una fuerza entre dos cuerpos en contacto, perpendicular al plano de contacto entre los cuerpos. El sentido de la fuerza es tal que se opone a la penetración de los cuerpos.

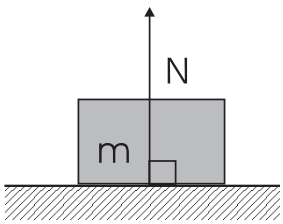


FIGURA 3. La fuerza de reacción o normal.

La normal es una típica *fuerza de ligazón*: sólo existe mientrás haya contacto físico entre los cuerpos en cuestión. Su magnitud no queda determinada a priori sino que al resolver las ecuaciones de Newton. En este curso sólo veremos dos *fuerzas de ligazón*: la normal y la tensión en las cuerdas ideales.

Las Cuerdas Ideales

Otro mecanismo de interacción entre dos cuerpos lo constituyen las cuerdas ideales. Una *cuerda ideal* es una cuerda sin masa (en otras palabras que su masa es despreciable comparada con la masa de los cuerpos que están unidos por la cuerda), inextensible (es decir que tiene largo constante) y flexible (es decir que sólo transmite fuerzas a lo largo de la cuerda y no transversal a la cuerda). En la figura 4 un cuerpo de masa m está suspendido del punto fijo O por medio de una cuerda ideal. Si no fuera por la cuerda, la acción de la gravedad haría caer la masa m. La cuerda de la figura ejerce una fuerza sobre m que la mantiene suspendida. La fuerza que ejerce la cuerda sobre la masa se denomina *tensión* y en la figura corresponde a la fuerza T cuya dirección es a lo largo de la cuerda, de acuerdo a nuestro modelo de cuerda ideal. Nótese que la cuerda también ejerce una fuerza sobre el techo, de la misma magnitud y sentido contrario, tal como hemos ilustrado en la figura. Esto es necesario por la tercera ley de Newton, puesto que masa y techo están interactuando a través de la cuerda, y la cuerda no tiene masa. Tal como en el caso de la fuerza normal, la *tensión* es una fuerza de ligazón (la ligazón en este caso corresponde al hecho que los cuerpos están unidos por una cuerda de largo fijo) y típicamente su magnitud se encuentra al resolver las ecuaciones de movimiento como veremos en los ejemplos a continuación.

Con los tres tipos de fuerza que hemos introducido hasta ahora ya podemos resolver algunos problemas simples de dinámica de pocos cuerpos. Antes de ir a la solución de algunos ejemplos, es conveniente introducir un método sistemático de solución.

Método de solución de problemas de dinámica de pocas partículas

Para resolver en forma sistemática los problemas de dinámica de pocos cuerpos seguiremos los siguientes pasos:

i) Identificamos cada uno de los cuerpos,

ii) Para cada cuerpo identificamos cada una de las fuerzas que actúan sobre el,

iii) Escogemos coordenadas adecuadas para especificar la posición de cada uno de los cuerpos,

iv) En las coordenadas escogidas, escribimos la fuerza total que actúa sobre el cuerpo así como la aceleración del cuerpo (uno por uno, para cada cuerpo),

v) Escribimos la segunda ley de Newton para cada cuerpo, utilizando las cantidades encontradas en iv).

vi) Escribimos las ecuaciones de ligazón (i.e., escribimos las relaciones entre las coordenadas de los distintos cuerpos que manifiestan el hecho que algunos de ellos están en contacto o que están unidos por cuerdas ideales).

vii) Resolvemos las ecuaciones encontradas en el punto anterior para las incógnitas, a saber, para las aceleraciones de cada cuerpo y para las normales y tensiones.

viii) Al final conviene verificar los resultados, chequeando unidades, o situaciones límites faciles de encontrar, etc.

Advertencia: Cabe recordar que las leyes de Newton sólo son válidas en sistemas inerciales. Por tal motivo, al escribir las ecuaciones de movimiento de cada cuerpo, segun el punto iv), se debe tener especial cuidado en referir aceleraciones y fuerzas con respecto a sistemas inerciales.

Una vez establecido este esquema de solución, veremos los ejemplos más característicos.

El plano inclinado

Consideremos un bloque de masa m que puede moverse sobre un plano inclinado de ángulo α como se indica en la figura 5. El plano inclinado está fijo al piso. Se pide encontrar la aceleración del bloque y la fuerza de reacción del plano sobre el bloque.

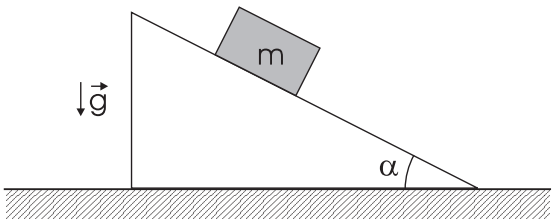


FIGURA 4. El plano inclinado.

En este caso solo existe un cuerpo (i.e., el bloque de masa m). Sobre este cuerpo actúan dos fuerzas: el peso $m\vec{g}$ y la normal $\vec{N}$. En cuanto al sistema de coordenadas, conviene elegir el sistema de ejes cartesianos x–y como se indica en la figura (**??**). La posición del bloque a lo largo del plano inclinado, medida desde el vértice del plano es precisamente x. En este sistema coordenado, la fuerza total sobre el bloque está dada por

$$\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = (N - mg\cos\alpha)\hat{\jmath} + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\imath}. \tag{11}$$

Por otra parte, el vector posición del bloque es

$$\vec{r} = x\hat{\imath}, \tag{12}$$

de modo que su aceleración está dada por

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath}. \tag{13}$$

Escribiendo la segunda ley de Newton para el bloque, utilizando (12) y (13) obtenemos finalmente

$$(N - mg\cos\alpha)\hat{\jmath} + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\imath} = m\ddot{x}\hat{\imath}, \tag{14}$$

y como $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son linealmente independientes, finalmente obtenemos

$$N = mg\cos\alpha \tag{15}$$

y

$$\ddot{x} = g \operatorname{sen} \alpha. \tag{16}$$

0.1. La máquina de Atwood. Consideremos dos bloques de masas m y M unidas mediante una cuerda ideal que pasa a través de una polea fija tal como se indica en la figura (**??**). Se pide determinar las aceleraciones de los bloques y la tensión en la cuerda.

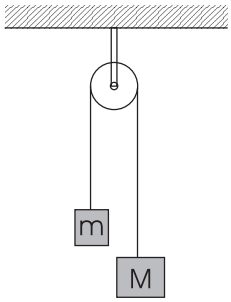


FIGURA 5. La máquina de Atwood

En este caso existen dos cuerpos. Sobre el cuerpo 1, de masa m actúan dos fuerzas: su peso mg dirigido verticalemente hacia abajo y la tensión de la cuerda, T, dirigida verticalmente hacia arriba. Sobre el cuerpo 2, de masa M actúan también dos fuerzas: su peso Mg dirigido verticalemente hacia abajo y la tensión de la cuerda, T, dirigida verticalmente hacia arriba. En este problema, todos los vectores de interes estan a lo largo de la vertical. Llamemos $\hat{k}$ al vector unitario que apunta a lo largo de la vertical hacia abajo. Llamemos así mismo z_1 a la coordenada del bloque m y z_2 a la coordenada del bloque M, medidas desde el nivel de la polea fija, tal como se indica en la Figura 2.6 b.

La ecuación de movimiento para m es

$$mg - T = m\ddot{z}_1, \tag{17}$$

en tanto que la ecuación de movimiento para M es

$$Mg - T = M\ddot{z}_2. \tag{18}$$

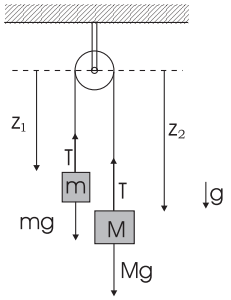


FIGURA 6. La máquina de Atwood; diagrama de fuerzas y coordenadas.

Por otra parte, como la cuerda que une los cuerpos es inextensible, tenemos la siguiente condición de ligadura entre las coordenadas de los bloques

$$z_1 + z_2 = \ell, \tag{19}$$

en que ℓ es básicamente el largo de la cuerda. Derivando (19) dos veces con respecto al tiempo tenemos

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0. \tag{20}$$

Tenemos entonces tres ecuaciones lineales (i.e., (17), (18), y (20)) para determinar las aceleraciones $\ddot{z}_1$, $\ddot{z}_2$ y la tensión T de la cuerda. Substrayendo (18) de (17) y utilizando (20) obtenemos de inmediato

$$\ddot{z}_1 = \frac{m - M}{m + M} g, \tag{21}$$

y

$$\ddot{z}_2 = \frac{M - m}{m + M} g. \tag{22}$$

Finalmente si dividimos (17) por m, (18) por M y sumamos, nuevamente utilizando (20) obtenemos la tensión

$$T = 2\frac{mM}{m + M} g. \tag{23}$$

Nótese que si $M = m$, las aceleraciones son nulas (i.e., los bloques se mueven con velocidad constante o están en reposo) y el valor de la tensión es precisamente la suma de los pesos de los dos bloques, como era de esperarse.

1. La Fuerza de Roce

De nuestra experiencia diaria, si lanzamos un objeto sobre una mesa con cierta velocidad, al poco rato se detiene. Para que esto ocurra, debe existir una fuerza horizontal entre el objeto y la mesa, cuyo efecto es frenar al objeto. Otro hecho experimental que podemos observar con facilidad es el siguiente. Ubiquemos un cuerpo en reposo sobre una mesa horizontal. Si poco a poco levantamos la mesa de modo que su superficie forme un ángulo (digamos α con respecto a la horizontal observaremos que el bloque a pesar de encontrarse en un plano inclinado, sigue en reposo, contraviniendo nuestro resultado encontrado en la sección (4.1). Si seguimos aumentando el ángulo α, existe un ángulo crítico para el cual el bloque comienza a deslizarse mesa abajo.

Basado en este tipo de observaciones experimentales Guillaume Amontons introdujo el siguiente modelo de *roce*:

i) *Roce Estático:* Consideremos un bloque en reposo sobre una superficie como se indica en la figura (**??**)

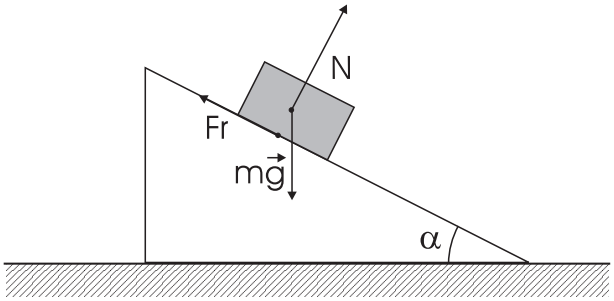


Figura 7. El roce estático.

Si sobre el bloque ejercemos una fuerza externa $\vec{F}$ como se indica en la figura, la superficie ejerce una fuerza sobre el bloque, la cual llamamos *fuerza de roce estático* $\vec{F}_r$. La fuerza de roce $\vec{F}_r$ es paralela a la superficie, su magnitud es igual a la de la fuerza $\vec{F}$ y su dirección justamente se opone a la dirección de $\vec{F}$. (La fuerza de roce siempre es paralela a la superficie de contacto, aunque la fuerza $\vec{F}$ no sea paralela a la superficie. En este último caso, la dirección de la fuerza de roce es justamente contraria a la proyección de la

fuerza a lo largo de la superficie y su magnitud es igual a la magnitud de la proyección). De acuerdo al modelo de Amontons,

a) Existe un *umbral*, $\vec{F}_{r,max}$, más allá del cual la fuerza de roce no es capaz de compensar a la fuerza $\vec{F}$ y el bloque en cuestión deja de esra en equilibrio.

b) Este umbral (i.e., $\vec{F}_{r,max}$) solo depende de la *normal* entre las superficies en contacto, de la naturaleza de las superficies en contacto y no depende del área total de contacto. De hecho,

$$|F_{r,max}| = \mu_e |N| \tag{24}$$

en que $|N|$ es la magnitud de la normal entre las superficies en contacto. En (24), el coeficiente de proporcionalidad μ_e, que se conoce como *coeficiente de roce estático* solo depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Nótese que μ_e es adimensional (pues es el cuociente entre dos fuerzas).

ii) *Roce dinámico* (o roce cinético): Consideremos ahora un bloque moviéndose sobre una superficie. De acuerdo al modelo introducido por Amontons, la fuerza de roce dinámico es una fuerza de contacto entre la superficie y el bloque, que se opone al movimiento. La fuerza de roce dinámico que ejerce la superficie sobre el bloque tiene la dirección a la velocidad del bloque y su magnitud es proporcional a la normal que ejerce la superficie sobre el bloque. En efecto,

$$|\vec{F}_r| = \mu_d |N|, \tag{25}$$

en que μ_d, el *coeficiente de roce dinámico* depende sólo de la naturaleza de las superficies en contacto y no del área de contacto. En general el valor de $\mu_d \leq \mu_e$.

Una vez introducido el modelo de la fuerza de roce, revisemos los experimentos que mencionamos al empezar la discusión.

Consideremos un bloque sobre un plano inclinado, fijo al suelo, de ángulo α tal como se ilustra en la figura (**??**). Supongamos que la superficie del plano inclinado es *rugosa*, i.e., existe roce entre el bloque y el plano inclinado. Llamemos μ_e y μ_d, respectivamente a los coeficientes de roce estático y dinámico entre ambas superficies.

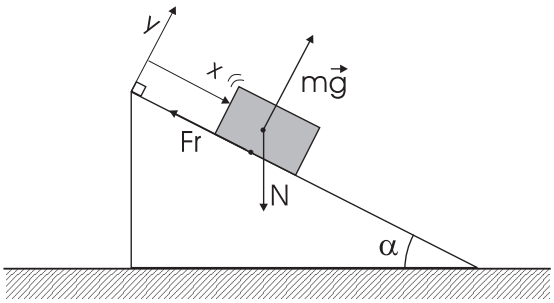


FIGURA 8. Plano inclinado con roce; Diagrama de fuerzas; Coordenadas.

Primero calculemos cuál es el mínimo valor de μ_e (ó equivalentemente el máximo valor de la inclinación del plano) para que el bloque permanezca en equilibrio sobre el plano. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son: el peso $m\vec{g}$, la normal $\vec{N}$ y la fuerza de roce $\vec{F}_r$, tal como se ilustra en la figura. Elijamos coordenadas cartesianas x, y como en la figura (i.e., el eje x a lo largo del plano inclinado e y perpendicular al plano, con el origen coincidiendo con el vértice superior del plano inclinado). Descomponiendo las fuerzas que actúan sobre el bloque a lo largo de x e y tenemos:

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(\operatorname{sen}\alpha\hat{\imath} - \cos\alpha\hat{\jmath}), \tag{26}$$

$$\vec{N} = N\hat{\jmath}, \tag{27}$$

y

$$\vec{F}_r = -f\hat{\imath}. \tag{28}$$

en que f es la magnitud de la fuerza de roce.

Para que el bloque esté en equilibrio es necesario que la suma de las fuerzas que actúan sobre él sea cero, i.e.,

$$\vec{F} \equiv \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = 0. \tag{29}$$

Reemplazando las expresiones (26), (27), y (28) en (29), obtenemos

$$mg \operatorname{sen} \alpha = f, \tag{30}$$

y

$$mg \cos \alpha = N. \tag{31}$$

Dividiendo (30) por (31) obtenemos,

$$\tan \alpha = \frac{f}{N}, \tag{32}$$

De acuerdo al modelo de Amontons, $f \leq \mu_e N$, y reemplazando esta desigualdad en (32) finalmente tenemos que la condición necesaria para que el bloque esté en equilibrio es

$$\tan \alpha \leq \mu_e. \tag{33}$$

Así pues, el ángulo crítico al que hacíamos mención al empezar esta sección es $\arctan \mu_e$. Si el ángulo de inclinación del plano supera este valor el bloque perderá equilibrio y se deslizará plano abajo.

Discutamos ahora la dinámica del bloque moviéndose plano abajo cuando la superficie del plano es rugosa. Las fuerzas que actúan sobre el bloque nuevamente el peso $\vec{P}$, la normal $\vec{N}$ y la fuerza de roce, $\vec{F}_r$. Si el bloque se está moviendo plano abajo, la fuerza de roce, en el mismo sistema de coordenadas elegido anteriormente, está dada por

$$\vec{F}_r = -\mu_d N \hat{\imath}. \tag{34}$$

El vector posición del bloque, en el sistema de coordenadas elegido más arriba, está dado por

$$\vec{r} = x\hat{\imath}, \tag{35}$$

y derivando dos veces con respecto al tiempo, su aceleración es

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath}. \tag{36}$$

Usando la segunda ley de Newton para el bloque, tenemos

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \tag{37}$$

y, reemplazando (26), (27), (34) y (35) en (37), igualando componentes a lo largo de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ respectivamente se tiene

$$mg \operatorname{sen}\alpha - \mu_d N = m\ddot{x}, \tag{38}$$

y

$$N = mg\,\cos\alpha. \tag{39}$$

Finalmente, reemplazando el valor de N en (38), la aceleración del bloque está dada por

$$\ddot{x} = mg(\operatorname{sen}\alpha - \mu_d \cos\alpha) = mg\cos\alpha(\tan\alpha - \mu_d). \tag{40}$$

Comentarios: i) Nótese que si $\mu_d = 0$ recuperamos el resultado (17) obtenido anteriormente. ii) Nótese así mismo que la cantidad entre paréntesis es nonegativa pues $\mu_d \leq \mu_e$ y α es mayor que el ángulo crítico (33).

2. El péndulo simple

Consideremos ahora el movimiento de una masa m suspendida de un punto fijo O mediante una cuerda ideal de largo ℓ, sometida a la acción de su propio peso (i.e., de la gravedad). Aquí solo discutiremos el movimiento en el plano vertical de la figura.

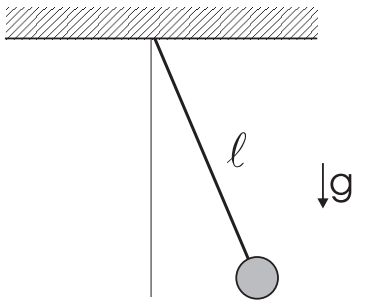


Figura 9. El péndulo simple.

En este problema sólo hay un cuerpo, i.e., la partícula de masa m. Las fuerzas que actúan sobre la masa m son su propio peso, $\vec{P} = m\vec{g}$, y la tensión $\vec{T}$ que la cuerda ejerce sobre la masa. Las coordenadas más indicadas para tratar este problema son coordenadas polares, con eje polar la vertical que pasa por el punto de suspensión O. La ventaja de usar coordenadas polares sobre usar coordenadas cartesianas, en este problema, es que la restricción que el largo de la cuerda es fijo es mucho más simple de escribir en polares. Las coordenadas de m están dadas por ρ y θ en que $\rho = \ell$ es la distancia desde O hasta m y θ mide la desviación del péndulo con respecto a la vertical (ver figura).

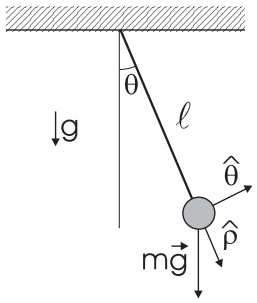


FIGURA 10. El péndulo simple; diagrama de fuerzas y coordenadas.

En estas coordenadas, la fuerza total que actúa sobre m está dada por

$$\vec{F} = mg\,\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\,\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} - T\,\hat{\rho} = (mg\,\cos\theta - T)\hat{\rho} - mg\,\cos\theta\,\hat{\theta}. \tag{41}$$

Por otra parte, la posición de la partícula es

$$\vec{r} = \ell\,\hat{\rho}, \tag{42}$$

y la aceleración la obtenemos de (43) del capítulo 1, haciendo $\rho = \ell$ (una constante) y por lo tanto $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Así,

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \ell\ddot{\theta}\,\hat{\theta}. \tag{43}$$

Utilizando (41) y (43) en la segunda ley de Newton, apelando a la independencia lineal de $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$, deducimos que

$$mg\,\cos\theta - T = -m\ell\dot{\theta}^2 \tag{44}$$

y

$$m\ell\ddot{\theta} + mg \operatorname{sen}\theta = 0, \tag{45}$$

respectivamente. La ecuación anterior es de la forma

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0, \tag{46}$$

en que

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{47}$$

Las ecuaciones (44) y (45) constituyen dos ecuaciones, las que debemos resolver para θ y T como función del tiempo. Para especificar completamente el problema debemos especificar el estado inicial del sistema, es decir debemos especificar la posición angular, i.e., $\theta(0)$, y la velocidad angular, i.e., $\dot{\theta}(0)$ inicial de la masa m.

La ecuación (46) sólo involucra la variable θ. Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal. La ecuación diferencial mas el estado inicial $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$ del sistema nos permiten encontrar la evolución del mismo, i.e., $\theta(t)$. La ecuación (46) se puede resolver exactamente en términos de funciones elípticas, lo que va más allá del alcance de este texto (sin embargo, el lector interesado puede consultar el Apéndice NN, y las referencias que allí se indican).

Aquí sólo estudiaremos el movimiento del péndulo para desviaciones pequeñas con respecto a la vertical. Para tal efecto, notemos que la función $\operatorname{sen}\theta$ difiere poco de θ para ángulos pequeños. Hasta ángulos de 30°, $\operatorname{sen}\theta$ difiere de θ en a lo más en alrededor de un 4 %. De hecho, utilizando el desarrollo en serie de Taylor de sen θ tenemos

$$\operatorname{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots, \tag{48}$$

de modo que

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta, \tag{49}$$

si θ es suficientemente pequeño comparado con 1 [rad] $\approx 57^\circ$. Restringiéndonos por tanto a pequeñas oscilaciones, reemplazamos la ecuación de movimiento (46) por la ecuación

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \tag{50}$$

Esta última ecuación ews una ecuación diferencial, lineal, homogénea, de segundo orden para θ. La solución general de esta ecuación es

$$\theta(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t, \tag{51}$$

en que $\omega = \sqrt{g/\ell}$ y A y B son constantes de integración, cuyos valores deben ser determinados a partir del conocimiento del estado inicial del sistema. De (51) obtenemos de inmediato

$$\theta(0) = B \qquad \text{y} \dot{\theta}(0) = A\omega, \tag{52}$$

de modo que la solución, para pequeñas oscilaciones, del movimiento del péndulo simple es:

$$\theta(t) = \theta(0) \cos \omega t + \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega} \operatorname{sen} \omega t. \tag{53}$$

La función $\theta(t)$ dada por (53) es una función periódica del tiempo. En efecto, dadas las propiedades de las funciones sen y cos, (53) tenemos que

$$\theta(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \theta(t), \tag{54}$$

es decir $\theta(t)$ es periódica en el tiempo con período

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ seg} \tag{55}$$

En particular, si el péndulo parte desde el reposo, desde una desviación vertical θ_0 (i.e., el estado inicial es $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$), entonces

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t. \tag{56}$$

De (56) vemos que $\theta(0) = \theta_0$, $\theta(\tau/4) = 0$, $\theta(\tau/2) = -\theta_0$, $\theta(3\tau/4) = 0$, and $\theta(\tau) = \theta_0$.

Habiendo encontrado la posición angular de la masa m como función del tiempo (i.e., $\theta(t)$, es relativamente simple determinar la tensión de la cuerda T, a partir de (44). En

principio basta reemplazar en dicha ecuación los valores de $\theta(t)$ y de $\dot{\theta}(t)$ para encontrar $T(t)$. Sin embargo, es bastante más conveniente encontrar T como función de la posición angular θ (i.e., $T(\theta)$). Esto se puede hacer incluso para el problema inicial sin aproximaciones (i.e., usando (46). Con este fin, multipliquemos (46) por $\dot{\theta}$ para obtener

$$\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + \omega^2 \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = 0, \tag{57}$$

y notemos que

$$\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(-\cos\theta\right)$$

Reemplazando estas dos identidades en (57) podemos escribir esta ecuación como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta\right) = 0, \tag{58}$$

de modo que

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2\cos\theta = c \tag{59}$$

en que c es una constante de integración, la cual debe ser evaluada a partir del estado inicial del sistema. En efecto, evaluando (59) en $t = 0$, usando los datos iniciales, obtenemos

$$c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(0) - \omega^2\cos\theta(0). \tag{60}$$

Ahora bien, de (59) tenemos $\dot{\theta}^2$ como función de θ y podemos reemplazar esta expresión en (44) para obtener finalmente

$$T = 3\,mg\cos\theta + 2m\ell\,c, \tag{61}$$

con la constante c dada por(60). Nótese que para obtener (61) hemos utilizado la expresión (47) para ω. Nótese así mismo, que para cualquier estado inicial del sistema, la tensión alcanza su valor máxima para $\theta = 0$, y así $T_{max} = T(0) = 3mg + 2m\ell c$.

3. Resortes: la ley de Hooke

Ut tensio sic vis,
"Lectures de potentia restitutiva',
Robert Hooke (1678).

Hasta ahora hemos visto o modelado cuatro tipos de interacciones entre cuerpos: *el peso*, *las normales*, *las tensiones ejercidas por cuerdas ideales*, y las *fuerzas de roce* entre superficies rugosas. Ahora modelaremos un nuevo tipo de interacción: *la fuerza elástica de un resorte ideal*. El modelo simple de resortes ideales fue introducido por el físico inglés Robert Hooke en 1678. La viñeta al principio de esta sección literalmente significa *"tanto como la elongación es la fuerza"* dando cuenta de la caracterísitica fundamental de los resortes ideales. El resorte "ideal" no tiene masa (en el sentido que su masa es despreciable comparada con la de los cuerpos de un sistema mecánico delcual el resorte forma parte), y ejerce fuerza solo a lo largo del resorte (i.e., fuerza longitudinal). El resorte está caracterizado por un largo dado (su "largo natural") y solo ejerce fuerza cuando es estirado o comprimido. Para pequeñas desviaciones del largo del resorte, la fuerza ejercida por el resorte es proporcional al cambio en su longitud (que es precisamente la observación inicial de Hooke). La constante de proporcionalidad entre la fuerza ejercida por el resorte y su cambio de longitud se llama "constante elástica del resorte", y usualmente la denotamos por la letra k. las unidades de la constante elástica son, obviamente N/m.

En la figura se ilustra un *resorte ideal*, el cuál está caracterizado por dos parámetros: ℓ_0, el *largo natural* del resorte, y k, la *constante elástica* del resorte.

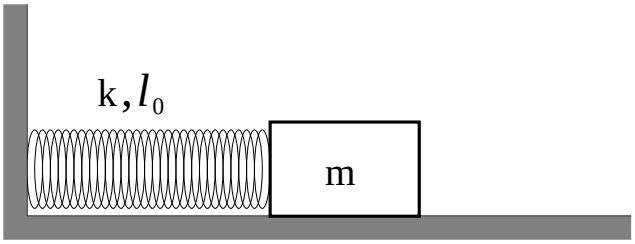


Figura 11. Resorte ideal de largo natural ℓ_0 y constante elástica k.

La fuerza que ejerce el resorte es restitutiva, en el sentido que tiende a llevar al resorte a su largo natural. Si el resorte es estirado, la fuerza ejercida por el resorte es hacia dentro (hacia el resorte) y si está comprimido, la fuerza ejercida por el resorte es hacia fuera. En la figura, llamamos x al largo actual del resorte, e $\hat{\imath}$ la dirección a lo largo de x. Entonces, de acuerdo a la Ley de Hooke, la fuerza ejercida por el resorte está dada por

$$\vec{F} = -k(x - \ell_0)\hat{\imath}. \tag{62}$$

Vemos de (62) que: i) si $x = \ell_0$ la fuerza que ejerce el resorte es nula; ii) si $x > \ell_0$ la fuerza es en la dirección $-\hat{\imath}$ y iii) si $x < \ell_0$ la fuerza es en la dirección $+\hat{\imath}$. En todo caso, de acuerdo a la ley de Hooke, $|\vec{F}| = k|\Delta x|$ en que $|\Delta x|$ es el cambio en el largo del resorte.

Consideremos ahora un bloque de masa m dispuesto sobre una superficie horizontal sin roce. El bloque está unido a una pared vertical por medio de un resorte ideal como se muestra en la figura. La situación de equilibrio para este sistema (i.e., que no haya fuerza neta sobre el bloque) se obtiene cuando el resorte está en su largo natural . Así, si llamamos x a la coordenada horizontal del bloque M, medida desde la pared, la posición de equilibrio corresponde a $x_{\text{eq}} = \ell_0$. Como veremos a continuación, si apartamos el bloque de masa m desde su posición de equilibrio, éste realizrá oscilaciones con respecto a la posición de equilibrio. En efecto, al estar estirado, el resorte ejercerá una fuerza sobre el bloque, que lo acelerar hacia la izquierda (en la figura). Al llegar a la posición de equilibrio, el bloque no se detiene, debido a su momentum. El bloque continuará su movimiento hacia la izquierda, comprimiendo al resorte, el cual ejercerá entoncs una fuerza hacia la derecha, la cual hará disminuir el momentum del bloque hasta que este se detenga, e inicie un movimiento similar ahora hacia la derecha, y así sucesivamente. La única fuerza horizontal que actúa sobre el bloque m es la fuerza del resorte, la cual está dada por (62). Por otra parte, la posición del resorte está dada por $x(t)\,\hat{\imath}$, y por lo tanto su aceleración es $\ddot{x}\,\hat{\imath}$. Así, por la segunda Ley de Newton, la ecuación de movimento del resorte estará dada por,

$$-k(x - \ell_0)\hat{\imath} = m\,\ddot{x}\,\hat{\imath}, \tag{63}$$

es decir, por

$$m\ddot{x} + k(x - \ell_0) = 0. \tag{64}$$

Conviene introducir una nueva variable que mida la separación del bloque con respecto a la posición de equilibrio. Hagamos el cambio $x \to s = x - x_{\text{eq}} = x - \ell_0$. Como ℓ_0 es constante, $\ddot{s} = \ddot{x}$. Usando s en lugar de x en la ecuación (64) obtenemos,

$$m\ddot{s} + k\, s = 0, \tag{65}$$

que es análoga a la ecuación (50) que obtuvimos para describir las pequeñas oscilaciones del péndulo simple. Esta vez la fuerza que dirige el movimiento del bloque es la fuerza del resorte, caracterizada por la constante elástica k (en el caso del péndulo simple, su movimiento estaba comandado por la fuerza de gravedad, caracterizada por el parámetro g). La solución general de (65) está dada por,

$$s(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}(\omega t), \tag{66}$$

en que esta vez,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{67}$$

Las constantes A y B en (66) se obtienen a partir del estado inicial del sistema, i.e., a partir del conocimiento de la posición inicial del blouqe m, i.e., de $s(0)$ y de su velocidad inicial, i.e., de $\dot{s}(0)$. En efecto, evaluando (66) en $t = 0$ obtenemos,

$$s(0) = A,$$

en tanto que deriavando primero (66) con respecto a t y luego evaluando en $t = 0$, obtenemos

$$\dot{s}(0) = B\,\omega.$$

Así, finalmente la solución para las oscilaciones del bloque, $s(t)$, está dada por,

$$s(t) = s(0)\cos\omega t + \frac{\dot{s}(0)}{\omega}\,\text{sen}(\omega t), \tag{68}$$

en que $\omega = \sqrt{k/m}$. El período de las oscilaciones del bloque está dado por

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4. Roce Viscoso

Un cuerpo que se mueve en un fluido (e.g., en el aire, en agua, etc.) experimenta una fuerza de resistencia que se conoce como *roce viscoso*. La fuerza de roce viscoso se opone a la dirección de movimiento del cuerpo (i.e., su dirección es contraria a la dirección de la velocidad $\vec{v}$ del cuerpo. En cuanto a su magnitud, ésta es función de la velocidad. Para velocidades pequeñas, la magnitud es proporcional al módulo de la velocidad. La constante de proporcionalidad depende de la *viscosidad* del fluido y de la geometría del cuerpo (explícitamente es prpoporcional a la superficie del cuerpo transversal a su movimiento). Así pues, el modelo de fuerza de roce que aquí utilizaremos está dado a través de

$$\vec{F}_{rv} = -b\vec{v}, \tag{69}$$

en que la constante b (que tiene unidades de [N–seg/m]=[kg/seg]), es proporcional a la viscosidad del fluido y a la superficie del cuerpo transversal al movimiento.

Una aplicación clásica de la fuerza de roce viscoso es al cálculo de la velocidad de un cuerpo que cae en el aire (e.g., la caída de un paracaídas).

Consideremos entonces un cuerpo de masa m que cae verticalmente, desde el reposo y a una altura h, en el aire sometido a una fuerza de roce viscoso dada por (69). Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$ y la fuerza de roce viscoso $-b\vec{v}$. Si llamamos $z(t)$ a la posición vertical del cuerpo con respecto a la tierra, y $\hat{k}$ a la dirección vertical (hacia arriba), la posición, velocidad y aceleración del cuerpo están dadas respectivamente por

$$\vec{r} = z\hat{k}, \qquad \vec{v} = \dot{z}\hat{k}, \qquad \text{y} \qquad \vec{a} = \ddot{z}\hat{k}, \tag{70}$$

en tanto que la fuerza total sobre el cuerpo está dada por

$$\vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} = -mg\hat{k} - b\dot{z}\hat{k}. \tag{71}$$

Utilizando (70) y (71) y la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento del cuerpo se reduce a

$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z}, \tag{72}$$

la que junto a las condiciones iniciales, $\dot{z}(0) = 0$, y $z(0) = h$, determina la posición del cuerpo $z(t)$. La ecuación (72) es una ecuación de primer orden para $\dot{z}(t)$. Como $z(t)$ disminuye en el tiempo (i.e., como la velocidad del cuerpo es negativa), es conveniente introducir la variable $v(t) = -\dot{z}(t)$. En términos de $v(t)$, la ecuación (72) es

$$m\frac{dv}{dt} + bv = mg. \tag{73}$$

La solución de (73) es

$$v(t) = A \exp -bt/m + \frac{mg}{b}, \tag{74}$$

en que A es una constante de integración que debe ser determinada a partir del valor inicial de la velocidad. En efecto, evaluando (74) en $t = 0$ obtenemos $v(0) = A + (mg/b)$, y como el cuerpo parte desde el reposo, $v(0) = 0$, de donde deducimos que

$$A = -\frac{mg}{b}.$$

Reemplazando este valor de A en (74) encontramos finalmente

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - \exp -bt/m\right). \tag{75}$$

En la figura (**??**) hemos graficado la dependencia de la velocidad v en el tiempo. De la ecuación (75) es simple determinar el comportamiento de v para tiempos pequeños. (Nótese que $\tau \equiv m/b$ tiene unidades de tiempo, y es la unidad de tiempo natural en este problema; así pues, tiempos pequeños significa $t \ll \tau$, y tiempos grandes significa $t \gg m/b$). Para tiempos pequeños $bt/m \ll 1$, de modo que desarrollando la exponencial, en (75) en serie de Taylor alrededor de 0 tenemos

$$\exp -bt/m \approx 1 - \frac{bt}{m} + O((bt/m)^2),$$

y reemplazando en (75) obtenemos

$$v(t) \approx g\,t. \tag{76}$$

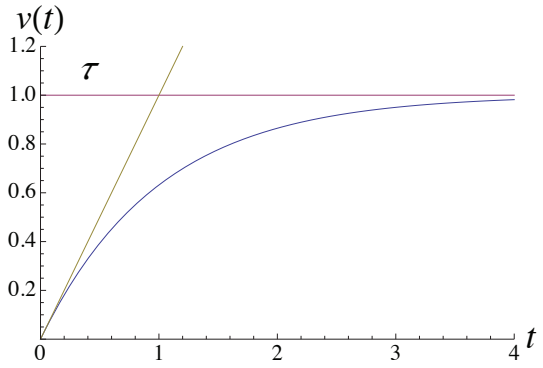


FIGURA 12. Velocidad de caída de un paracaídas como función del tiempo

La interpretación de (76) es muy simple: al iniciarse la caída, la velocidad del cuerpo es pequeña. Entonces la fuerza de roce viscoso es despreciable frente al peso del cuerpo. Así, la velocidad como función del tiempo, para tiempos pequeños, coincide con la expresión de la velocidad de un cuerpo en caída libre.

Por otra parte, para tiempos grandes, i.e., para $bt/m \gg 1$, la exponencial en (75) es despreciable, de modo que la velocidad alcanza el valor asintótico

$$v_{\lim} = \frac{mg}{b}. \tag{77}$$

El cuerpo en estudio no sigue acelerando indefinidamente debido, precisamente a la fuerza de roce viscoso. El cuerpo alcanza una velocidad límite, la cual depende de su peso y del valor de b. Mientras mayor es la viscosidad del fluido, o mayor sea la superficie que el objeto presenta transversal a la vertical, menor es el valor de la velocidad límite que alcanza. Este es el principio de funcionamiento de los paracaídas y parapentes.

Comentario: Nótese que es fácil obtener el valor de la velocidad límite directamente de la ecuación de movimiento (i.e., de la ecuación (73). En efecto, cuando el cuerpo que cae alcanza la velocidad límite, su velocidad es constante (i.e., $dv/dt = 0$) y de (73) obtenemos que $v_{\lim}$ satisface:

$$m\,g - b\,v_{\lim} = 0,$$

de donde obtenemos, de inmediato, que

$$v_{\lim} = \frac{mg}{b}.$$

Comentarios: La fuerza de roce viscoso dada por (69) es válida para objetos que se mueven a baja velocidad respecto a la velocidad del fluido. La constante b depende de la geometría del cuerpo y de la viscosidad del fluido. En 1851, Georges Stokes demostró a partir de las ecuaciones de fluidos (i.e,, de las ecuaciones de Navier–Stokes) que para una esfera de radio R moviéndose a baja velocidad en un fluido de viscosidad (dinámica) μ, la fuerza de roce viscoso sobre la esfera está dada por (69) con $b = 6\pi\mu R$. La viscosidad dinámica del agua a 20° C es de aproximadamente 10^{-3} N seg/m^2, en tanto que la viscosidad dinámica del aceite de motor a la misma temperatura es de $0,25$ N seg/m^2.

Para cuerpos que se mueven a mayor velocidad, el coeficiente b depende de la velocidad. En particular, Lord Rayleigh introdujo la ley de fuerzas

$$F_{\rm rv} = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_D,$$

en que ρ es la densidad del fluido, v la velocidad relativa del cuerpo con respecto al fluido, S la superficie de la sección transversal del objeto que se mueve (i.e., el área de la proyección del cuerpo perpendicular a la dirección de movimiento y C_D es un coeficiente que depende de la geometría del cuerpo). Antes que Lord Rayleigh, John Smeaton había obtenido una expresión similar, para objetos con forma de placas. Cabe destacar que John Smeaton (1724-1792) fue el primer **ingeniero civil**. El introdujo el término, ingeniero civil, como opuesto a ingeniero militar.

Ejercicio: Como decimos en el comentario anterior, en la fuerza de roce viscoso la fuerza puede depender de la velocidad. Supongamos que lanzamos un objeto de masa m hacia arriba con velocidad inicial v_0, y supongamos que el aire ejerce una fuerza de roce viscoso proporcional al cuadrado de la velocidad. Determinemos la altura máxima que alcanza este objeto (medida desde la posición de lanzamiento) y el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Este es un movimiento unidimensional. Llamaremos $v(t)$ a la velocidad

del objeto (hacia arriba). Mientras el cuerpo sube, la fuerza de roce viscoso que actúa sobre el está dada por,

$$F_{\rm rv} = -cv^2, \tag{78}$$

en que c es una constante. También actúa sobre el cuerpo su peso, i.e., la fuerza $-m\,g$. Así, la ecuación de movimiento para el cuerpo, en su viaje hacia arriba, está dada por

$$m\dot{v} = -c\,v^2 - m\,g. \tag{79}$$

Es fácil verificar que $\sqrt{(m\,g)/c}$ tiene unidades de velocidad. Llamaremos $v_\infty = \sqrt{(m\,g)/c}$ a esta combinación. En términos de v_∞ podemos escribir (79) como

$$\dot{v} = -\frac{c}{m}\left(v^2 + v_\infty^2\right). \tag{80}$$

Introduzcamos la variable $u = v/v_\infty$ (en realidad, u mide la velocidad del cuerpo en unidades de v_∞. En términos de u, la ecuación (80) se puede escribir como,

$$\dot{u} = -\frac{g}{v_\infty}\left(1 + u^2\right), \tag{81}$$

la cual, a su vez, se puede reescribir (usando el hecho que la derivada de la arcotangente de x es $1/(1+x^2)$) como

$$\frac{d}{dt}\arctan u = -\frac{g}{v_\infty}. \tag{82}$$

Llamemos T al tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar su altura máxima luego del lanzamiento. La velocidad del cuero en su punto mas alto, i.e., en $t = T$ es cero. Integrando (82) en el tiempo, entre 0 y T, usando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos,

$$\arctan u(T) - \arctan u(0) = -\frac{g}{v_\infty}T, \tag{83}$$

y como $u(T) = 0$, tenemos entonces que,

$$T = \frac{v_\infty}{g}\arctan(u(0)), \tag{84}$$

en que $u(0) = v_0/v_\infty$.

Ahora encontraremos la altura máxima, digamos H, que alcanza el cuerpo. Repitiendo la integración de (82) pero esta vez entre 0 y $t \leq T$, obtenemos,

$$\arctan u(t) - \arctan u(0) = -\frac{g}{v_\infty} t. \tag{85}$$

Y, usando que $v(t) = u(t)v_\infty$, obtenemos,

$$\frac{dz}{dt} = v(t) = v_\infty \tan(\arctan u_0 - \frac{g}{v_\infty} t). \tag{86}$$

Finalmente, para obtener $H = z(T)$, integramos (86) entre 0 y T, usando el Teorema Fundamental del Cálculo para integrar el lado izauierdo de (86). Así, ya que $z(0) = 0$, tenemos que,

$$H = \frac{v_\infty^2}{g} \log \cos(\arctan u_0 - \frac{g}{v_\infty} t) \, \Big|_0^T,$$

donde usamos que la primitiva de $\tan x$ es $-\log cosx$. Finalmente, usando que T es tal que $\arctan u_0 - (g/v_\infty)T = 0$, encontramos la altura pedida, i.e.,

$$H = \frac{v_\infty^2}{g} \left[-\log \cos(\arctan u_0) \right]. \tag{87}$$

Dejamos como ejercicio al lector verificar que cuando $c \to 0$, H toma el valor standard del lanzamiento sin roce, i.e.,

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Indicación: Si $c \to 0$, $v_\infty \to \infty$, y así, $u_0 \to 0$. Para x pequeòn, $arctanx \approx x$. Usando el desarrollo de Taylor para $cosx \approx 1 - x^2/2$ y a su turno para $log(1 + x) \approx x$, tenemos que para u_0 pequeño, $-\log \cos(\arctan u_0) \approx u_0^2/2$, de donde se obtiene el límite deseado.

5. Problemas

20. Una masa m que cuelga de una cuerda, gira alrededor de la vertical con una velocidad angular ω, como se ve en la figura. Calcule la tensión de la cuerda, y el ángulo α.

21. Una lámpara está suspendida verticalmemte de una cuerda en un ascensor que está bajando. El elevador tiene una desaceleración de de 2.44 m/seg^2 antes de detenerse. (a) Si

la tensión de la cuerda es de 89 N. ¿ Cuál es la tensión de la cuerda cuando el ascensor está subiendo con aceleración de 2.44 m/seg^2

22. Un bloque de masa m se encuentra sobre un plano inclinado de ángulo $\alpha = 30°$, y está conectado mediante una cuerda a un bloque de masa M como se indica en la figura. Suponga que no hay roce entre m y el plano inclinado y tampoco entre la cuerda y la polea de la figura.
a) Determine la aceleración de ambos bloques.
b) Calcule la tensión de la cuerda.

23. Dos bloques de masas m y M respectivamente están conectados mediante una cuerda como se indica en la figura. Despreciando el roce entre las superficies y la masa de las poleas, determine la aceleración de M.

24. La plataforma de un pintor pende de una polea como se indica en la figura. Considere la cuerda sin peso y la polea sin peso ni roce. El pintor se halla sobre la plataforma, aguantandose a sí mismo. La plataforma pesa 40 Kg y el pintor 80 Kg. Hallar la tensión de la cuerda en los puntos A, B y C.

25. Sobre un cuerpo de masa 29,2 [Kg] se ejerce la fuerza de gravedad además de una fuerza horizontal de 578 [N]. Encontrar la aceleración y la velocidad del cuerpo en función del tiempo, suponiendo que parte del reposo.

26. Una cuerda de largo 2ℓ con dos masas puntuales m en sus extremos, tiene en $t = 0$ una fuerza F aplicada en su punto medio, perpendicular a la cuerda, como se muestra en la figura. Calcule la aceleración de las masas en la dirección del eje que las une en un instante posterior a $t = 0$ en función de la distancia entre ellas.

27. Una masa m que tiene una carga eléctrica se encuentra colgada del extremo de una cuerda y sometida a una fuerza eléctrica horizontal, de manera que la cuerda forma un

ángulo de 37^o con la vertical. Encuentre la magnitud de la fuerza eléctrica y la tensión de la cuerda.

28. Una partícula de masa m se desliza sin roce sobre una superficie esférica de radio R partiendo desde el punto mas elevado con una velocidad v_0. Determine el ángulo θ_c, para el cual la partícula se despega de la superficie. ¿Cómo depende θ_c de la velocidad inicial v_0 que se le da a la partícula?

29. Considere la máquina de Atwood de la figura. Calcule las aceleraciones y las tensiones en las dos cuerdas.

30. Considere dos partículas de masa m que deslizan sin roce por una barra vertical y una horizontal respectivamente tal como se indica en la figura. Ambas están unidas por una cuerda ideal de largo L. Suponiendo que el sistema parte del reposo con un ángulo $\theta = 30°$. Determine:
i) la ecuación de movimiento para el ángulo θ;
ii) la tensión de la cuerda en función de θ.

31. Encuentre las aceleraciones de las masas m_i y las tensiones T_i para el sistema de la figura.

32. El cilindro liso de metal pesa $25[kg]$ y se apoya en un carrito al que se le comunica una aceleración de $2g$ en el sentido ascendente de un plano inclinado de $15°$ con la horizontal (aquíg denota la aceleración de gravedad). Encuentre las fuerzas de contacto en A y B.

33. Una partícula de masa m cae deslizando por una curva en forma de hélice recta de base circular, de radio R y paso b, con su eje paralelo a la vertical. Encuentre la aceleración de la partícula y la reacción de la hélice sobre ella.

34. El coeficiente de roce estático entre la plataforma del camión y la caja que transporta (ver figura) es $\mu_e = 0,3$. Determine la distancia mínima de frenado s que puede recorrer el

camión, partiendo de una velocidad de $72,4[km/hr]$, y siendo constante la desaceleración durante el frenado, de modo que la caja no deslice hacia adelante.

35. Considere un bloque de masa M colocado sobre una superficie horizontal, con la cual tiene un coeficiente de roce estático μ_e. Este bloque se encuentra atado, por medio de una cuerda ideal de largo L, a otro bloque de masa m inicialmente a la misma altura de M y a una distancia d del anillo A indicado en la figura. En esta posición la cuerda se encuentra extendida y sin tensión.
Al tiempo $t = 0$ se libera la masa m. Si $M = 2m$ y $\mu_e = 1$, calcule el ángulo en el instante en que el bloque sobre la superficie horizontal empieza a deslizar.

36. Los bloques B_1 y B_2 de masa m_1 y m_2 deslizan hacia abajo sobre un plano inclinado fijo de ángulo θ, tal como se indica en la figura. Los bloques están apoyados entre sí, (no pegados). Los coeficientes de roce dinámico ente el bloque B_1 y el plano, y entre el bloque B_2 y el plano valen μ_1 y μ_2 respectivamente. Determine la aceleración común de los dos bloques y la magnitud de la fuerza $\vec{F}_1$ que B_2 ejerce sobre B_1. Discuta los movimientos posibles del conjunto y las condiciones que se deben cumplir para que exista la fuerza $\vec{F}_1$.

37. El bloque B_1 de masa m_1 está apoyado sobre una superficie horizontal fija; el bloque B_2 está apoyado sobre B_1. Los bloques están unidos a los extremos de una cuerda ideal, que pasa por una polea fija , en la forma representada en la figura. Los coeficientes de roce dinámico entre B_1 y B_2, y entre B_1 y la superficie horizontal, tienen el mismo valor μ. Todos los demás roces son despreciables. Si B_1 desliza con velocidad constante hacia la izquierda, determine la magnitud de la fuerza horizontal $\vec{F}$ que está actuando sobre él.

38. Un pequeño bloque de masa m descansa sobre un tambor cilíndrico de fondo horizontal. En el instante $t = 0$ el bloque se está moviendo con rapidez v_0 apoyado contra el fondo y la pared del tambor, a una distancia R del centro. Los coeficientes de roce dinámico entre el bloque y la pared y entre el bloque y el fondo del cilindro tienen el mismo valor μ.

¿Cúal es el número de vueltas que da el bloque desde $t = 0$ hasta que se detiene? Repita el cálculo si el roce entre el bloque y el fondo del cilindro es nulo.

39. Se lanza una partícula de masa m con velocidad v_0 y con una inclinación θ respecto de la horizontal en un medio que ejerce una fuerza de roce viscoso igual a $-k\vec{v}$. ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que la trayectoria vuelve a formar un ángulo θ con la horizontal?

40. Considere una partícula de masa m que cae libremente desde el reposo en un campo gravitatorio uniforme en un medio en el cual la resistencia varía como el cuadrado de la velocidad. Encuentre la velocidad de la partícula y la distancia que recorre como función del tiempo.

Nota: El alumno interesado puede calcular el movimiento de un proyectil en un medio como el descrito en este problema. En particular se puede demostrar que el ángulo θ entre las asíntotas inicial y final de la trayectoria del proyectil está dado como la solución de la ecuación

$$\frac{u^2}{v^2} = \sinh^{-1}(\cot\theta) + \cot\theta cosec\theta$$

(ver Problema 18, p. 242, E. T. Whittaker, *A Treatise of the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Dover Publications, NY, 1944.)

41. Una canoa con una velocidad inicial v_0 se ve frenada por una fuerza de rozamiento $F = -b\exp(av)$ Encuentre la velocidad de la canoa como función del tiempo así como el tiempo y la distancia que necesita para detenerse. [Prob. 2.5, p.69, K. Simon, *Mecánica*, Aguilar, Madrid, 1968.]

Notas históricas:

i) Quizás los primeros en resolver el movimiento uniformemente acelerado fueron los *"Calculadores de Merton College"* de la Universidad de Oxford, en el siglo XIV. Los principales integrantes de lo que hoy se conoce como los calculadores de Merton College, durante el segundo cuarto del siglo XIV fueron Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead y John Dumbleton, Ellos establecieron la ley de movimiento uniformemente acelerado tal como la conocemos hoy, en particular establecieron lo que se conoce como el "Teorema de Merton" (por Merton College): *"Un cuerpo moviéndose con velocidad constante viaja la misma distancia que un cuerpo uniformemente acelerado en el mismo tiempo si su velocidad es la mitad de la velocidad final del cuerpo acelerado"*. Para el desarrollo de la mecánica previo a Galileo ek lectot El interesado puede consultar la monografía de William A. Wallace, *Prelude to Galileo. essays on Medieval and XVIth Century Souces of Galileo's thought*, Boston Studies in the Philosophy of Sciences, **62**, D. Reidel Pub. Co., Boston, 1981.

ii) Durante el siglo XVII, varios autores resolvieron problemas específicos de dinámica. En particular, Galileo Galilei (1564–1642) resolvió el problema de la caída de un cuerpo con aceleración constante (carta de Galileo a Sarpi, escrita el 16 de octubre de 1604; ver también [5]).

iii) John Wallis (1616–1703) resolvió el problema del *choque inelástico entre dos cuerpos*, en tanto que Sir Christopher Wren (1632–1723) y Christian Huyghens (1629–1697) en forma independiente resolvieron el problema del choque elástico de dos cuerpos.

iv) Las Leyes de Newton fueron establecidas por Issac Newton (1642–1727) en el *Principia* (1687). Se pueden encontrar, e.g., en la pgina 13 (*Law I, Axioms or Laws of Motion* de: Isaac Newton *Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translation revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. Volume I: The motion of bodies. University of California Press, Berkeley 1934.

v) Guillaume Amontons, físico francés, nació en Paris el 31 de Agosto de 1663. En su artículo, *De la resistance causée dans les machines*, Memoires de l'Académie Royale des Sciences **1**, 207–222 (1699), estableció que la fuerza de roce es proporcional a la fuerza normal. Amontons hizo

varios trabajos en teoría de gases. En 1702 inventó un termómetro basado en presión de aire, y en 1702-1703 publicó dos artículos notables en termometría. Desarrolló un método para medir los cambios de temperatura en términos de un cambio proporcional en la presión de una masa y volumen constante de aire. Su método condujo eventualmente al concepto de cero absoluto de temperatura en el siglo XIX. Publicó el libro *Remarques et experiences physiques sur la construction d'une nouvelle clepsydre, sur les barometres, thermometres, et hydrometres*, Paris, 1695. Amontons murió en Paris el 11 de octubre de 1705. (Ver www.britannica.com, Whittaker, Index biographique de l'Aacademie des Sciences, Paris, Gauthier-Villars, 1979, p. 106.)

vi) El reloj de péndulo fue inventado por el físico holandés Christiaan Huygens (1629–1695) en 1656, y construído por el relojero de La Haya Salomon Coster (1620–1659) al año siguiente. El diseño del reloj de péndulo de Huygens estaba basado en ideas preliminares de Galileo. El análisis correcto de las oscilaciones de un péndulo fue realizado por Huygens en su libro *Horologium oscillatorium: sive, De motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*, impreso en Paris, en 1673 por la editorial de F. Muguet. La traducción al inglés del *Horologium*, de Ian Bruce, estádisponible en el sitio WEB: http://www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html

vii) La palabra dinámica en Física fue introducida por el matremático aleman Gottfried Leibnitz (1646–1716) en 1691 quién la tomó del griego *dynamikos* "poderoso" (derivado a su vez de *dynamis* "poder").

Referencias

[1] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, NY, 1937. Capítulo 6, *On the Seashore*, pp. 90-116.

[2] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[3] R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996.

[4] Leonhard Euler, *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*

[5] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenanti alla Meccanica ed i movimenti locali*, 1638.

[6] Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, J. Streater's Press, Londres, 1687.

©Rafael Benguria D., 13 de Marzo de 2015.