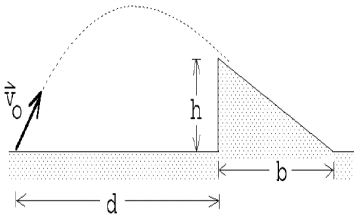
Interrogación 1

Fecha: 26 de Abril 2024

1. Desde una distancia d del borde recto de un tobogán, se dispara una bengala. El tobogán tiene una altura h y un largo b tal como se muestra en la figura. La bengala se lanza con una velocidad inicial v_0 tal, que luego de un tiempo t' la bengala aterriza justo al comienzo del tobogán, de forma que su velocidad es paralela al plano inclinado.
   A partir de lo anterior:

   a) **(2 ptos)** Escriba las ecuaciones de movimiento para la bengala en cada uno de los ejes, en el instante en que $t = t'$.

   b) **(5 ptos)** Determine las componentes de la velocidad inicial v_0.



(1 pto) por ecuaciones en cada eje (2 ptos total)
(1 pto) por encontrar la expresión de tiempo prima
(1 pto) por encontrar la igualdad de los triángulos
(1 pto) por sustituir t prima y la relación entre las componentes de v en la ecuación de velocidad y posición en y
(1 pto) por resolver y encontrar v_{0x}
(1 pto) por reemplazar v_{0x} en v_{0y} y despejar

a) Las ecuaciones de movimiento para la bengala en el instante $t = t'$:
Para el eje x, tenemos que el movimiento es con velocidad constante $v_x = v_{0x}$, luego:

$$d = v_{0x}t' \tag{1}$$

En el eje y, tenemos un movimiento acelerado, cuya aceleración es g. Por ende, las ecuaciones para la posición y velocidad son respectivamente:

$$h = v_{0y}t' - \frac{1}{2}gt'^2 \tag{2}$$

$$v_y = v_{0y} - gt' \tag{3}$$

b) De la ecuación 1, encontramos una expresión para t', puesto que necesitamos ese tiempo para evaluarlo en las otras ecuaciones:

$$t' = \frac{d}{v_{0x}} \tag{4}$$

Reemplazamos el tiempo t' en la ecuación de posición y velocidad v_y para el eje y

$$h = v_{0y}\frac{d}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_{0x}^2} \tag{5}$$

$$v_y = v_{0y} - g\frac{d}{v_{0x}} \tag{6}$$

■

Si nos fijamos en la geometría del problema, podemos darnos cuenta de que las componentes de la velocidad, cuando la bengala llega justo al borde del tobogán, forman un triángulo que es semejante al del tobogán:

$$\frac{v_y(t')}{v_{0x}} = -\frac{h}{b} \tag{7}$$

Usamos lo anterior para reemplazar v_y y nos queda

$$-\frac{hv_{0x}}{b} = v_{0y} - g\frac{d}{v_{0x}} \tag{8}$$

Al comparar las ecuaciones (5) con (8) notamos que es conveniente manipular la segunda ecuación para poder reducir términos al sumarlas. Para ello primero igualamos multiplicamos el numerador por d y dividimos por v_{0x}:

$$-\frac{hd}{b} = v_{0y}\frac{d}{v_{0x}} - g\frac{d^2}{v_{0x}^2} \tag{9}$$

Luego de la manipulación de la ecuación para la velocidad en y, procedemos a restar ambas ecuaciones, (5) con (9):

$$h + \frac{hd}{b} = \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_{0x}^2} \tag{10}$$

De la ecuación anterior, despejamos v_{0x}:

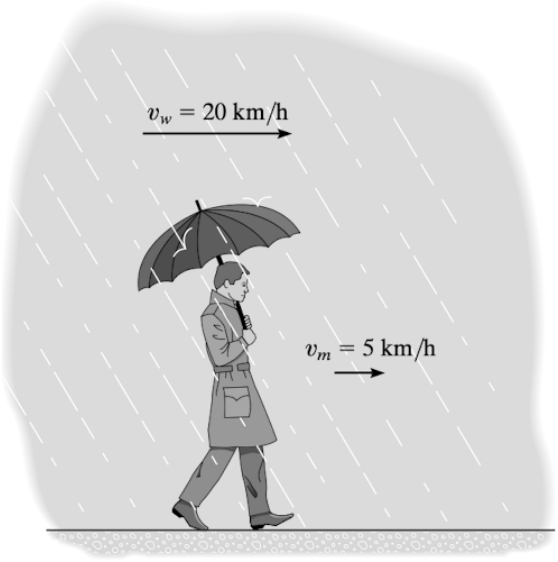
$$v_{0x} = d\sqrt{\frac{gb}{2h(b+d)}} \tag{11}$$

Finalmente, utilizamos la expresión anterior y la reemplazamos en la ecuación (9) para encontrar la expresión de la velocidad inicial en el eje y, luego de reducir términos:

$$v_{0y} = (2b+d)\sqrt{\frac{gh}{2b(b+d)}} \tag{12}$$

■

2. Un hombre camina a $5\,km/h$ en la misma dirección del viento que va a $20\,km/h$, ver figura. Si las gotas de lluvia caen verticalmente a $7\,km/h$ con respecto al viento, determine la dirección en la cual las gotas parecen caer con respecto al hombre. Asuma que la componente horizontal de la velocidad de las gotas es igual a la del viento. **(4 ptos)**



(1 pto) por determinar las relaciones relativas entre las velocidades para CADA par, lluvia/viento y lluvia/hombre
(1 pto) por CADA uno con los valores y direcciones correctas
(1 pto) definir la dirección
(1 pto) por la dirección correcta
Debemos encontrar la velocidad de la lluvia ($\vec{v}_{ll}$) primero. Sabemos que:

$$\vec{v}_{ll} = \vec{v}_v + \vec{v}_{ll/v} = (20\hat{i} - 7\hat{j})\,[Km/h]$$

donde $\vec{v}_v$ es la velocidad del viento y $\vec{v}_{ll/v}$ es la velocidad de la lluvia con respecto al viento.
Con lo anterior, ahora podemos encontrar la velocidad de la lluvia con respecto al hombre ($\vec{v}_{ll/h}$) es:

$$\vec{v}_{ll} = \vec{v}_h + \vec{v}_{ll/h}$$
$$20\hat{i} - 7\hat{j} = 5\hat{i} + \vec{v}_{ll/h}$$
$$\vec{v}_{ll/h} = (15\hat{i} - 7\hat{j})\,[Km/h]$$

donde $\vec{v}_h$ es la velocidad del hombre. La dirección esta dada por:

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{-7}{15}) \sim -25^\circ$$

asumiendo que el ángulo crece horario con respecto a la horizontal. Si se asume que el ángulo crece de manera antihoraria con respecto a la horizontal, entonces la respuesta es:

$$\theta = 360^\circ - 25^\circ = 335^\circ$$

■

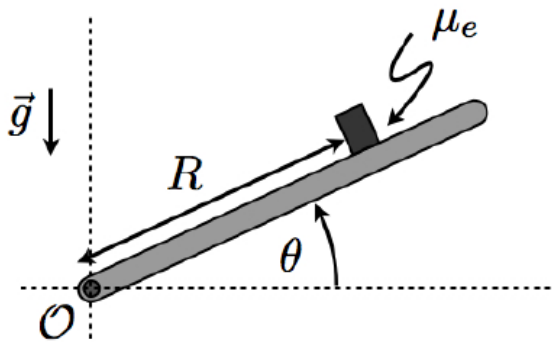
3. En el sistema de la figura, la barra rota en torno a la rótula O con aceleración angular constante $\ddot{\theta} = 2g/R$, habiendo iniciado su movimiento desde la posición $\theta = 0$ con $\dot{\theta} = 0$. Debido a la acción de una fuerza de roce estático, una partícula de masa m descansa sobre la barra a una distancia constante R desde O. Determine:

   a) El DCL de la masa m **(2 ptos.)**

   b) Las ecuaciones de movimiento **(2 ptos.)**.

   c) La fuerza de roce y fuerza normal en función de θ **(1.5 ptos.)**.

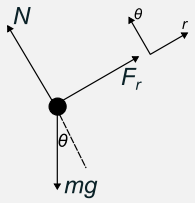
   d) El mínimo coeficiente de roce estático μ_e para que la partícula NO deslice en el intervalo $0 < \theta < \pi/2$ **(1.5 ptos.)**.



Hints:

- La aceleración en coordenadas polares es: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$
- Recuerde que $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$.
- $\sin\theta < 4\theta$ para $\theta > 0$.

a) En este problema tenemos peso **(0.5 ptos)**, normal **(0.5 ptos)**, y fuerza de roce **(1.0 ptos)**. El DCL es:



Los puntos se otorgan por dibujar correctamente las fuerzas. Sin embargo, se acepta dibujar F_r tanto en $\hat{r}$ como en $-\hat{r}$.

b) En coordenadas polares, debido a que r es constante la aceleración es **(0.5 ptos)**

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}.$$

Entonces, las ecuaciones de movimiento son:

$$\hat{r}: \quad F_r - mg\sin\theta = -mR\dot{\theta}^2 \quad \textbf{(0.75 ptos)}.$$
$$\hat{\theta}: \quad N - mg\cos\theta = mR\ddot{\theta} \quad \textbf{(0.75 ptos)}.$$

En este item se otorga todo el puntaje independiente si remplazan $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ o no.

■

c) Para obtener las fuerzas en función de θ utilizamos que

$$\ddot{\theta} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta}.$$

Integrando la ecuación anterior y utilizando que $\ddot{\theta} = 2g/R$,

$$\frac{2g}{R} \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta}$$
$$\frac{2g}{R}\theta = \frac{\dot{\theta}^2}{2}.$$

se obtiene que **(0.5 ptos)**

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g\theta}{R}.$$

Remplazando en las ecuaciones de movimiento obtenemos

$$F_r = mg(\sin\theta - 4\theta) \quad \textbf{(0.5 ptos)}.$$
$$N = mg(2 + \cos\theta) \quad \textbf{(0.5 ptos)}.$$

Notar que F_r apunta hacia $-\hat{r}$ para $\theta > 0$ ya que $(\sin\theta - 4\theta) < 0$.

d) Para que no deslice, imponemos que **(0.5 ptos)**

$$|F_r| \leq \mu_e |N|.$$

Remplazando con las fuerzas obtenidas en la parte anterior **(0.25 ptos)**:

$$|mg(\sin\theta - 4\theta)| \leq \mu_e |mg(2 + \cos\theta)|.$$

Para evaluar los valores absolutos utilizamos que $(2 + \cos\theta) > 0$ y que $(\sin\theta - 4\theta) < 0$ si $\theta > 0$. Obtenemos **(0.25 ptos)**:

$$\frac{4\theta - \sin\theta}{2 + \cos\theta} \leq \mu_e.$$

Notando que el valor máximo de $|F_r|$ entre $0 \leq \theta \leq \pi/2$ se alcanza precisamente en $\theta = \pi/2$, la condición se obtiene al evaluar en $\theta = \pi/2$ **(0.5 ptos)**

$$\mu_e \geq \pi - \frac{1}{2}.$$

Durante este problema se otorga todo el puntaje independiente de qué direción se consideró para F_r. Lo importante es ser consistente y llegar a la respuesta correcta.

■