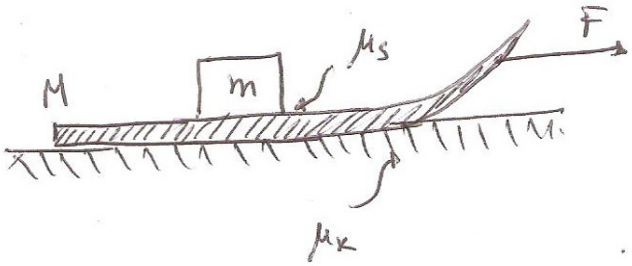
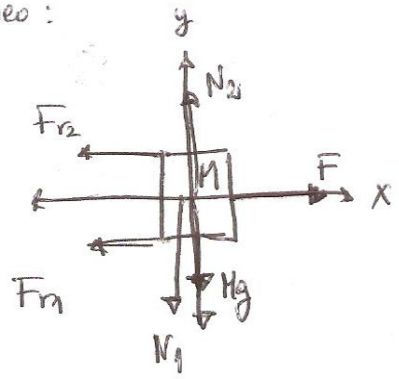
Solución Ayudantía 3

Problema 1



Dibujemos los diagramas de fuerza del triángulo y la masa m.

Triángulo:



N_2: Fuerza que ejerce el suelo sobre M

F: Fuerza externa sobre M.

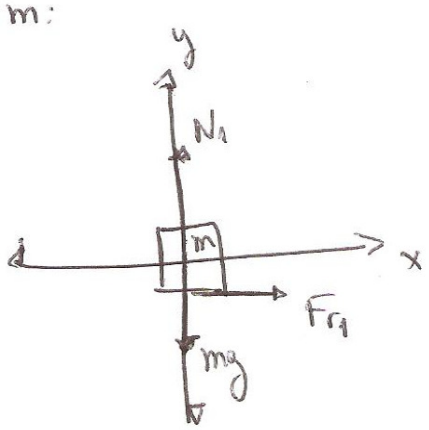
Mg: Peso M.

N_1: Fuerza que ejerce m sobre M.

Fr_2: Fuerza de roce entre M y m.

Fr_1: Fuerza de roce entre M y el suelo.

Masa m:



N_1: Fuerza de M sobre m.

Fr_1: Roce entre M y m.

Si nos fijamos en la masa m, obtenemos que la única fuerza que podría hacer que se mueva la caja es el roce. Por lo tanto para que la caja no se mueva debe seguir habiendo roce estático. Es decir: $F_{r_1} \leq \mu_s m g$.

$\rightarrow$ Como $F_{r_1} = m\ddot{x}$

$\rightarrow$ $m\ddot{x} \leq \mu_s m g$.

Por lo tanto el $\ddot{x}_{max}$ será cuando $F_{r_1} = \mu_s m g$. Es decir:

$$\ddot{x}_{max} = \mu_s g.$$

Ahora, si aplicamos igualación de fuerzas sobre M:

Eje x: $F - F_{r_2} - F_{r_1} = M\ddot{x}$ (1)

Eje y: $N_2 - N_1 + Mg = 0$ (2)

de (2) obtenemos:

$N_2 = N_1 + Mg$ como $N_1 = mg$.

$\rightarrow N_2 = (m+M)g$

Así:

$$F = M\ddot{x} + F_{r_2} + F_{r_1}$$

y $F_{r_2} = \mu_K N_2 = (m+M) g \mu_K$

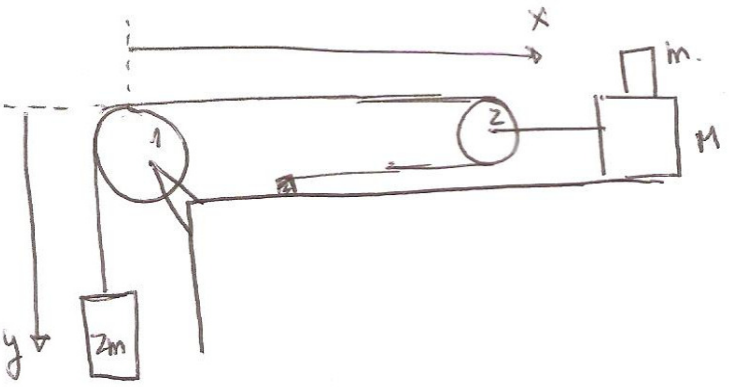
$F_{r_1} = \mu_S N_1 = mg\mu_s$.

y $\ddot{x} = \mu_s g$.

Así: $F = M\mu_s g + (m+M) g \mu_K + mg\mu_s$.

$F = (M+m) g (\mu_K + \mu_s)$ //

Problema 2



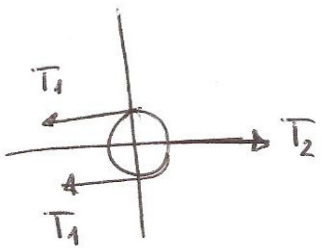
1) Notar que el largo de la cuerda debe ser constante.

Entonces: $2x + y = cte.$

$\rightarrow 2\ddot{x} + \ddot{y} = 0$

$\rightarrow 2\ddot{x} = -\ddot{y}$

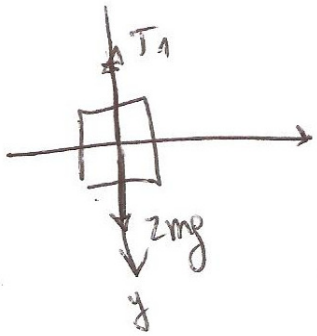
2.- Las fuerzas sobre la polea 2 son:



Entonces.

$2T_1 = T_2$

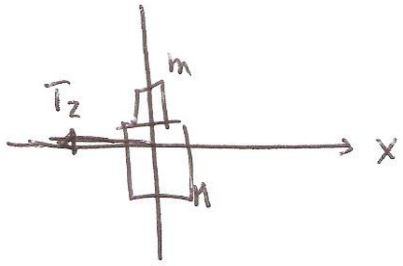
3.-



Tc. de mov.

$2mg - T_1 = 2m\ddot{y}$

Para calcular $\ddot{y}$ utilizemos la ecuación de mov. del sistema M-m.



$$-T_2 = (m+M)\ddot{x} \Rightarrow T_2 = -(m+M)\ddot{x}$$

Así:

$$2T_1 = -(m+M)\ddot{x}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{-(m+M)\ddot{x}}{2}$$

Por lo tanto:

$$2mg + \frac{(m+M)\ddot{x}}{2} = 2m\ddot{y} \qquad \text{Pero } 2\ddot{x} = -\ddot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\ddot{y}}{2}$$

$$\Rightarrow 2mg - \frac{(m+M)\ddot{y}}{4} = 2m\ddot{y}$$

Despejemos $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = g\,\frac{8m}{9m+M}.$$

4.- Si no queremos que m se desplace sobre M, entonces el coeficiente de roce estático debe ser tal que:



$$-F_r = m\ddot{x}$$

$$-\mu_s mg = m\ddot{x} \qquad \text{pero } \ddot{x} = \frac{-\ddot{y}}{2} = -g\,\frac{8m}{9m+M}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\mu_s \cancel{mg} = -\cancel{mg}\,\frac{4}{9m+M}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mu_s^{(mín)} = \frac{4m}{9m+M}$$

Así $\mu_s \geq \frac{4m}{9m+M}.$

Problema 3

Utilizemos coordenadas polares para descubrir el movimiento de la masa m.

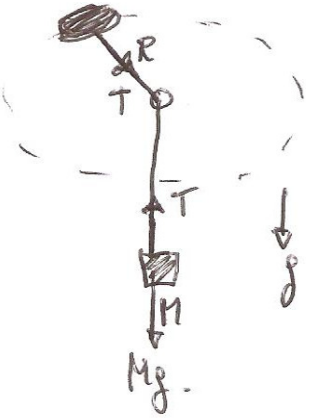
$$\vec{a}_m = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Instanciemos los valores conocidos:

$$\rho = R \qquad \dot{\rho} = 0 \qquad \ddot{\rho} = 0 \quad \leftarrow \text{Pues no cambia el radio.}$$

$$\vec{a}_m = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

Ahora si observemos las fuerzas ~~tangenciales~~ sobre la masa m, podemos ver que no hay fuerza que se ejerce sobre ella:



Entonces aplicando 2da Ley de Newton en el eje angular sobre m:

$$0 = mR\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = cte.$$

Así:

$$\vec{a}_m = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho}$$

Ahora aplicando 2da Ley de Newton en eje radial:

$$-T = -R\dot{\theta}^2 m$$

$$\Rightarrow T = mR\dot{\theta}^2$$

y en la masa M:

$$Mg - T = 0 = M\vec{a}_M \leftarrow \text{que es cero pues debe estar quieta.}$$

$$\Rightarrow T = Mg$$

Reemplazando

$$\Rightarrow Mg = mR\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{Mg}{mR} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Mg}{mR}}}$$

Problema 4

1.- Consideremos que cuando el resorte llega a un largo $l > l_0$, la masa m se mueve en el plano perpendicular a la vertical realizando un movimiento circular con velocidad angular ω. Entonces describamos la aceleración de m en coordenadas polares.

$$\vec{a}_m = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

Instanciemos valores:

$\rho = r = l\sin\theta$. $\phi \rightarrow$ no es necesario

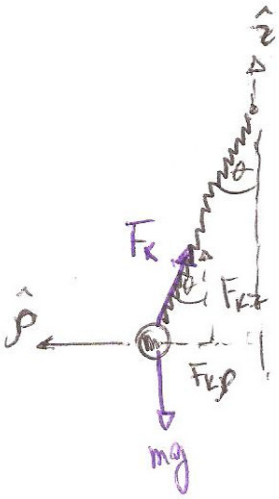
$\dot{\rho} = 0$ $\quad\quad$ $\dot{\phi} = \omega = cte.$

$\ddot{\rho} = 0$ $\quad\quad$ $\ddot{\phi} = 0$

Así

$$\vec{a}_m = -l\sin\theta\,\omega^2\hat{\rho}$$

Ahora analizemos las fuerzas presentes en m.



Separemos en las componentes F_z y F_r.

$$\vec{F} = F_{Kz}\hat{z} - mg\hat{z} - F_{K\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{F} = F_K\cos\theta\,\hat{z} - mg\hat{z} - F_K\sin\theta\,\hat{\rho}$$

Pero $F_K = K(l - l_0)$

$$\vec{F} = K(l-l_0)\cos\theta\,\hat{z} - mg\hat{z} - K(l-l_0)\sin\theta\,\hat{\rho}$$

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton para ambas coordenadas.

Eje ρ: $-k(l-l_0)\sin\theta = -F_c$ con $F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 l\sin\theta$.

$$k(l-l_0)\sin\theta = m\omega^2 l\sin\theta$$

$$k(l-l_0) = m\omega^2 l \quad (1)$$

Eje z: $k(l-l_0)\cos\theta - mg = 0 = m\vec{a}_z$ ← es cero. (2)

De (1) despejemos l:

$$kl - m\omega^2 l = kl_0$$

$$\Rightarrow l(k - m\omega^2) = kl_0$$

$$\rightarrow \boxed{l = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}}$$

2.- y reemplazando l en (2):

$$\cos\theta = \frac{mg}{k(l-l_0)}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{k\left(\frac{kl_0}{k-m\omega^2} - l_0\right)} = \frac{mg}{k\left(\frac{l_0 m\omega^2}{k-m\omega^2}\right)}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{g(k-m\omega^2)}{kl_0\omega^2}}$$