PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Interrogación 03

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

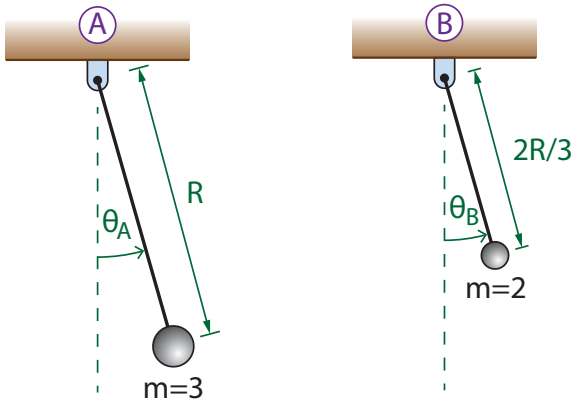
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** $1/4$ **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

Los dos péndulos de la Figura oscilan con $\theta_A \gtrsim 0$ y $\theta_B \gtrsim 0$ (ángulos pequeños). La razón entre las amplitudes máximas de ambos es $[\theta_A]_{\max} / [\theta_B]_{\max} = 2/3$. El péndulo A tarda T_A en hacer una oscilación completa; mientras que el péndulo B tarda T_B.
Determine la razón entre T_A/T_B.



a) $\dfrac{T_A}{T_B} = 1$

b) $\dfrac{T_A}{T_B} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

c) $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{T_A}{T_B} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

e) $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{3}{2}$

Solución
Un péndulo de ángulos $\theta \gtrsim 0$ se comporta como un oscilador armónico con frecuencia:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{con: } \ell \text{ el largo del péndulo}$$

El período de un oscilador es $T_n = 1/f_n = 2\pi/\omega_n$. Los períodos de ambos osciladores son:

$$[T_n]_A = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad [T_n]_B = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}}$$

, y con ello la razón entre los períodos es:

$$\frac{[T_n]_A}{[T_n]_B} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Problema 2 [1 punto]

El sistema resorte–masas de la figura se encuentra inicialmente en reposo. En el instante $t = 0$ se corta la cuerda que une ambas masas tras lo cual el sistema comienza a oscilar en torno a un nuevo punto de equilibrio. Asuma que el resorte tiene masa despreciable y que $g = 10\,m/s^2$.

Determine la rapidez (magnitud de velocidad) del sistema cuando $t = \dfrac{\pi}{2}$ segundos.

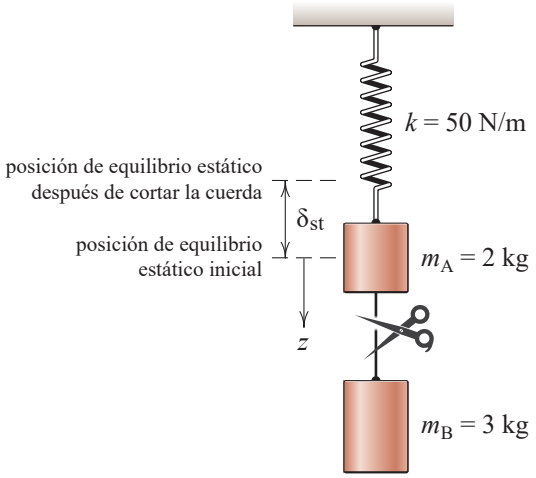
a) $\left| v\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right) \right| = 0$

b) $\left| v\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right) \right| = 3\,m/s$

c) $\left| v\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right) \right| = 5\,m/s$

d) $\left| v\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right) \right| = 15\,m/s$

e) $\left| v\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right) \right| = 25\,m/s$



Solución

Una vez que se corta la cuerda, el sistema se comporta como un oscilador armónico con:

$$x_0 = \delta_{\text{st}} = \frac{3g}{k} = \frac{3}{5} \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_0 = 0$$

La frecuencia natural circular del oscilador es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5\,rad/s$$

La ecuación del oscilador es:

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) \qquad \text{con:} \quad A = x_0 \quad \text{y} \quad B = \dot{x}_0/\omega_n$$

$$x(t) = \frac{3}{5}\cos(5t)$$

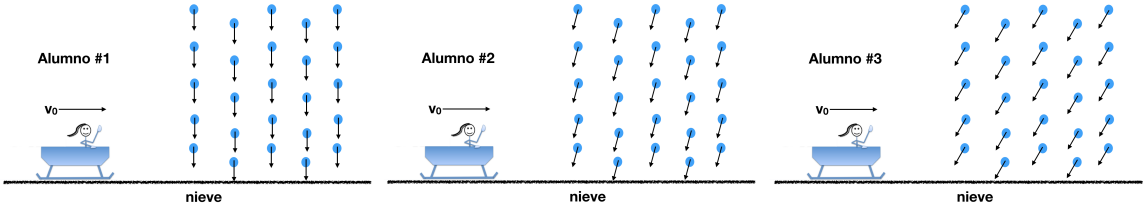
La velocidad del oscilador es:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\delta_{\text{st}}\omega_n \sin(\omega_n t) = -\left(\frac{3}{5}\right)(5)\sin(\omega_n t) = -3\sin(5t)$$

$$\rightarrow \quad v\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\,m/s$$

Problema 3 [1 punto]

Tres alumnos de *Estática y Dinámica*, todos de igual masa, viajan cada uno en su propio trineo a velocidad constante v_0 en un plano horizontal. No hay roce entre los trineos y la superficie. Los trineos no cuentan con ningún tipo de propulsión.
Los trineos ingresan a una zona donde cae nieve. En los tres casos la nieve cae con la misma rapidez v, y se acumula en los trineos a una misma tasa $\dot{m}$: para el primer alumno la nieve cae en la dirección vertical; para el segundo alumno cae con ángulo de 15° respecto a la vertical; y para el tercer alumno con ángulo de 30°.
Llamando v_n a la velocidad horizontal del alumno $\#n$ (hacia la derecha), seleccione la afirmación correcta:



a) Después de haber viajado el mismo tiempo bajo la nieve, $v_3 = v_2 = v_1 = v_0$

b) Después de haber viajado el mismo tiempo bajo la nieve, $v_3 > v_2 > v_1$, donde $v_1 = v_0$

c) Después de haber viajado el mismo tiempo bajo la nieve, $v_3 < v_2 < v_1$, donde $v_1 = v_0$

d) Después de haber viajado el mismo tiempo bajo la nieve, $v_3 > v_2 > v_1$, donde $v_1 < v_0$

e) Después de haber viajado el mismo tiempo bajo la nieve, $v_3 < v_2 < v_1$, donde $v_1 < v_0$

Solución
El sistema alumno + trineo es un sistema que gana masa: la velocidad necesariamente debe disminuir para mantener la *cantidad de movimiento* (momentum) del trineo + persona + nieve. La componente "x" de la nieve (contraria al movimiento del trineo) generará además un impulso que ralentizará aún más el sistema. Es decir:

$$v_1 > v_2 > v_3 \qquad \text{y} \qquad v_1 < v_0$$

Lo que constituye un análisis cualitativo válido. Lo mismo se puede concluir de las ecuaciones (pero con mayor dificultad). En la dirección x (dirección de movimiento del trineo) se tiene:

$$f_x = m\,\dot{v} + v_{\mathrm{t/n}}\,\dot{m}$$

En este problema la velocidad relativa está dada por $v_{\mathrm{t/n}} = v + v_{\mathrm{nieve_x}}$. Asumiendo que $\dot{m} = \alpha = \text{cte}$, tenemos que $m\,(t) = m_0 + \alpha\,t$, y entonces:

$$0 = [m_0 + \alpha\,t]\,\dot{v} + (v + v_{\mathrm{nieve_x}})\,\alpha \qquad \rightarrow \qquad \dot{v} = -\left[\frac{v + v_{\mathrm{nieve_x}}}{m_0 + \alpha t}\right]\alpha$$

En este punto es posible notar que la velocidad decrece más rápidamente cuanto mayor sea $v_{\mathrm{nieve_x}}$ ($\dot{v}$ es la aceleración): suficiente para deducir la solución correcta. En caso que todavía no sea evidente, por separación de variables y la condición inicial $v\,(t=0) = v_0$ se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v + v_{\mathrm{nieve_x}}} = -\frac{\alpha \cdot \mathrm{d}t}{m_0 + \alpha t} \qquad \rightarrow \qquad \ln\left(v + v_{\mathrm{nieve_x}}\right) = -\ln\left(m_0 + \alpha t\right) + C_1$$

$$\ln\left(v + v_{\mathrm{nieve_x}}\right) = \ln\left(\frac{A}{m_0 + \alpha t}\right) \qquad \rightarrow \qquad v\,(t) = \frac{A}{m_0 + \alpha t} - v_{\mathrm{nieve_x}}$$

$$v\,(t=0) \quad \rightarrow \quad A = m_0\,(v_0 + v_{\mathrm{nieve_x}}) \qquad \rightarrow \qquad v\,(t) = \frac{m_0 v_0 - \alpha v_{\mathrm{nieve_x}} t}{m_0 + \alpha t}$$

Donde nuevamente se puede ver que la velocidad decrece más rapidamente en el tiempo cuanto mayor sea $v_{\mathrm{nieve_x}}$. Es decir:

$$v_1 > v_2 > v_3 \qquad \text{y} \qquad v_1 < v_0$$

Problema 4 [1 punto]

El elevador mostrado en la figura levanta una carga total de 30 kg. El motor M tira de la cuerda con una fuerza que varía en el tiempo según $T = 10t + 110$, donde T está en Newtons y t en segundos. Determine la potencia que realiza el motor en $t = 1$ s, considerando que la carga parte del reposo en $t = 0$. Asuma $g = 10$ m/s^2, y que las poleas y cuerdas son *ideales* (sin masa).

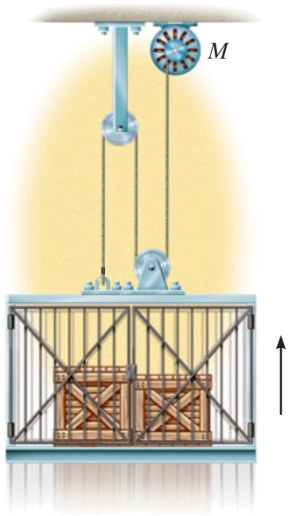
a) 0 W

b) 180 W

c) 360 W

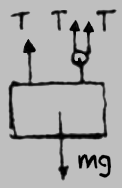
d) 540 W

e) 720 W



Solución

El diagrama de cuerpo libre para la caja es:



Orientando el eje y hacia arriba, nos queda que:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y \quad &: \quad 3T - mg = ma \\ a \quad &= \quad \frac{3T}{m} - g = 3\frac{10t + 110}{30} - 10 = t + 1 \end{aligned}$$

Obtenemos la velocidad de la carga en $t = 1$ planteando $a = dv/dt$, separando variables e integrando ambos lados:

$$\begin{aligned} \int_0^{v(1)} dv \quad &= \quad \int_0^1 t + 1 = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 \\ v(1) \quad &= \quad \frac{3}{2} \text{ m/s} \end{aligned}$$

La tensión en $t = 1$ s es $T(1) = 10(1) + 110 = 120$ N. La potencia hecha sobre la caja en $t = 1$ es entonces $P(1) = [3 \cdot T(1)]\,[v(1)] = 540$ W, la cual viene enteramente del motor.
Otra forma de razonar es hacer la condición de ligadura y notar que la velocidad de un punto sobre la cuerda abajo del motor es 3 veces mayor que la velocidad de la caja, por lo que $P(1) = T(1) \cdot [3 \cdot v(1)]$ y llegamos al mismo resultado.

Problema 5 [1 punto]

Los discos de hockey se mantienen congelados hasta que se usan en los partidos. Cuando se deja caer un disco a temperatura ambiente desde una altura de 100 cm, éste rebota alcanzando una altura de 20 cm. Si un disco congelado tiene solo la mitad del coeficiente de restitución de uno a temperatura ambiente, la altura que alcanzará el disco congelado al caer desde la misma altura (100 cm) es:

a) $40\ cm$

b) $20\sqrt{2}\ cm$

c) $10\ cm$

d) $20/\sqrt{2}\ cm$

e) $5\ cm$

Solución

Para obtener la rapidez del disco justo antes de la colisión aplicamos conservación de energía mecánica:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_{d_i}^2 \Rightarrow v_{d_i} = \sqrt{2gh_0}$$

El coeficiente de restitución relaciona la velocidad del disco antes y después de la colisión con el piso. Considerando que el piso está en reposo, y que el sentido del eje y es positivo hacia arriba, de manera que $\vec{v}_{d_i} = -v_{d_i}\hat{j}$, tendremos:

$$e = \frac{\vec{v}_{d_f} - \cancel{\vec{v}_{p_f}}}{\cancel{\vec{v}_{p_i}} - \vec{v}_{d_i}} = \frac{v_{d_f}}{v_{d_i}} \Rightarrow v_{d_f} = ev_{d_i}$$

Tras la colisión, el disco alcanzará una altura que calculamos aplicando conservación de energía de nuevo:

$$\frac{1}{2}mv_{d_f}^2 = mgh_f \Rightarrow h_f = \frac{v_{d_f}^2}{2g}$$

Utilizando las relaciones entre la velocidad del disco antes y después de la colisión y la altura inicial tendremos:

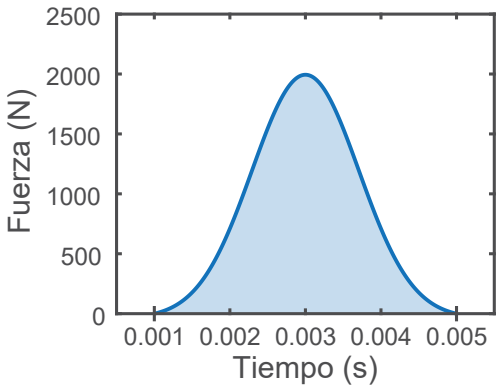
$$h_f = \frac{v_{d_f}^2}{2g} = \frac{e^2 v_{d_i}^2}{2g} = e^2 h_0$$

Según el enunciado, a temperatura ambiente $h_f = 20cm$. Si cuando está congelado el coeficiente de restitución disminuye a la mitad, la altura que alcanzará en este estado será:

$$h_{f_{congelado}} = (\frac{e}{2})^2 h_0 = \frac{e^2 h_0}{4} = \frac{20\ cm}{4} = 5\ cm$$

Problema 6 [1 punto]

Una pelota de tenis llega a la raqueta de un jugador con una rapidez de 20 m/s. Tras golpear la pelota, ésta sale con una rapidez de 40 m/s hacia el campo contrario. La fuerza aplicada sobre la pelota en función del tiempo se muestra en la Figura. Considerando que la pelota tiene una masa de 60 g y que llega y sale en la dirección horizontal, la fuerza promedio ejercida sobre la pelota durante el impacto es aproximadamente:



a) 2000 N

b) 500 N

c) 900 N

d) 1000 N

e) 360 N

Solución

Según el teorema impulso–momentum:

$$\vec{J} = \int \vec{F}(t) \cdot dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

El impulso es equivalente al producto de la fuerza promedio y el intervalo de tiempo que dura el impacto:

$$\vec{J} = \int \vec{F}(t) \cdot dt = \overline{\vec{F}} \Delta t$$

Considerando el momentum inicial y final de la pelota, el impulso que recibe es:

$$\overline{\vec{F}} \Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = 0{,}06kg\ (40 - (-20))m/s = 3{,}6\ N \cdot s$$

Además, en la figura se observa que la fuerza se aplicó desde $t = 1\ ms$ hasta $t = 5\ ms$, es decir, $\Delta t = 4\ ms$, por tanto:

$$\overline{\vec{F}} = \frac{3{,}6\ N \cdot s}{4 \cdot 10^{-3} s} = 900\ N$$

Nombre: _____

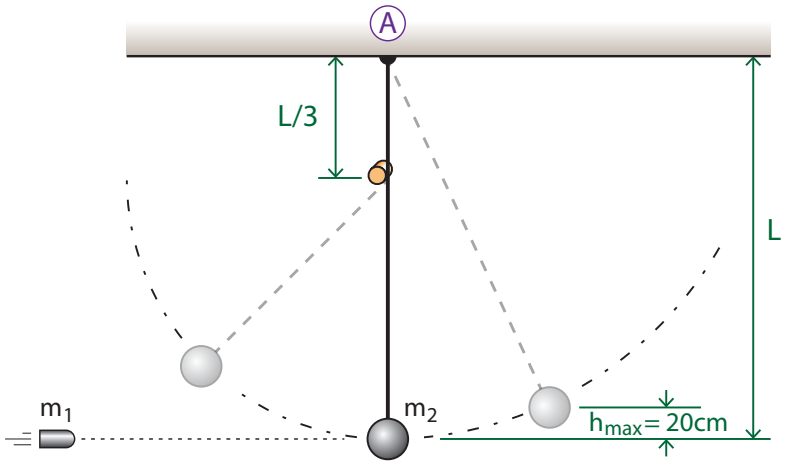
RUT: _____

N lista: _____

Problema 1 [7 puntos]

Un péndulo *ideal*[1] que oscila con ángulos pequeños[2] de largo $L = 12\,m$ y masa $m_2 = 10\,kg$ cuelga en su posición de equilibrio (reposo) sin oscilar. Una bala de masa $m_1 = 100\,gr$ impacta el péndulo por el lado izquierdo quedando incrustado en éste. Producto el impacto el péndulo se mueve hasta llegar a una altura máxima $h_{\max} = 20\,cm$ (altura medida respecto a su posición de equilibrio), y continúa su movimiento de forma armónica. Un clavo (pin o vástago) en el lado izquierdo se encuentra a una distancia vertical $L/3$ al punto A, chocando con el péndulo cada vez que éste oscila hacia el lado izquierdo.

Nota: Asuma que $g = 10\,m/s^2$.



Se pide determinar:

a) La velocidad v_1 de la bala antes del impacto. [3 puntos]

b) El período de oscilación del péndulo[3]. [2 puntos]

c) La velocidad (tangencial) del péndulo/oscilador al pasar por el punto más bajo de su trayectoria. [1 punto]

d) La tensión en la cuerda (o hilo) el instante previo a golpear el vástago (punto más bajo de su trayectoria). [1 punto]

Nota: El puntaje de esta pregunta vale el 58,3 % del ítem de desarrollo.

[1] Llamado también péndulo *simple* o *matemático*.
[2] Es decir: $\theta \gtrsim 0$ lo que implica que $\sin(\theta) \approx \theta$.
[3] Notar que el movimiento del péndulo tiene 2 fases (lado izquierdo y derecho).

1.1. Solución

Parte (a)

En esta colisión no se conserva la energía cinética (choque totalmente inelástico/plástico).

Con el "Teorema de Impulso–Momentum" se tiene que:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_{\max} \qquad (*)$$

, donde $v_{\max}$ es a velocidad del péndulo justo después del impacto. **[1 punto]**

Para la oscilación del péndulo después del impacto del teorema de conservación de la energía se tiene que:

$$(m_1 + m_2) \cdot h_{\max} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot v_{\max}^2$$
$$\rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{\max}} \qquad \textbf{[1 punto]}$$

, donde reemplazando $v_{\max}$ de la ecuación (*) se obtiene:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{\max}} = \frac{0{,}1 + 10}{0{,}1} \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}2}$$
$$v_1 = 101 \cdot 2 = 202\, m/s \quad \text{(velocidad del proyectil)} \qquad \textbf{[1 punto]}$$

Parte (b)

El periodo natural de la fase del lado derecho es:

$$T_{\text{derecho}}\,(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \textbf{[0.5 puntos]}$$

, y lo mismo para la fase del lado izquierdo:

$$T_{\text{izquierdo}}\left(\frac{2}{3}L\right) = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad \textbf{[0.5 puntos]}$$

Con ello, el periodo total de la oscilación del péndulo es:

$$T_{\text{total}} = \frac{1}{2}T_{\text{derecho}} + \frac{1}{2}T_{\text{izquierdo}} = \pi\left(\sqrt{\frac{L}{g}} + \sqrt{\frac{2L}{3g}}\right)$$
$$T_{\text{total}} = \pi\left(\sqrt{\frac{12}{10}} + \sqrt{\frac{24}{30}}\right) \approx 6{,}25\, s \qquad \textbf{[1 punto]}$$

Parte (c)

La velocidad tangencial máxima ocurre en la altura mínima de la masa (por conservación de energía), la que es independiente de si se acerca por la derecha (largo del péndulo L) o izquierda (largo del péndulo $^{2L}/_{3}$):

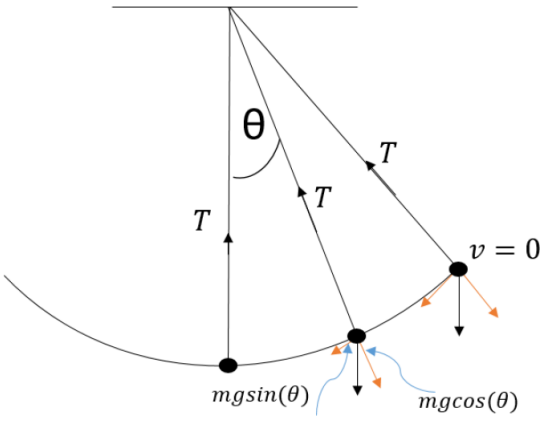
$$v_{\text{tangencial}} = v_{\max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{\max}} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}2} = 2\, m/s \qquad \textbf{[1 punto]}$$

Parte (d)

La tensión en la cuerda es:

$$T = mg\cos(\theta) + m\, a_c$$

, donde $m = m_1 + m_2$, y $a_c = v^2/L = 2gh_{\max}/L$.



En la posición mínima ($\theta = 0$) vale:

$$T - mg = m\frac{v^2}{L} = m\frac{2gh_{\max}}{L} \qquad \textbf{[0.6 puntos]}$$

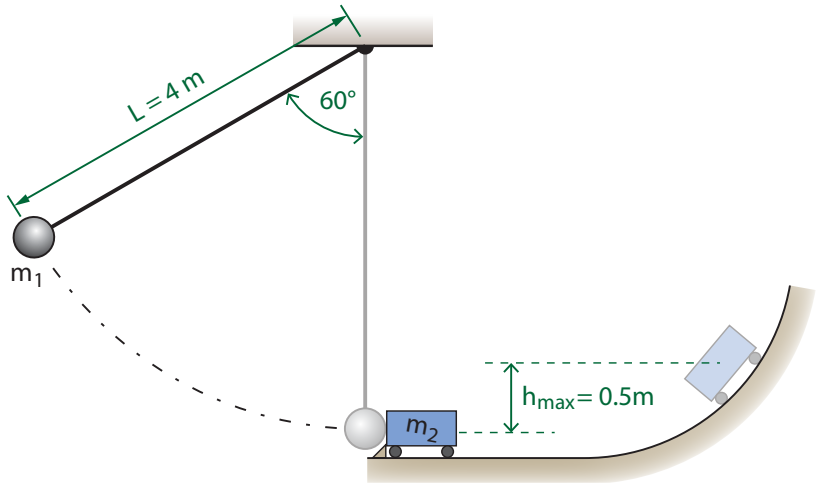
$$T = mg\left(\frac{2gh_{\max}}{L} + 1\right) \qquad \textbf{[0.2 puntos]}$$

$$T = 10{,}1\,kg \cdot 10 + \left(\frac{10{,}1\,kg}{12\,m}\right)(2\,m/s)^2 = 101\,N + 3{,}3\,N = 104{,}3\,N \qquad \textbf{[0.2 puntos]}$$

Nota: por conservación de energía el péndulo llega a la misma altura máxima $h_{\max}$ por ambos lados. La energía potencial en ambos casos (péndulo de largos L y $\frac{2L}{3}$) se convierte totalmente en energía cinética en su punto más bajo. Esta transformación (de energía) es un proceso continuo. Sin embargo, la fuerza de tensión aumenta bruscamente (*salta*) en el instante en que el largo del péndulo cambia de L a $\frac{2L}{3}$. Es decir, la tensión aumenta bruscamente al pasar al lado izquierdo del punto mínimo.

Problema 2 [5 puntos]

Un péndulo *ideal*[4] de longitud $L = 4\,m$ y masa $m_1 = 10\,kg$ se suelta desde una posición inicial de $\theta_0 = 60°$ con velocidad nula. En su punto más bajo (péndulo en posición vertical, i.e. $\theta = 0$) la masa m_1 impacta contra la masa $m_2 = 20\,kg$ inicialmente en reposo sobre una superficie curva sin roce. Debido al impacto, la masa m_2 se mueve por dicha superficie hasta alcanzar una altura máxima $h_{\max} = 0{,}5\,m$ por sobre su posición inicial.



Se pide determinar:

a) El coeficiente de restitución e del impacto entre m_1 y m_2. [4 puntos]

b) La pérdida de energía mecánica [1 puntos]

Nota: El puntaje de esta pregunta vale el 41,7 % del ítem de desarrollo.

[4] Llamado también péndulo *simple* o *matemático*.

2.1. Solución

Parte (a) Cálculo del coeficiente de restitución
Fase 1: movimiento pendular masa m_1
Por conservación de energía:

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^i\right)^2$$
$$v_1^i = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{10}\, m/s \qquad \textbf{[1.0 punto]} \tag{1}$$

Fase 2: impacto
En el impacto hay conservación de mometum (conservación de cantidad de movimiento) en la dirección horizontal:

$$m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f$$
$$m_1 v_1^i + 0 = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f \qquad \textbf{[0.5 puntos]} \tag{2}$$

El coeficiente de restitución es:

$$e = -\frac{v_2^f - v_1^f}{v_2^i - v_1^i} = \frac{v_2^f - v_1^f}{v_1^i} \qquad \textbf{[0.5 puntos]} \tag{3}$$

Fase 3: subida de masa m_2 por superficie curva
Por conservación de energía:

$$\frac{1}{2} m_2 \left(v_2^f\right)^2 = m_2 g h$$
$$v_2^f = \sqrt{2gh} = \sqrt{10}\, m/s \qquad \textbf{[0.5 puntos]} \tag{4}$$

Reemplazando la ecuación (4) en la (2):

$$v_1^f = v_1^i - \frac{m_2}{m_1} v_2^f = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = 0 \qquad \textbf{[0.5 puntos]} \tag{5}$$

Reemplazando la ecuación (5) en la (3):

$$e = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{[1.0 punto]} \tag{6}$$

Parte (b)

La energía antes del impacto es igual a:

$$E^i = m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^i\right)^2 = 10\, kg \cdot 10\, \frac{m}{s^2} \cdot 2\, m = 200\, J$$

En este caso, la energía el instante después del impacto es puramente cinética:

$$E^f = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^f\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_2^f\right)^2 = 0 + m_2 g h_2 = 20\, kg \cdot 10\, \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5\, m = 100\, J$$

Finalmente, la pérdida de energía es:

$$\Delta E = E^i - E^f = 200\, J - 100\, J = 100\, J \qquad \textbf{[1.0 punto]}$$