Interrogación 1

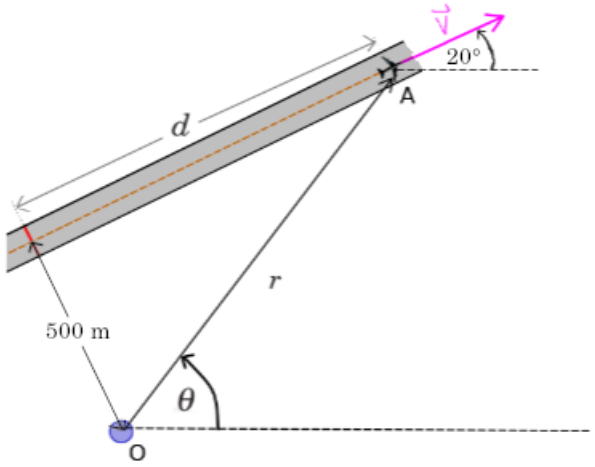
Fecha: 14 de Septiembre 2022

1. El radar de la torre de control de un aeropuerto ubicada en O, es usada para el sistema de control de tráfico aereo. La torre se encuentre a 500 m del punto de partida de la pista. En el instante en que un avión pasa por el punto A en su carrera de despegue, el radar mide que éste se encuentra en $\theta = 50°$ y que se aleja radialmente de la torre a $\dot{r} = 140$ m/s.

   a) Con los datos entregados encuentre la longitud de r y d cuando el avión pasa por A. (1 pt.)

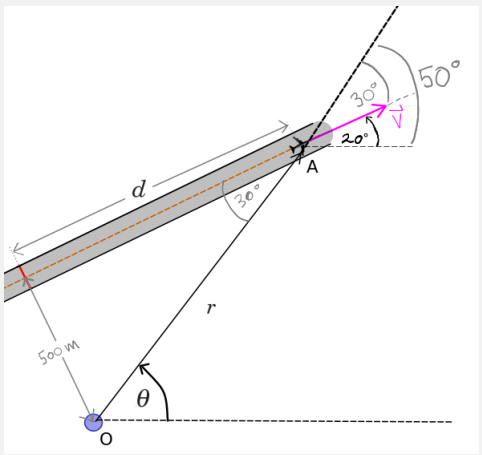
   b) Determine la rapidez v con la que se mueve el avión en el punto A. (3 pts.)

   c) Determine la velocidad en A, medida desde O usando coordenadas polares. (2 pts.)



a) Con los datos entregados encuentre la longitud de r y d cuando el avión pasa por A.

Solución: Con la información dada es posible encontrar el ángulo $\alpha = 30°$



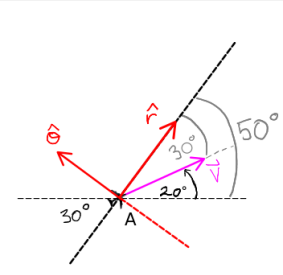
Por lo que:

$$\text{sen}(30°) = \frac{1}{2} = \frac{500\text{m}}{r} \rightarrow r = 1000\text{m} \qquad \text{y} \qquad \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{r} \rightarrow d = 500\sqrt{3}\text{m}$$

■

b) Determine la rapidez con la que se mueve el avión en el punto A.
Solución: Al proyectar $\vec{v}$ en los ejes unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ se encuentran las componentes radial y tangencial de $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{1}$$



Y con la información dada para $\dot{r}$ se puede encontrar la rapidez v:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_r \\ \dot{r} &= v\cos 30^\circ \\ 140\frac{m}{s} &= v\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v &= \frac{280}{\sqrt{3}}\frac{m}{s} \end{aligned} \tag{2}$$

c) Determine la velocidad en A, medida desde O usando coordenadas polares.
Solución: Al revisar la ecuación (1) se ve que:

$$r\dot{\theta} = v_\theta$$

Y proyectando v en el eje $\hat{\theta}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} &= v_\theta \\ r\dot{\theta} &= -v \text{ sen } 30^\circ \\ r\dot{\theta} &= -\frac{280}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1}}{2}\frac{m}{s} \\ r\dot{\theta} &= -\frac{140}{\sqrt{3}}\frac{m}{s} \end{aligned} \tag{3}$$

Con lo que:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 140\frac{m}{s}\hat{r} - \frac{140}{\sqrt{3}}\frac{m}{s}\hat{\theta}$$

■

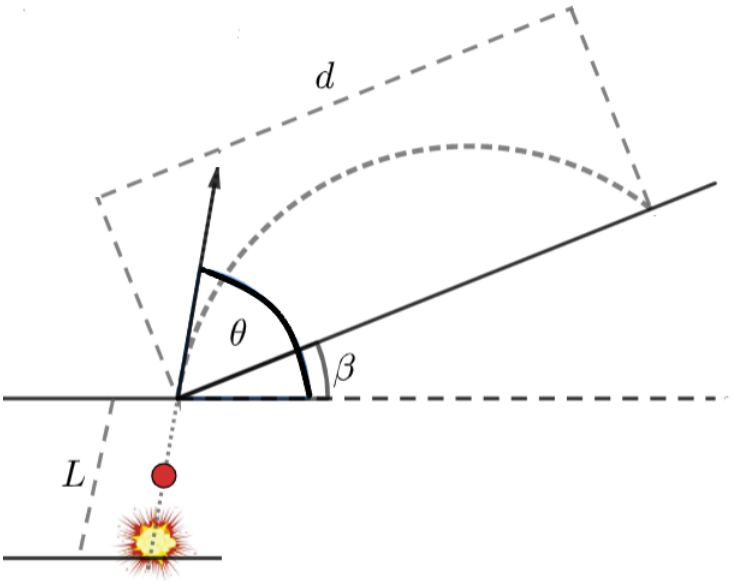
2. Suponga que cierto mecanismo militar puede lanzar proyectiles de forma subterránea y rectilínea, tal que el proyectil lanzado sigue la siguiente ley de aceleración:

   - La aceleración es proporcional a la velocidad, siempre y cuando el misil siga bajo tierra (considere a k como la constante de proporcionalidad).
   - Una vez que el proyectil sale a la superficie, la aceleración es la de la gravedad.

   Ahora, suponga que el mecanismo es instalado al pie de una colina con pendiente β, tal que los misiles salen disparados con un ángulo θ con respecto a la horizontal. Si al momento de ser disparado el proyectil, este parte con una rapidez v_0 y recorre de forma rectilínea una distancia L,

   a) Encuentre el alcance máximo d del misil sobre la colina. (4 pts.)

   b) Encuentre la magnitud de la velocidad con la que el proyectil golpea a la colina. (2 pts.)



Ayuda: Recuerde que:
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

a) El problema se divide en dos partes: una en donde el movimiento es rectilíneo (el misil bajo tierra) y otra cuando sale a la superficie, en donde el movimiento es parabólico.
Para el primer trayecto, poniendo un sistema de referencia cuyo eje positivo apunte en la dirección de movimiento de la bala, según el problema se tiene que:

$$a = kv,$$

y por lo tanto

$$\frac{dv}{dt} = kv \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = k\int_0^t dt \rightarrow \ln v - \ln v_0 = kt.$$

Así

$$v(t) = v_0\, e^{kt}.$$

De forma similar:

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{kt} dt \rightarrow x(t) = \frac{v_0}{k} e^{kt}.$$

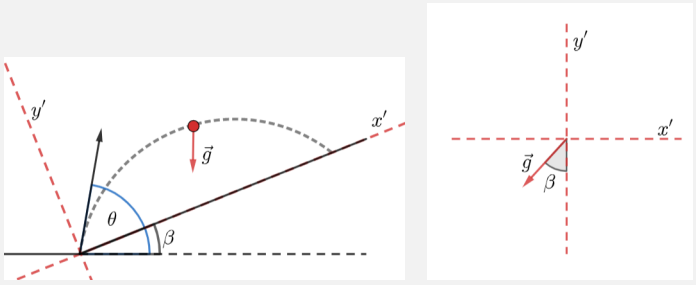
Ahora, se necesita saber la velocidad de salida del proyectil, cuando éste ha recorrido una distancia L. Para ello, hallamos el tiempo de dicho recorrido:

$$L = \frac{v_0}{k} e^{kt_1} \rightarrow t_1 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{kL}{v_0}\right).$$

Entonces, reemplazando en la expresión de la velocidad:

$$v(t_1) = v_0 \exp\left[k \cdot \frac{1}{k} \ln\left(\frac{kL}{v_0}\right)\right] = kL,$$

la cual será la velocidad inicial del proyectil una vez que salga a la superficie.
El segundo trayecto corresponde a un tiro parabólico. Para analizarlo, conviene definir nuevos ejes coordenados, tal que la dirección positiva x' coincida con la colina, tal y como se muestra en la figura:



En este trayecto, según el planteamiento del problema, la aceleración siempre será la de la gravedad, que tiene dirección y magnitud constantes. En el nuevo sistema de referencia, el vector de gravedad tendrá la dirección que se muestra en la figura.
Así, en este sistema, la aceleración tendrá dos componentes:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= -g\sin\beta \\ a_{y'} &= -g\cos\beta. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\theta' = \theta - \beta$ el ángulo que forma la velocidad inicial con el plano inclinado, tal que las componentes de la velocidad en el sistema de referencia $x' - y'$ son:

$$\begin{aligned} v_{0x'} &= v_0\cos\theta' = kL\cos\theta' \\ v_{0y'} &= v_0\sin\theta' = kL\sin\theta'. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores implican que tanto para x' como para y' hay movimientos uniformemente acelerados, tal que la ecuación para la coordenada y' es:

$$y' = v_{0y'}t + \frac{1}{2}a_{y'}t^2 = kL\sin\theta' t - \frac{1}{2}g\cos\beta t^2.$$

■

Como se está buscando el punto en donde el proyectil choca con el plano, es decir $y' = 0$, se tiene que esto se da en el tiempo dado por:

$$kL\sin\theta' t - \frac{1}{2}g\cos\beta t^2 = 0 \rightarrow t = 0 \ \wedge \ t = \frac{2kL\sin\theta'}{g\cos\beta}.$$

Elegimos el segundo tiempo y lo reemplazamos en la ecuación que da la posición a lo largo del eje x', es decir,

$$x' = v_{0x'}t + \frac{1}{2}a_{x'}t^2 = kL\cos\theta' t - \frac{1}{2}g\sin\beta t^2,$$

en la cual $x' = d$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d &= kL\cos\theta'\left(\frac{2kL\sin\theta'}{g\cos\beta}\right) - \frac{1}{2}g\sin\beta\left(\frac{2kL\sin\theta'}{g\cos\beta}\right)^2 \\ &= \frac{2k^2L^2}{g\cos^2\beta}\sin\theta'\left(\cos\theta'\cos\beta - \sin\theta'\sin\beta\right). \end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b,$$

se tiene que

$$d = \frac{2k^2L^2\sin\theta'\cos(\theta'+\beta)}{g\cos^2\beta}.$$

Finalmente, reemplazando $\theta' = \theta - \beta$, se obtiene el resultado pedido:

$$d = \frac{2k^2L^2\cos\theta\sin(\theta-\beta)}{g\cos^2\beta}.$$

b) Para hallar la velocidad con la que el proyectil golpea a la colina, reemplazamos el tiempo de vuelo calculado en las expresiones de las velocidades. Dichas ecuaciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v_{0x'} + a_{x'}t = kL\cos\theta' - g\sin\beta t \\ v_{y'} &= v_{0y'} + a_{y'}t = kL\sin\theta' - g\cos\beta t. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= kL\cos\theta' - g\sin\beta\left(\frac{2kL\sin\theta'}{g\cos\beta}\right) \\ &= \frac{kL}{\cos\beta}\left(\cos\theta'\cos\beta - 2\sin\theta'\sin\beta\right) \\ &= kL\left(\cos\theta' - 2\sin\theta'\tan\beta\right) \\ v_{y'} &= kL\sin\theta' - g\cos\beta\left(\frac{2kL\sin\theta'}{g\cos\beta}\right) = -kL\sin\theta'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la magntud de la velocidad será:

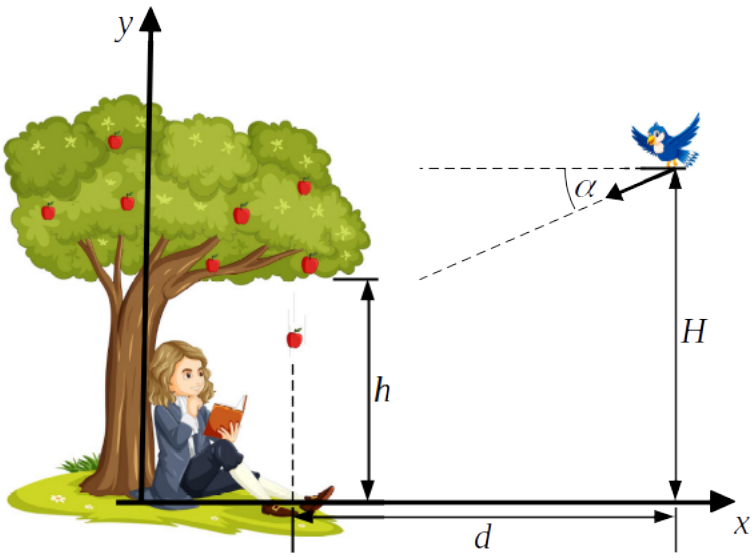
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2} \\ &= kL\sqrt{(\cos\theta' - 2\sin\theta'\tan\beta)^2 + \sin^2\theta'}. \end{aligned}$$

Reemplazando $\theta' = \theta - \beta$:

$$v = kL\sqrt{[\cos(\theta-\beta) - 2\sin(\theta-\beta)\tan\beta]^2 + \sin^2(\theta-\beta)}.$$

■

3. Desde la rama de un árbol ubicada a una altura h del suelo, en el tiempo t=0, se desprende una manzana de tal forma que cae libremente. Justo bajo ella se encuentra Isaac Newton leyendo su novela favorita. Cuando ha transcurrido un tiempo $t = t_0$, Newton, desde su punto de vista, se percata de la posición de la manzana mientras cae. Además, en el mismo instante, observa a un ave, a una altura H del suelo, que vuela en forma rectilínea con una rapidez constante, v_{AN}, formando un ángulo α con la horizontal y en el sentido donde la manzana va cayendo (ver figura). Considere que en el tiempo $t = t_0$ la distancia horizontal entre la manzana y el ave es conocida y de valor d. Para simplificar el análisis, suponga que Newton es un punto en reposo situado en el origen del sistema coordenado (ver figura).



Primero suponga que los valores t_0, v_{AN}, α, d, h, H y la gravedad g son conocidos. Determine:

a) La expresión para la posición en función del tiempo de la manzana respecto al ave para tiempos mayores a t_0. (3 pts.)

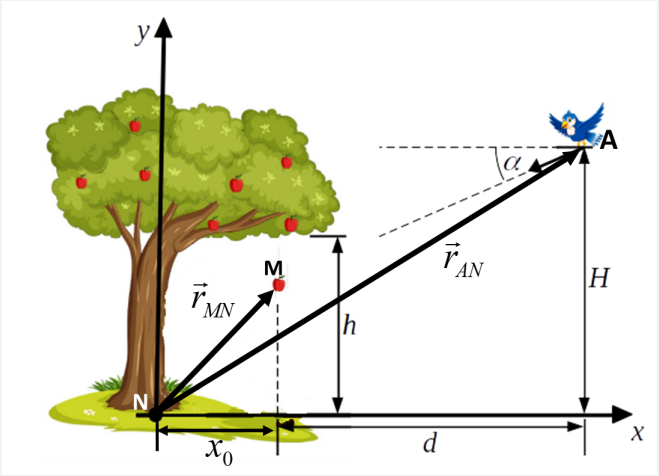
b) La expresión para la velocidad en función del tiempo del ave respecto a la manzana para tiempos mayores a t_0. (1 pts.)

Suponga ahora que el valor de H es desconocido.

c) Si el ave ataja la manzana en la caída antes de chocar el suelo: ¿cuál es la altura H inicial del ave? ¿cuál es la velocidad del ave respecto a la manzana cuando es atajada? Exprese sus resultados en función de α, d, g, v_{AN}, t_0 y h. (2 pts.)

Solución:

a) La expresión para la posición en función del tiempo de la manzana respecto al ave para tiempos mayores a t_0.



En la figura se muestra los vectores posición de la manzana (M) y del ave (A) respecto a la posición de Newton (N), es decir $\vec{r}_{MN}$ y $\vec{r}_{AN}$. Por tanto, la posición de la manzana respecto el ave está dada por la expresión

$$\vec{r}_{MA} = \vec{r}_{MN} - \vec{r}_{AN}.$$

La manzana describe una trayectoria de caída libre a una distancia desconocida x_0 de Newton, como se muestra en la figura. Por tanto

$$\vec{r}_{MN} = x_0\hat{x} + (h - \frac{gt^2}{2})\hat{y},$$

donde g es la gravedad. Esta expresión es válida para cualquier tiempo $t \geq 0$. Para un tiempo $t \geq t_0$, la velocidad del ave con respecto a la posicion de Newton esta dada por la expresión

$$\vec{v}_{AN} = -v_{AN}\hat{u},$$

donde $\hat{u}$ es el vector unitario asociado a la dirección de movimiento del ave,

$$\hat{u} = \cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y}.$$

Por definición

$$\dot{\vec{r}}_{AN} = \vec{v}_{AN}.$$

Integrando a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\int_{\vec{r}_{AN}(t_0)}^{\vec{r}_{AN}} d\vec{r}_{AN} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_{AN}dt.$$

Por tanto

$$\vec{r}_{AN} = \vec{r}_{AN}(t_0) + \vec{v}_{AN}(t - t_0).$$

De la figura de la solución es fácil observar que

$$\vec{r}_{AN}(t_0) = (x_0 + d)\hat{x} + H\hat{y}.$$

Finalmente, para $t \geq t_0$, se obtiene

$$\vec{r}_{MA} = \Big(v_{AN}(t - t_0)\cos\alpha - d\Big)\hat{x} + \Big(h - H - \frac{gt^2}{2} + v_{AN}(t - t_0)\sin\alpha\Big)\hat{y}.$$

■

Solución

b) La expresión para la velocidad en función del tiempo del ave respecto a la manzana para tiempos mayores a t_0.

$$\vec{v}_{MA} = \dot{\vec{r}}_{MA} = v_{AN}\cos\alpha\,\hat{x} + \Big(v_{AN}\sin\alpha - gt\Big)\hat{y}.$$

Por tanto

$$\vec{v}_{AM} = -\vec{v}_{MA} = -v_{AN}\cos\alpha\,\hat{x} - \Big(v_{AN}\sin\alpha - gt\Big)\hat{y}.$$

■

Solución

c-1) Si el ave ataja la manzana en la caida antes de chocar el suelo: ¿cuál es la altura H inicial del ave?

Cuando el ave ataja la manzana, en el tiempo $t = t^*$, se satisface la condición

$$\vec{r}_{MA} = 0$$

por tanto

$$v_{AN}(t^* - t_0)\cos\alpha - d = 0$$

y

$$h - H - \frac{g(t^*)^2}{2} + v_{AN}(t^* - t_0)\sin\alpha = 0.$$

Resolviendo las anteriores 2 ecuaciones para las incognitas t^* y H se obtiene que

$$t^* = \frac{d}{v_{AN}\cos\alpha} + t_0.$$

y

$$H = h + d\,\tan\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_{AN}\cos\alpha} + t_0\right)^2.$$

■

Solución

c-2) ¿Cuál es la velocidad del ave respecto a la manzana cuando es atajada? La velocidad $\vec{v}_{AM}$ en el tiempo t^* toma la forma

$$\vec{v}_{AM}(t^*) = -v_{AN}\cos\alpha\,\hat{x} - \left(v_{AN}\sin\alpha - gt_0 - \frac{gd}{v_{AN}\cos\alpha}\right)\hat{y}.$$

■

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____

FIS1514: Dinámica Interrogación No. 1 14 de septiembre de 2022

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____ Problema N°: _____