Estática y Dinámica - FIS-1513 Sección 1

Interrogación I2

Miércoles 18 de Mayo de 2011 .

Instrucciones

1. Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
2. Resuelva cada uno de ellos en hojas separadas. Sea claro y ordenado.
3. Escriba con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
4. Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

Problema 1

Aldo y su hermano Pablo han ido a patinar a una laguna helada. Al mediodía Aldo se detiene para abrir el paquete del almuerzo, cuando observa que Pablo se aproxima directamente hacia él con una rapidez v_0. Antes del impacto Aldo le lanza a su hermano el paquete en dirección horizontal, el cual es atrapado en el aire por Pablo. Si ambos hermanos tienen la misma masa M, y la masa del paquete es m,

a) (2 puntos) Calcule la velocidad del centro de masas del sistema Aldo-paquete-Pablo.

b) (2 puntos) Calcule el valor mínimo de la rapidez v con la cual Aldo debe lanzar el paquete (relativo al hielo) para que su hermano no choque con él.

c) (2 puntos) Para el valor mínimo de v calculado en (b), calcule la pérdida total de energía durante todo el proceso.

Solución:

a) Ya que no existen fuerzas externas horizontales, el momentum lineal horizontal se conserva. Por lo tanto, la velocidad del centro de masas en todo instante de tiempo es

$$V_{CM} = \frac{M}{m+2M} v_0$$

b) Cuando la rapidez con que Aldo lanza el paquete del almuerzo es mínima, ambos (Aldo y Pablo) tendrán la misma velocidad con respecto al hielo y la velocidad relativa entre ambos es cero. Por lo tanto, ambos tendrán la velocidad del centro de masas calculado en a). Para determinar la velocidad v con que Aldo lanza el paquete, basta hacer conservación de momentum para el sistema Aldo-paquete,

$$P_i = P_f \qquad \rightarrow \qquad 0 = MV_{CM} + mv$$

Entonces,

$$v = -\frac{M}{m} V_{CM} = -\frac{M^2}{m(m+2M)} v_0$$

c) La pérdida de energía durante todo el proceso es $Q = E_i - E_f$ donde,

$$E_i = \frac{1}{2}Mv_0^2 \qquad y \qquad E_f = \frac{1}{2}(m+2M)V_{CM}^2$$

Por lo tanto,

$$Q = \frac{1}{2}M\left(\frac{m+M}{m+2M}\right)v_0^2$$

Problema 2

Considere un satélite en órbita circular de radio R_T alrededor del Sol, donde R_T es el radio de la órbita terrestre. Se desea aumentar la velocidad de este satélite de manera que su nueva órbita sea una elipse que alcance la órbita del planeta Júpiter como se muestra en la figura (suponga que la órbita de Júpiter es circular de radio $R_J > R_T$). Para esto el satélite expulsa parte de su masa la que cae en línea recta hacia el Sol. Se debe calcular la fracción del satelite que debe ser expulsada. Para esto,

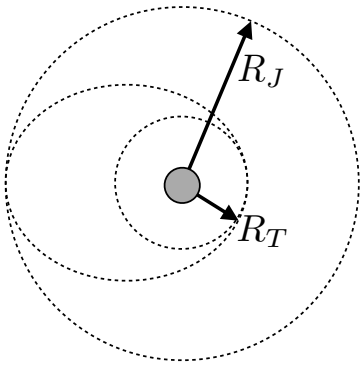
a) (2 puntos) Calcule el latus rectum y excentricidad de la nueva órbita.

b) (2 puntos) Calcule las velocidades del satelite V_{sT} y V_{sJ} en su nueva órbita cuando su distancia al sol es R_T y R_J, respectivamente.

c) (2 puntos) Qué porcentaje del satelite debe ser expulsado?

Exprese sus resultados en función de R_T, R_J y constantes fundamentales como $k = GM_{\text{Sol}}$. Algunas fórmulas que le podrían ser de utilidad son

$$p = \frac{l^2}{mk^2} \qquad e = \sqrt{1 - \frac{E}{E_{min}}} \tag{1}$$



Solución:

a) Utilizando la ecuación de la órbita para un cuerpo bajo la acción de una fuerza central, $\rho(\theta) = p(1 + e\cos\theta)^{-1}$, tenemos que las distancias mínima y máxima son

$$\rho_{min} = R_T = \frac{p}{1+e}, \qquad \rho_{max} = R_J = \frac{p}{1-e},$$

luego el latus rectum y excentricidad vienen dados por

$$p = \frac{2R_TR_J}{(R_T+R_J)} \qquad y \qquad e = \frac{R_J - R_T}{R_J + R_T}.$$

b) Utilizando la definición de latus rectum, $p = l^2/km^2$, y recordando que en los puntos de mayor y menor distancia al Sol la velocidad radial es cero, tenemos que la velocidad tangencial está dada por y $v_t = l/m\rho = \sqrt{kp/\rho^2}$. De esta manera las velocidades del satélite son,

$$V_{sT} = \sqrt{kp/R_T^2} = \sqrt{\frac{k}{R_T}\frac{2R_J}{R_T + R_J}},$$

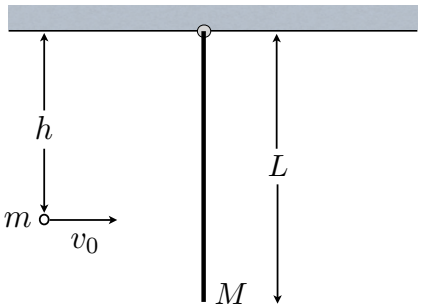
$$V_{sJ} = \sqrt{kp/R_J^2} = \sqrt{\frac{k}{R_J}\frac{2R_T}{R_T + R_J}}.$$

c) Cuando el satelite expulsa parte de su masa, no existen fuerzs externas en la dirección tangencial a la órbita y por lo tanto, el momentum lineal se conserva, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$. Entonces, $mV_T = m_1 V_{sT} + m_2 V_2$. Como la parte expulsada cae en línea recta al Sol, $V_2 = 0$. Luego $\frac{m_2}{m} = \frac{m-m_1}{m} = 1 - \frac{V_T}{V_{sT}}$. V_T corresponde a la velocidad del satelite en su órbita circular. Ésta se puede calcular igualando la fuerza de gravedad a la aceleración centrípeta de lo cual se obtiene que $V_T^2 = k/R_T$. Finalmente, la fracción de masa que el satélite debe expulsar es

$$\frac{m_2}{m} = 1 - \sqrt{\frac{R_T + R_J}{2R_J}}.$$

Problema 3

Considere una barra uniforme de largo L y masa M que cuelga de un muro tal como se muestra en la figura. La barra puede rotar en torno a un eje ubicado en el punto en que la barra se une al muro. Una masa m que incide con velocidad v_0, choca con la barra quedando adosada a ella a una distancia h del eje. El momento de inercia I de la barra con respecto a su centro de masa es $ML^2/12$.



Determine el impulso horizontal transmitido por el eje a la barra durante la colisión en terminos de variables conocidas. ¿A que altura h debe impactar la masa m para que el impulso horizontal transmitido por el eje sea nulo?

Solución:
Tras la colisión la barra rota en torno al eje con velocidad angular ω_0. El impulso I_x horizontal transmitido por el eje a la barra debe ser igual al cambio de momentum en la colisión, es decir

$$I_x = p_{f,x} - p_{i,x} = (\frac{ML\omega_0}{2} + mh\omega_0) - mv_0 = \omega_0(mh + \frac{ML}{2}) - mv_0.$$

El momento angular en torno al eje se conserva ya que la única fuerza externa sobre el sistema barra + masa es aplicada en el eje. Tenemos entonces

$$\tau_{\text{eje}} = 0 = L_f - L_i = (I_{\text{barra}}\omega_0 + mh^2\omega_0) - mhv_0,$$

donde I_{barra} *es el momento de inercia de la barra en torno al eje. Usando el teorema del eje paralelo y el dato del momento de inercia de la barra en torno a su centro de masa tenemos que* $I_{\text{barra}} = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$. *De la ecuación anterior obtenemos que*

$$mv_0 = \left(\frac{ML^2}{3h} + mh\right)\omega_0$$

y el impulso horizontal está dado entonces en terminos de cantidades conocidas por

$$I_x = \omega_0\left(mh + \frac{ML}{2}\right) - \left(\frac{ML^2}{3h} + mh\right)\omega_0 = \omega_0\left(\frac{ML}{2} - \frac{ML^2}{3h}\right).$$

ó

$$I_x = \frac{mv_0}{\left(\frac{ML^2}{3h} + mh\right)}\left(\frac{ML}{2} - \frac{ML^2}{3h}\right)$$

Para que $I_x = 0$ debemos tener $h = 2L/3$.