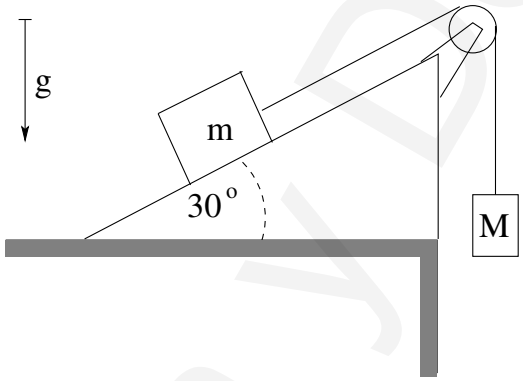
Ejemplos de Maquinas de Atwood (Bloques, Cuerdas y Poleas)

Rafael Benguria y M. Cristina Depassier

1. Un bloque de masa m se mueve sobre un plano inclinado de ángulo $\alpha = 30°$ y está conectado mediante una cuerda ideal a un bloque de masa M que se mueve a lo largo de la vertical como se indica en la figura. Suponga que no hay roce entre el bloque de masa m y el plano inclinado y tampoco entre la cuerda ideal y la polea.



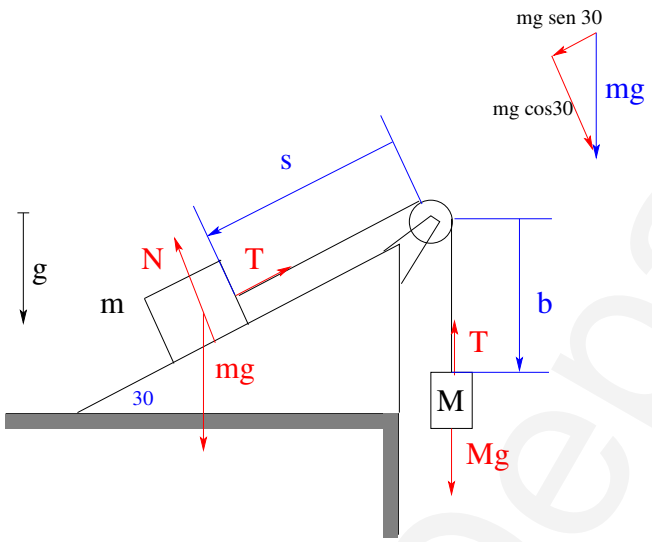
a) Determine las aceleraciones de los bloques, y,

b) Encuentre la tensión de la cuerda.

Solución: Las fuerzas que actúan sobre el bloque de masa M son su peso $M\,g$ y la tensión T de la cuerda ideal. En tanto que las fuerzas sobre el bloque de masa m son su peso $m\,g$, la reacción N del plano inclinado sobre m y la tensión T de la cuerda ideal (ver figura). Ahora introducimos las coordenadas b y s para especificar la posición (vertical) de M y la posición (a lo largo del plano inclinado) de m. Las ecuaciones de movimiento del los bloques son: i) del bloque de masa M,

$$M\,g - T = M\ddot{b}. \tag{1}$$

Benguria y Depassier



ii) del bloque de masa m,

$$mg\,\text{sen}\,30^\circ - T = \frac{1}{2}m\,g - T = m\ddot{s}, \tag{2}$$

y

$$N - m\,g\cos 30^\circ = N - \frac{\sqrt{3}}{2}m\,g = 0. \tag{3}$$

La ecuación de ligazón que da cuenta del hecho que la cuerda que une los bloques es ideal, está dada por,

$$b(t) + s(t) = \ell, \tag{4}$$

en que ℓ es básicamente el largo de la cuerda, que es constante. Derivando (4) dos veces con respecto al tiempo obtenemos,

$$\ddot{b} + \ddot{s} = 0. \tag{5}$$

Despejando $\ddot{b}$ y $\ddot{s}$ en términos de T a partir de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos,

$$\ddot{b} = g - \frac{T}{M},$$

y

$$\ddot{s} = \frac{1}{2}g - \frac{T}{m}$$

Beng uria y Depassier

y reemplazando en (5) finalmente obtenemos la tensión

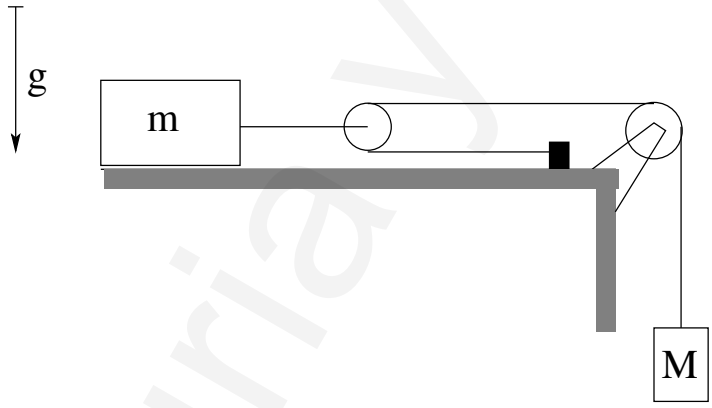
$$T = \frac{3\,m\,M}{2(m+M)}\,g \tag{6}$$

y la aceleración del bloque M,

$$\ddot{b} = \frac{2\,M - m}{2(m+M)}\,g. \tag{7}$$

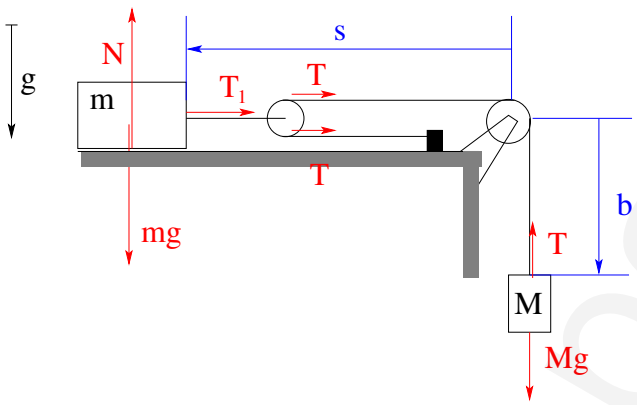
Nótese que $|\ddot{b}| < g$, y que $\ddot{b} > 0$ si $m < M/2$ y $\ddot{b} < 0$ si $m > M/2$. Regresaremos a este problema en el problema 8 más abajo.

2. Dos bloques de masas m y M respectivamente están conectados mediante una cuerda ideal como se indica en la figura. Desprecie el roce entre las superficies y la masa de la polea. Encuentre la aceleración del bloque M y la tensión de la cuerda.



Solución: En la figura mostramos el detalle de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques. Sobre el bloque de masa M que se mueve a lo largo de la vertical actúan su peso $M\,g$ y la tensión de la cuerda T. Sobre la masa m actúan su peso $m\,g$ y la normal N en la dirección vertiical, y la tensión T_1 de la cuerda que une la polea P con el bloque m (T_1 está dirigida hacia la derecha en la figura). Como la polea P es ideal, la suma de las fuerzas que actíuan sobre ellas es nula, de donde concluimos que

Benguria y Depassier



$$T_1 = 2\,T.$$

Las coordenadas que usamos para describir el movimiento de los bloques están también indicadas en la figura. Usamos $b(t)$ para describir el movimiento vertical (hacia abajo) del bloque de de masa M, y $s(t)$ para describir el movimiento horizontal (hacia la izquierda) del bloque de masa m. Entonces las ecuaciones de movimiento son: i) para el bloque de masa M,

$$M\,g - T = M\ddot{b}, \tag{8}$$

ii) para el bloque de masa m, tenemos dos ecuaciones (vertical y horizontal):

$$N - m\,g = 0, \tag{9}$$

y

$$-T_1 = -2\,T = m\ddot{s}. \tag{10}$$

De la figura vemos que la ecuación de ligazón, asociada al hecho que el largo de la cuerda es constante, está dada por

$$2\,s + b = \ell$$

(esencialmente el largo de la cuerda más o menos cantidades que son constantes, i.e., que no dependen del movimiento). Derivando la ecuación anterior con respecto

Benguria y Depassier

al tiempo obtenemos,

$$2\,\ddot{s} + \ddot{b} = 0. \tag{11}$$

De (8) y (10) despejamos las aceleraciones en términos de la tensión, i.e.,

$$\ddot{s} = -\frac{2\,T}{m},$$

y

$$\ddot{b} = g - \frac{T}{M}.$$

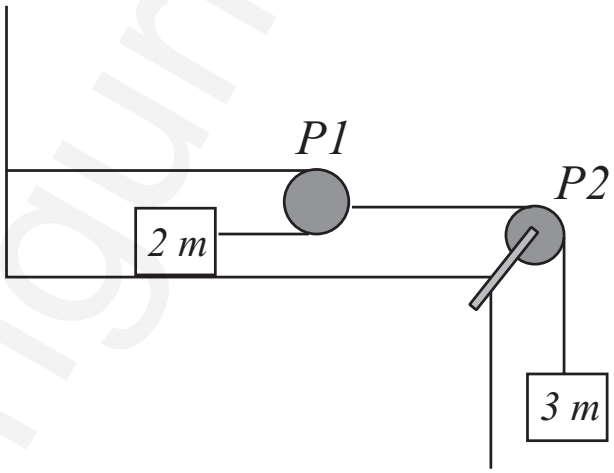
Finalmente reemplazando estas dos expresiones en (11) encontramos,

$$T = \frac{m\,M\,g}{4\,M + m},$$

y

$$\ddot{b} = \frac{4\,M}{4\,M + m}\,g = -2\ddot{s}.$$

3. Considere la Máquina de Atwood de la figura. Las poleas P_1 y P_2 son ideales, y también lo son las dos cuerdas. Suponga que no hay roce entre el bloque de masa $2m$ y la superficie. Determine,



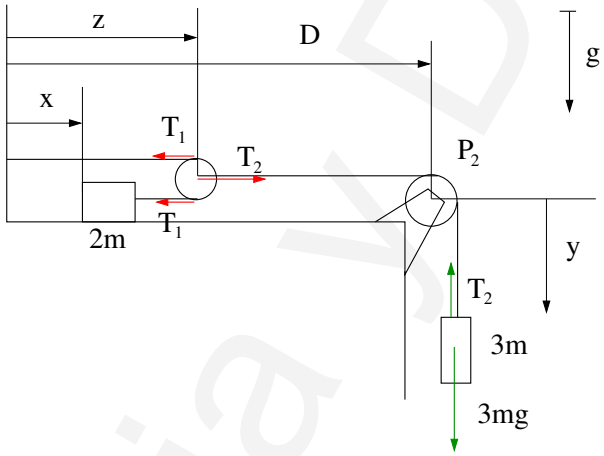
i) La aceleración de ambos bloques, y

Benguria y Depassier

ii) Las tensiones en ambas cuerdas.

Solución: Siguiendo el protocolo standard de solución de problemas de dinámica, identificamos primero los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre ellos. Llamaremos 1 al bloque de masa $2m$ y 2 al bloque de masa $3m$. Sobre el blque de masa $2m$ actúan la tensión T_1 (a lo largo de la horizontal), y el peso $2mg$ y la normal N a lo largo de la vertical. En tanto que sobre el bloque $3m$ actúan el peso $3mg$ y la tensión T_2 a lo largo de la vertical, tal como se indica en la figura.

Llamemos x a la posición (horizontal) de $2m$, medida desde la pared de la izquierda. Llamemos y a la posición del bloque $3m$ medida desde el eje de la polea P_2.



Hemos supuesto que ambas poleas son ideales y, en particular no tienen masa. Entonces, la suma de las fuerzas que act´an sobre la polea P_1 es nula (de lo contrario, al no tener masa su aceleración sería infinita). Así, de la figura concluímos que,

$$T_2 = 2T_1. \tag{12}$$

La componente horizontal de la ecuación de movimiento del bloque 1 está dada por,

$$T_1 = (2m)\ddot{x}, \tag{13}$$

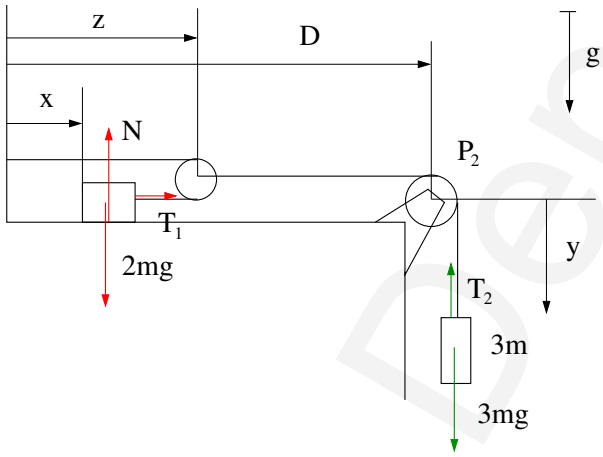
en tanto que la componente vertical está dada por

$$N - (2m)g = 0. \tag{14}$$

Bengoria y Depassier

Por otra parte la ecuación de movimiento del bloque $3m$ (que se mueve a lo largo de la vertical) está dada por,

$$(3m)g - T_2 = (3m)\ddot{y}. \tag{15}$$



Nos falta aún relacionar los desplazamientos x e y de los bloques entre sí. Llamemos ℓ_1 y ℓ_2 a los largos de las dos cuerdas ideales del problema. El rótulo 1 los hemos estado usando para la cuerda que partiendo de la pared de la izquierda, pasa por P_1 y termina en $2m$. Para la cuerda que une P_1 con el bloque $3m$, y que pasa por la polea P_2 usamos el rótulo 2. Con el objeto de encontrar la relación entre x e y, conviene introducir la distancia z, la cual mide la posición (horizontal) de la polea P_1 medida desde la pared de la izquierda (ver figura). Llamemos finalmente D a la distancia (fija) desde la pared a la polea P_2. Entonces, tenemos las dos relaciones siguientes (ver figura):

$$x + (\ell_1 - z) = z, \tag{16}$$

y

$$z + (\ell_2 - y) = D \tag{17}$$

Derivando (16) dos veces con respecto al tiempo, obtenemos,

$$\ddot{x} = 2\ddot{z}.$$

Benguria / Depassier

Y, derivando (17) dos veces con respecto al tiempo, obtenemos,

$$\ddot{z} = \ddot{y}.$$

Eliminando $\ddot{z}$ entre estas dos ecuaciones finalmente obtenemos la relación de ligazón entre y y x,

$$\ddot{x} = 2\ddot{y}. \tag{18}$$

De las ecuaciones (12) y (13) obtenemos,

$$\ddot{x} = \frac{T_2}{4m}. \tag{19}$$

Dividiendo por $3m$ podemos escribir (20 como,

$$\ddot{y} = g - \frac{T_2}{3m}. \tag{20}$$

Finalmente, reemplazando estas dos expresiones en (18), resolviendo pra T_2, encontramos,

$$T_2 = \frac{24}{11} m\, g, \tag{21}$$

y, luego,

$$\ddot{x} = \frac{6}{11} g, \tag{22}$$

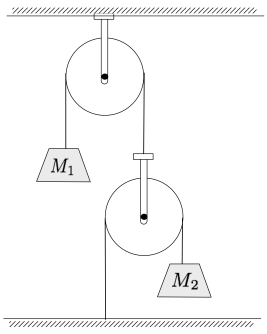
y,

$$\ddot{x} = \frac{3}{11} g, \tag{23}$$

y,

$$T_1 = \frac{12}{11} m\, g, \tag{24}$$

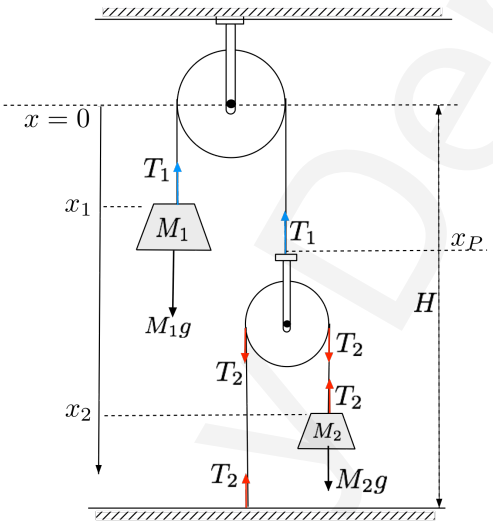
4. Las masas M_1 y M_2 están conectadas mediante cuerdas y poleas como se muestra en la figura adjunta. Las cuerdas son ideales, es decir, no tienen masa y son inextensibles. Las poleas también son ideales, esto es, no tienen masa. ni fricción con la cuerda.



Benguria y Depassier

Solución:

Elijamos el eje x hacia abajo y llamemos H la distancia desde $x = 0$ hasta el suelo. Las fuerzas sobre la masa M_1 son su peso y la tensión T_1 al igual que sobre M_2, su peso y la tensión de la cuerda T_2. Sobre la polea móvil las fuerzas son T_1 hacia arriba y T_2 hacia abajo en los dos tramos de la cuerda.



Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$M_1 \ddot{x}_1 = M_1 g - T_1, \tag{1}$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = M_2 g - T_2. \tag{2}$$

Como la polea movil no tiene masa $M_p a_p = 2T_2 - T_1 = 0$ ya que $M_P = 0$. La relación entre las tensiones es entonces

$$T_1 = 2T_2. \tag{3}$$

Por último tenemos que considerar dos cuerdas de largo fijo cada una, llamémoslos L_1 y L_2 (el subíndice nos dice a que masa está unida la cuerda). El largo de esta cuerdas es (como se ve en la figura)

$$L_1 = x_1 + x_P \qquad \text{y} \qquad L_2 = (H - x_P) + (x_2 - x_P) = H + x_2 - 2x_P.$$

Benguria V. Depassier

Derivando estas expresiones obtenemos $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_P = 0$ y $\ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_P = 0$ por lo que concluimos que la relación entre las aceleraciones de M_1 y M_2 es

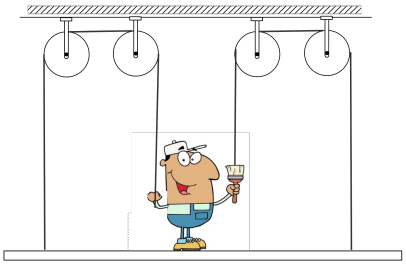
$$2\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \tag{4}$$

El signo menos nos indica que si M_1 acelera hacia abajo, M_2 acelera hacia arriba, lo que es obvio de la figura.

Tenemos entonces cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas ($\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, T_1$ y T_2) por lo que podemos resolver el problema. Se nos pide la aceleración de M_1. De (1-4) podemos despejar y encontrar

$$\ddot{x}_1 = \frac{(M_1 - 2M_2)g}{M_1 + 4M_2}$$

5. Un pintor de masa M está parado sobre un tablón de masa m y se eleva ejerciendo una fuerza sobre dos cuerdas fijas al techo mediante poleas como se muestra en la figura. Sobre cada cuerda ejerce una fuerza F y se eleva con aceleración a. Calcule la aceleración.

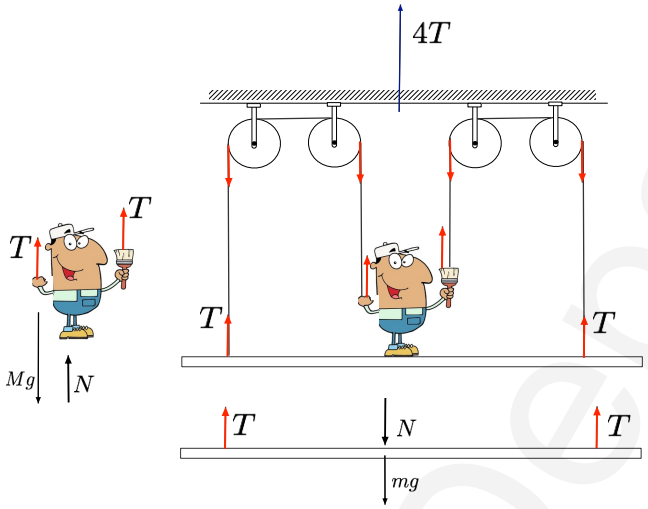


Solución:

Lo haremos por dos métodos. Primero separando los cuerpos y luego considerando el pintor y el tablón como un todo y analizando las fuerzas externas que actúan sobre el conjunto.

Método 1

Benguria y Depassier



El pintor tira la cuerda y por lo tanto la cuerda lo tira a él con la misma fuerza que se transmite por las cuerdas ideales. En la figura dibujamos en rojo las tensiones sobre las cuerdas y la fuerza sobre el pintor que ejerce la cuerda. Como las cuerdas no tienen masa todas las tensiones son iguales. Dado que sabemos que el pintor tira la cuerda con F, sabemos que la tensión es

$$T = F. \tag{1}$$

El pintor ejerce la normal N sobre el tablón y éste ejerce una reacción sobre él. El tablón y el pintor aceleran juntos. La ecuación de movimiento del pintor es entonces,

$$Ma = N + 2F - Mg, \tag{2}$$

y la del tablón es

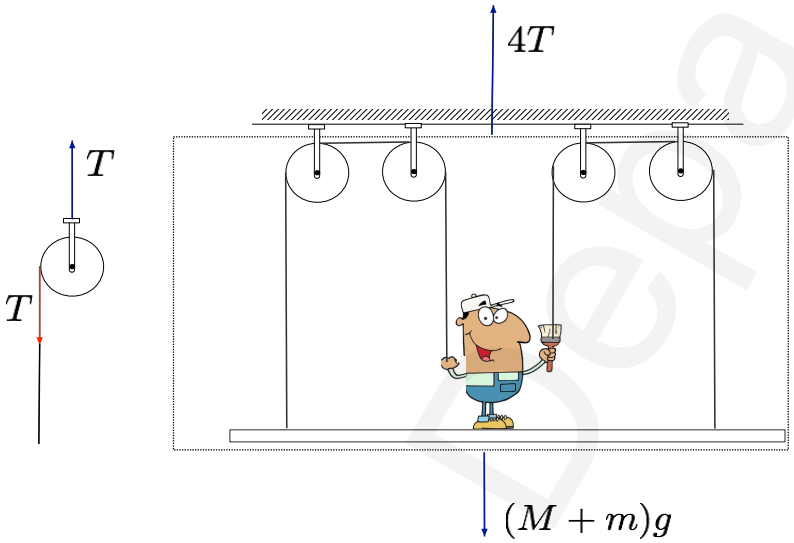
$$2T - N - mg = ma. \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) obtenemos

$$a = \frac{4F}{M+m} - g.$$

Benguria y Depassier

Método 2



Miremos la polea dibujada al lado en forma separada. Como la polea no tiene masa la suma de las fuerzas sobre ella tiene que ser cero. La cuerda la tira hacia abajo con T y por lo tanto el techo tiene que afirmarla haciendo una fuerza T hacia arriba. Esto es así para cada polea. Considerando las cuatro poleas, el techo ejerce la fuerza $4T = 4F$ hacia arriba. Y hacia abajo tenemos el peso del pintor mas el tablón. Como aceleran juntos, la ecuacion de movimiento es

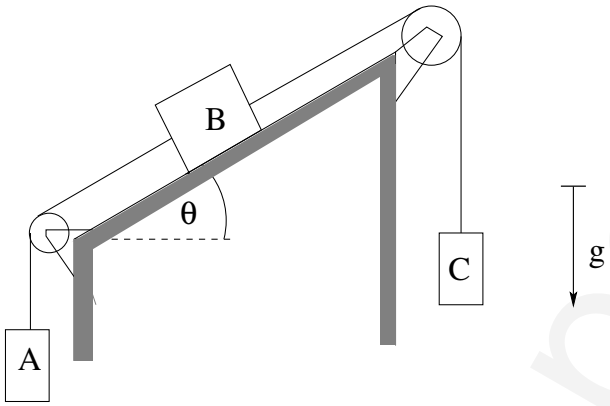
$$(M + m)a = 4F - (M + m)g$$

de donde obtenemos

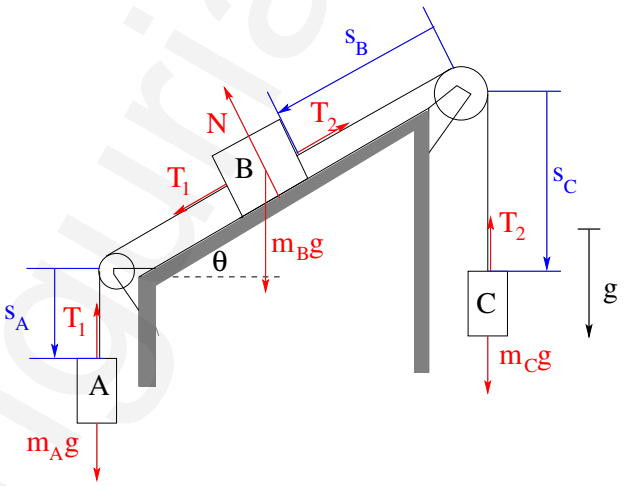
$$a = \frac{4F}{M + m} - g.$$

6. Encuentre las tensiones T_1 y T_2 del sistema de la figura. Suponga que no hay roce. Las masas de los bloques A, B y C son m_A, m_B y m_C respectivamente.

Benguria y Depassier



Solución: En la figura hemos dibujado las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos. Sobre el bloque de masa m_A actúan la tensión T_1 y el peso $m_A\,g$. Sobre el cuerpo de masa m_B actúan su peso, $m_B\,g$, la normal que el plano inclinado hace sobre él, N y las tensiones T_1 (por la izquierda y T_2 (por la derecha). Finalmente sobre el bloque de masa m_C actúan su peso $m_C\,g$ y la tensión T_2. Las posiciones de los bloques están descritas por las coordenadas s_A, s_B y s_C como se indica en la figura. Las ligazones entre estas variables, debidas al hecho que las cuerdas tienen largo constante son,



$$s_C + s_B = \ell_2, \tag{25}$$

Bencuria y Depassier

en que ℓ_2 es básicamente el largo de la cuerda del lado derecho, en tanto que

$$s_A + (L - s_B) = \ell_1, \tag{26}$$

en que ℓ_1 es básicamente el largo de la cuerda del lado izauierdo y L la longitud del plano inclinado. Derivando dos veces estas ecuaciones con respecto al tiempo obtenemos que

$$\ddot{s}_A = \ddot{s}_B = -\ddot{s}_C \equiv \ddot{s}. \tag{27}$$

Nótese que hemos llamado $\ddot{s}$ al valor común de estas aceleraciones. Las ecuaciones de movimiento para s_A, s_B y s_C están dadas por

$$m_A\, g - T_1 = m_a\, \ddot{s}_A, \tag{28}$$

$$T_1 + m_B\, g \sin\theta - T_2 = m_B\, \ddot{s}_B, \tag{29}$$

y

$$m_C\, g - T_2 = m_C\, \ddot{s}_C, \tag{30}$$

respectivamente. De (28) y (30) despejamos T_1 y T_2 en términos de $\ddot{s}$, y, reemplazando estas expresiones en (29) encontramos finalmente que

$$\ddot{s} = \frac{m_A + m_B \sin\theta - m_C}{m_A + m_B + m_C}\, g.$$

$$T_1 = m_A \frac{2\, m_C + m_B - m_B \sin\theta}{m_A + m_B + m_C}\, g,$$

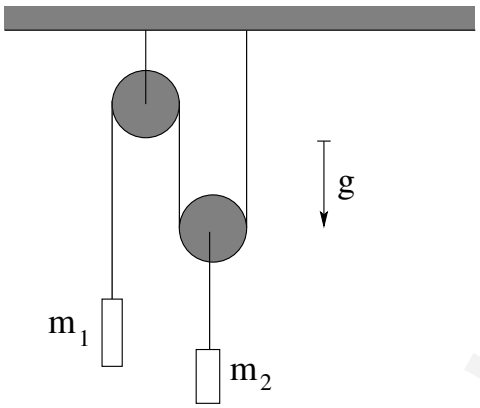
y

$$T_2 = m_C \frac{2\, m_A + m_B + m_B \sin\theta}{m_A + m_B + m_C}\, g,$$

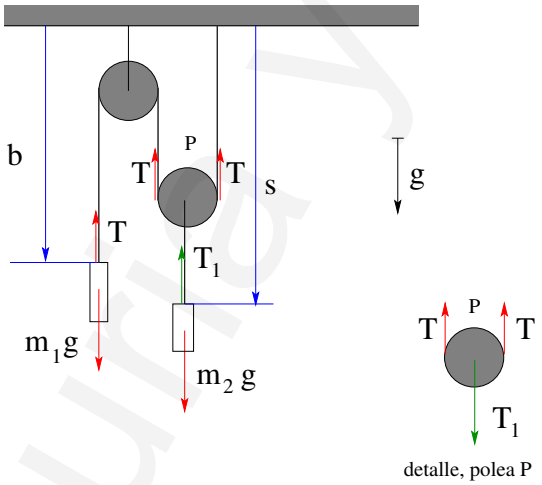
7. Encuentre las aceleraciones de los bloques de masas m_1 y m_2 de la figura y la tensión de la cuerda.

Solución: Las fuerzas que actúan sobre m_1 son su peso, i.e., $m_1\, g$ y la tensión T se la cuerda. Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre m_2 son su peso $m_2\, g$ y la

Benguria Y Depassier



tensión T_1 de la cuerda que une la polea P con el bloque m_2. Como la polea P es ideal (i.e., de masa 0), $T_1 = 2T$ (ver detalle de la polea P en la figura). Llamemos b y s a las posiciones de los dos bloque, medidas hacia abajo desde el techo. Entonces, las ecuaciones de movimiento de los dos bloques son,



$$m_1 \ddot{b} = m_1 g - T, \tag{31}$$

y,

$$m_2 \ddot{s} = m_2 g - 2T. \tag{32}$$

Por otra parte, el largo de la cuerda es, esencialmente, $b(t) + 2\,s(t)$, y como el largo

Benguria y Depassier

es constante, obtenemos,

$$\ddot{b} + 2\,\ddot{s} = 0. \tag{33}$$

De (31), obtenemos que

$$\ddot{b} = g - \frac{T}{m_1}. \tag{34}$$

Y de (32), obtenemos que

$$\ddot{s} = g - \frac{2\,T}{m_2}. \tag{35}$$

Reemplazando $\ddot{b}$ y $\ddot{s}$ en (33) y, resolviendo la ecuación resultante para T obtenemos finalmente que,

$$T = \frac{3\,m_1\,m_2}{4\,m_1 + m_2}\,g \tag{36}$$

y, reemplazando en (34), obtenemos,

$$\ddot{b} = \left(\frac{4\,m_1 - 2\,m_2}{4\,m_1 + m_2}\right)\,g, \tag{37}$$

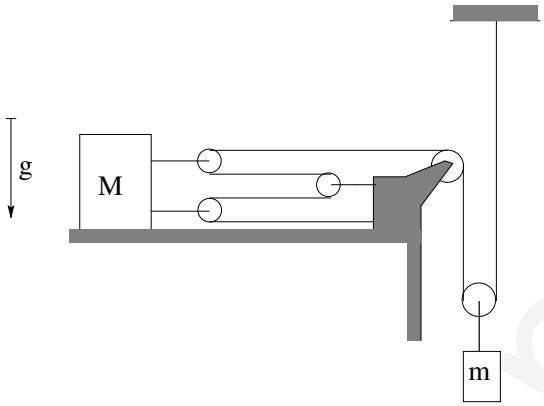
y

$$\ddot{s} = \left(\frac{m_2 - 2\,m_1}{4\,m_1 + m_2}\right)\,g, \tag{38}$$

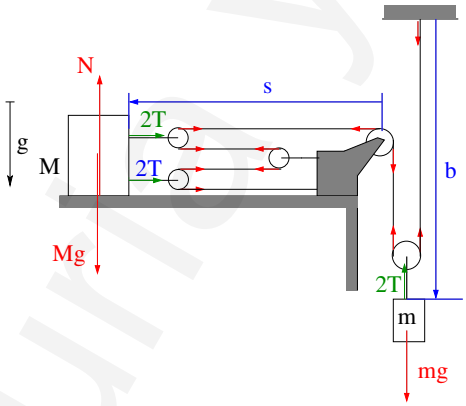
8. El bloque de masa m de la figura se mueve sobre una mesa horizontal lisa (i.e., sin roce) y está conectado a través del sistema de poleas, mediante una cuerda ideal, a un bloque de masa M que se puede mover a lo largo de la vertical. Encuentre la aceleración del bloque de masa M y la tensión de la cuerda.

Solución: Siguiendo el protocolo estandar identificamos las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos (en este caso los bloques de masa m y M respectivamente). Sobre el cuerpo de masa m actúan el peso $m\,g$ y la Normal N en la dirección vertical y las dos tensiones T_1 y T_2 que se muestran en la figura, a lo largo de la horizontal. Si lamamos T a la tensión de la cuerda que conecta el movimiento de los dos bloques

Benguria Depassier



y, dado que las poleas son ideales (i.e., no tienen masa) tenemos de inmediato que $T_1 = T_2 = 2T$. De este modo, la fuerza resultante que actúa sobre m en la dirección horisontal es $4\,T$. Por otra parte las fuerzas que actúan sobre el bloque M son su peso $M\,g$ y la tensión T_3 de la cuerda que une la polea con el bloque de masa M. Como dicha polea también es ideal (i.e., no tiene masa) se tiene que $T_3 = 2\,T$.



Ahora, tenemos que fijar las coordenadas que nos sirven para establecer las posiciones de m y M respectivamente. Llamaremos $s(t)$ y $b(t)$ (ver figura) a las coordenadas de los bloques. Ambas están medidas desde un punto fijo (ver figura). La coordenada $s(t)$, de m, es positiva hacia la izauierda y la coordenada b, de M es positiva hacia abajo. Teniendo especial cuidado de las direcciones positivas de s y de b respectivamente las ecuaciones de Newton para ambos bloques son: i) Para el bloque

Bergunta y Depassier

m,

$$N - m\,g = 0, \tag{39}$$

y

$$-T_1 - T_2 = -4T = m\,\ddot{s}. \tag{40}$$

ii) Y, para el bloque de masa M,

$$M\,g - T_3 = M\,g - 2T = M\,\ddot{b}. \tag{41}$$

Por último, tenemos que deducir la ecuación de ligazón entre s y b, asociada al hecho que la cuerda que une los sistemas de polea es una cuerda ideal. De la figura tenemos que

$$4\,s + 2\,b = \ell, \tag{42}$$

una constante (básicamente el largo de la cuerda menos o más cieras distancias geométricas que no cambian). De (40) y (41) obtenemos

$$\ddot{s} = -\frac{4T}{m} \tag{43}$$

y

$$\ddot{b} = g - \frac{2T}{M}, \tag{44}$$

respectivamente. Ahora, derivando dos veces (42) con respecto al tiempo tenemos,

$$4\,\ddot{s} + 2\,\ddot{b} = 0,$$

y, finalmente, reemplazando las expresiones para $\ddot{s}$ y $\ddot{b}$ encontradas en (43) y (44), obtenemos

$$4\,T\left(\frac{1}{M} + \frac{4}{m}\right) = 2\,g,$$

De aquí obtenemos finalmente,

$$T = \frac{m\,M}{2(4\,M + m)}\,g. \tag{45}$$

Benguria y Depassier

y

$$\ddot{b} = \frac{4\,M}{2(4\,M+m)}\,g. \tag{46}$$

Nótese que como es de esperar, si$m$ es mucho menor que M, la aceleración con que cae M es g (i.e., el bloque de masas m y todo el arreglo de poleas y cuerdas es irrelevante).

9. Ahora reconsideremos el problema 2, pero esta vez supongamos que hay roce entre el bloque de masa m y el plano inclinado. Llamemos μ_e y μ_d a los coeficientes de roce estático y dinámico respectivamente.

   a) ¿Cuál es el mínimo valor de μ_e para que el sistema se encuentre en equilibrio?

   b) Encuentre la tensión de la cuerda y la aceleración de M en los dos casos: $M > m/2$ y $M < m/2$.

Referencias, y Notas Bibliográficas:

George Atwood (1746–1807) era un tutor en el Trinity College de la Universidad de Cambridge cuando publicó su libro, *"A Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies, with a Description of Original Experiments Relative to the Subject"* en la Cambridge University Press en 1784. De acuerdo al famoso físico inglés Thomas Young, Atwood "contribuyó materialmente al progreso de la ciencia, por medio de la creación de diversos modos de ilustración que apoyan la labor del instructor".

Para mas problemas resueltos sobre máquinas de Atwood, consultar los Problemas 1, 2, 7 y 14 del Capítulo 2 del libro, "Problemas Resueltos de Mecánica Clásica" de R. Benguria y M.C. Depassier, Ediciones UC, Santiago de Chile, 1996.

Benguria y Depassier

Benguria y Depassier