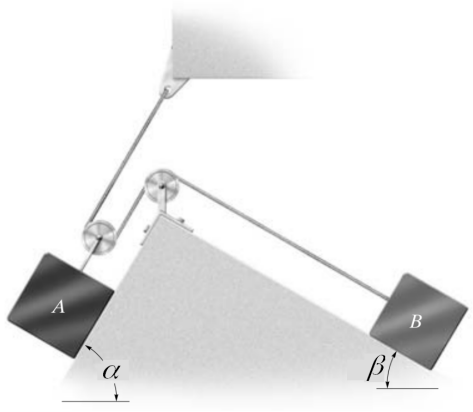
Interrogación 2

Fecha: 29 de Octubre de 2024

1. Dos bloques A y B descansan sobre una cuña de ángulos α y β. Los bloques están conectados mediante una cuerda ideal y el sistema de poleas mostrado en la figura. El coeficiente de roce cinético entre el bloque A y la superficie del plano inclinado en un ángulo α es μ_c. No existe roce entre el bloque B y la superficie del otro plano inclinado. Considere que la masa de A es $m_A = 2m$ y que la masa de B es $m_B = m$.



   a. Determine el trabajo que realiza la fuerza de roce que actúa sobre el bloque A si este desciende por el plano inclinado una distancia d. **[2 ptos.]**

   b. Si ambos bloques son liberados desde el reposo, determine la magnitud de la velocidad del bloque A en el instante que ha recorrido la distancia d. **[4 ptos.]**

Escriba sus resultados en función de algunos o todos los datos del problema: μ_c, g, m, d, α y β.

a) Consideremos que analizando la sumatoria de fuerzas en el eje perpendicular al plano inclinado es posible determinar la fuerza normal:

$$N_A = m_A g \cos\alpha\,, \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

y a partir de éste se determina la fuerza de roce, entonces

$$f_{cA} = \mu_c N_A = \mu_c m_A g \cos\alpha\,. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Para determinar el trabajo de la fuerza de roce, consideramos que el desplazamiento y la fuerza de roce forman un ángulo π, en efecto:

$$W_{f_{cA}} = f_{cA}|\Delta r_A|\cos(\pi) = -\mu_c m_A g d\cos\alpha = -2\mu_c m g d\cos\alpha\,. \qquad \textbf{[1.0 pto.]}$$

■

b) Para determinar lo solicitado consideremos que como existen fuerzas no conservativas, el balance de energía se puede escribir de la siguiente manera:

$$W_{FNC} = E_f - E_i$$

donde W_{FNC} es el trabajo de las fuerzas no conservativas (en este caso el trabajo de la fuerza de roce), y $E_f - E_i$ es la variación de la energía mecánica total. En efecto, para el sistema conformado por ambos bloques A y B:

$$W_{f_{cA}} = \Delta K_A + \Delta K_B + \Delta U_A + \Delta U_B$$
$$W_{f_{cA}} = \left(\frac{1}{2}m_A v_A^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2}m_B v_B^2 - 0\right) + m_A g \Delta y_A + m_B g \Delta y_B \qquad \textbf{[1.0 pto.]}$$

Notemos que el bloque A baja por el plano inclinado por lo que $\Delta y_A < 0$, mientras que el bloque B sube por lo que $\Delta y_B > 0$.

Además, cuando el bloque A se desplaza una distancia d hacia abajo por el plano inclinado un ángulo α, el bloque B sube el doble, es decir:

$$|\Delta r_A| = d$$
$$|\Delta r_B| = 2d \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Las últimas expresiones también se pueden deducir de la ecuación de ligadura: $l = 2r_A + r_B + \text{ctte}$, que en términos de variaciones corresponde a $\Delta r_B = -2\Delta r_A$.

Entonces, las variaciones de altura Δy_A y Δy_B estarán dadas por:

$$\Delta y_A = -d \sin\alpha \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$
$$\Delta y_B = 2d \sin\beta \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Derivando la ecuación de ligadura se obtiene que $v_B = -2v_A$ **[0.5 ptos.]** y por lo tanto:

$$v_B^2 = 4v_A^2 .$$

Usando que $m_A = 2m_B = 2m$ y reemplazando Δy_A, Δy_B y la expresión anterior en el balance de energía se tiene:

$$W_{f_{cA}} = \frac{1}{2}(2m)v_A^2 + \frac{1}{2}m\,4v_A^2 - (2m)gd\sin\alpha + 2mgd\sin\beta$$
$$W_{f_{cA}} = v_A^2(m + 2m) - 2mgd(\sin\alpha - \sin\beta)$$

Despejando,

$$v_A = \sqrt{\frac{W_{f_{cA}} + 2mgd(\sin\alpha - \sin\beta)}{3m}} \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Reemplazando el trabajo de la fuerza de roce obtenido en el inciso a) se tiene:

$$v_A = \sqrt{\frac{-2gd(\mu_c\cos\alpha - \sin\alpha + \sin\beta)}{3}} \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

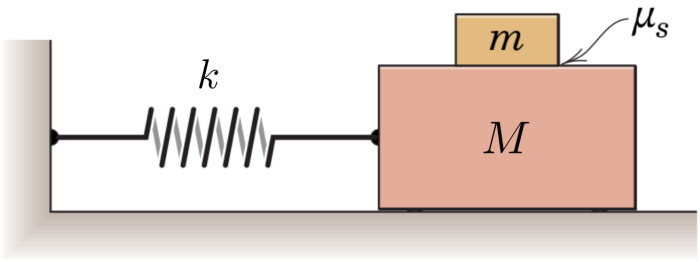
■

2. Un bloque de masa M se encuentra sobre una superficie horizontal unido a un resorte de constante k cuyo otro extremo está fijo a una pared. Sobre el bloque de masa M descansa otro bloque de masa m (desconocida). Entre ambos bloques existe un coeficiente de roce estático μ_s, pero entre el bloque de masa M y el suelo no existe fuerza de fricción tal como muestra la figura.

   a) Si el periodo de oscilación del sistema es T y la masa m no desliza con respecto a la masa M, determine la masa m en términos de k, T y M. **[2 ptos.]**

   b) Para el sistema formado por ambas masas $M + m$, determine las ecuaciones de movimiento $x(t)$, $\dot{x}(t)$, y $\ddot{x}(t)$. Suponga que el sistema inicia su movimiento desde el reposo a una distancia d desde su posición de equilibrio. **[2 ptos.]**

   c) Determine el mínimo coeficiente de roce estático μ_s en términos de k, g, d, m y M, para que la masa m no deslice con respecto a las masa M. **[2 ptos.]**



a) El periodo está dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} \qquad \textbf{[1.0 pto.]}$$

Despejando m:

$$m = \frac{kT^2}{4\pi^2} - M \qquad \textbf{[1.0 pto.]}$$

b) Podemos escribir la ecuación de movimiento de las masas $(M + m)$ como:

$$x(t) = d\cos(\omega_n t) \qquad \textbf{[0.8 ptos.]} \tag{1}$$
$$\dot{x}(t) = -d\omega_n \sin(\omega_n t) \qquad \textbf{[0.6 ptos.]} \tag{2}$$
$$\ddot{x}(t) = -d\omega_n^2 \cos(\omega_n t) \qquad \textbf{[0.6 ptos.]} \tag{3}$$

c) De la ecuación de (3), dado que la función $\cos(\omega_n t)$ oscila entre -1 y 1, podemos ver que la magnitud máxima de la aceleración del sistema es:

$$a_{max} = d\omega_n^2 \qquad \textbf{[0.7 ptos.]}$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Newton al bloque de masa M cuando la aceleración es máxima, se tiene que:

$$Ma_{max} = \mu_s Mg \Longrightarrow a_{max} = \mu_s g \qquad \textbf{[0.7 ptos.]}$$

Por lo tanto:

$$\mu_s = \frac{a_{max}}{g} = \frac{d\omega_n^2}{g} = \frac{kd}{(M+m)g} \qquad \textbf{[0.6 ptos.]}$$

■

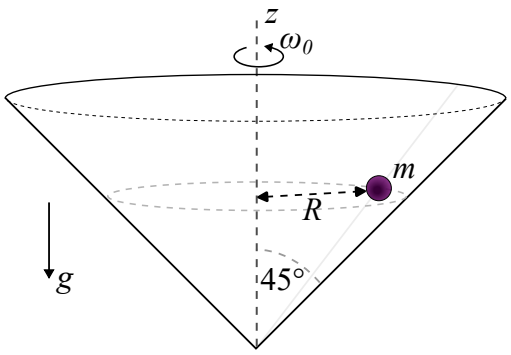
3. Una partícula de masa m se encuentra sobre la superficie interior de un cono invertido de 45° que gira con velocidad angular constante ω_0 con respecto a su eje z. Entre la superficie del cono y la partícula existe una fuerza de roce estático que mantiene a la partícula sin deslizar y girando en una trayectoria circular a una altura y radio $R < g/\omega_0^2$ constante, como muestra la figura.

   a. Dibuje el DCL y escriba las ecuaciones de movimiento de la partícula **[4 ptos.]**.

   b. Encuentre la magnitud de la fuerza normal ejercida por el cono sobre la partícula **[1 pto.]**.

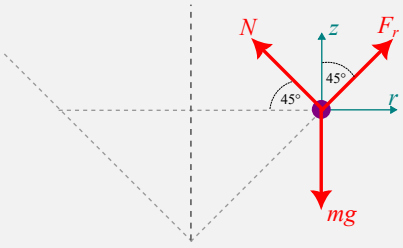
   c. Encuentre la magnitud de la fuerza de roce estático **[1 pto.]**.

   Considere conocidos g, m, ω_0 y R.



Hint 1: La aceleración en coordenadas cilíndricas está dada por $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$
Hint 2: Recuerde que $\cos 45° = \sin 45° = 1/\sqrt{2}$.

a) Visto de frente, el DCL del sistema es **[1.5 ptos.]**



Se otorga 0.5 ptos. por cada fuerza.

En coordenadas cilíndricas tenemos que $\dot{\theta} = \omega_0$, $r = R$ y $z =$ cte., por lo tanto la aceleración es $\vec{a} = -R\omega_0^2\hat{r}$ **[0.5 ptos.]**. Entonces, la ecuación de movimiento en $\hat{r}$ es

$$F_r \sin 45° - N \cos 45° = -mR\omega_0^2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(F_r - N) = -mR\omega_0^2, \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

mientras que la en $\hat{z}$:

$$F_r \cos 45° + N \sin 45° - mg = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(F_r + N) = mg. \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

■

b) Restando las ecuaciones en $\hat{z}$ y en $\hat{r}$:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}N = mg + mR\omega_0^2,$$

se obtiene

$$N = \frac{m\sqrt{2}}{2}(g + R\omega_0^2) = \frac{m}{\sqrt{2}}(g + R\omega_0^2). \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

c) Sumando las ecuaciones en $\hat{z}$ y en $\hat{r}$:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}F_r = mg - mR\omega_0^2,$$

se obtiene

$$F_r = \frac{m\sqrt{2}}{2}(g - R\omega_0^2) = \frac{m}{\sqrt{2}}(g - R\omega_0^2). \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

■