Estática y Dinámica - FIS-1513

Interrogación I3

Viernes 17 de Junio de 2011 .

Instrucciones

1. Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
2. Resuelva cada uno de ellos en hojas separadas. Sea claro y ordenado.
3. Escriba con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
4. Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

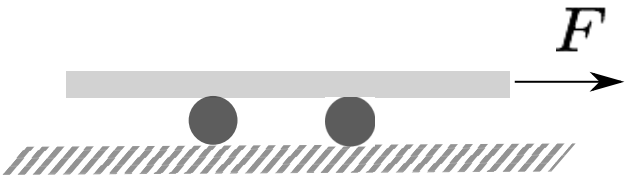
Problema 1

Una tabla larga y delgada de masa M se apoya sobre dos cilindros idénticos de masa m y radio R cada uno como se muestra en la figura. Se aplica una fuerza F sobre la tabla producto de lo cual los cilindros ruedan y la tabla se desplaza sobre ellos sin resbalar. La tabla es muy larga por lo que se puede suponer que su peso está soportado en partes iguales por los dos cilindros. Los coeficientes de roce entre la tabla y los cilindros y entre los cilindros y el suelo son conocidos. Dato: El momento de inercia de los cilindros es $I_c = mR^2/2$.

a) (1 punto) Haga el diagrama de cuerpo libre de la tabla y de los cilindros indicando todas las fuerzas que actúan sobre ellos.

b) (3 puntos) Escriba la ecuación de movimiento para la tabla y los cilindros

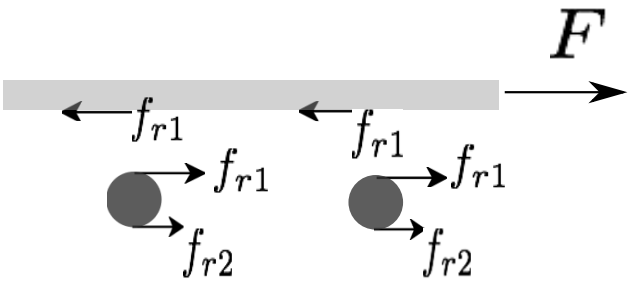
c) (2 puntos) Calcule la aceleración de la tabla y de los cilindros.



Solución:

a) Los roces son el roce entre la tabla y los cilindros f_{r1} y el roce entre los cilindros y el suelo, f_{r2}. En la figura mostramos solamente las fuerzas horizontales. Las fuerzas verticales que no están dibujadas son sobre las ruedas: el peso de cada rueda sobre su centro de masa, la fuerza normal que ejerce el suelo y la fuerza normal que ejerce la tabla sobre la rueda.

   Sobre la tabla actúa el peso de la tabla y la normal que ejerce la rueda sobre la tabla.



b) La ecuación de movimiento de la tabla es

$$Ma_T = F - 2f_{r1} \tag{1}$$

La ecuación de movimiento de los cilindros es

$$ma_c = f_{r1} + f_{r2} \tag{2}$$

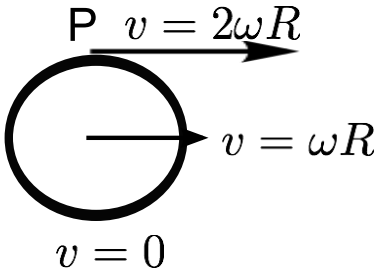
La ecuación de torque para los cilindros es

$$I_c\alpha = R(f_{r1} - f_{r2}) \tag{3}$$

La condición que el cilindro ruede sobre el suelo es

$$a_c = R\alpha \tag{4}$$

y la condición que la tabla no se deslice sobre los cilindros es que la velocidad de la tabla sea igual a la velocidad de la parte superior del cilindro (la parte que toca la tabla).



Como se muestra en la figura la velocidad del punto superior es $2\omega R$ (la velocidad de P respecto al suelo es la velocidad de P respecto al CM ms la velocidad del CM respecto al suelo).

La condición que la tabla no deslice es entonces $v_T = v_P = 2\omega R$. Derivando se tiene que

$$a_T = 2\alpha R \tag{5}$$

Las ecuaciones (1) a (5) constituyen un sistema de ecuaciones para las incógnitas a_T, a_c, f_{r1}, f_{r2} y α.

c) De (2) y (3) despejamos

$$2f_{r1} = ma_c + \alpha \frac{I_c}{R}$$

Usando (4), (5) y el valor dado para el momento de inercia se obtiene

$$2f_{r1} = \frac{3}{4} m a_T$$

lo que se reemplaza en (1) para obtener la aceleración de la tabla

$$\boxed{a_T = \frac{F}{M + \frac{3}{4}m}}$$

y la aceleración de los cilindros es la mitad

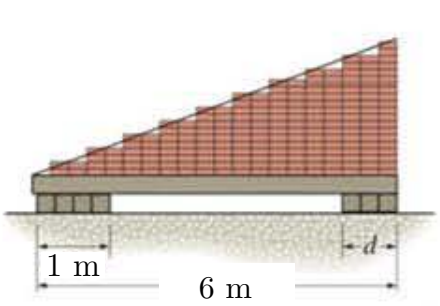
$$\boxed{a_T = \frac{1}{2} \frac{F}{M + \frac{3}{4}m}}$$

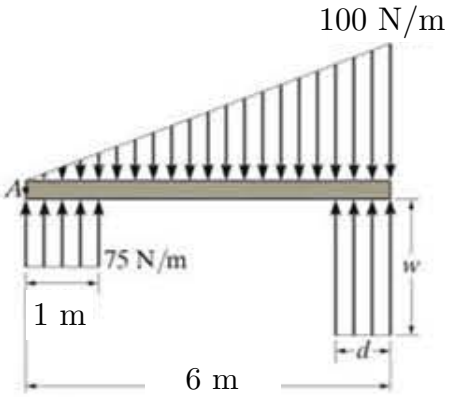
Problema 2

El peso de los ladrillos sobre la tabla y la acción de los soportes de la tabla crean las fuerzas distribuidas sobre la tabla que muestran en la figura derecha.

a) (3 puntos) Construya el diagrama de cuerpo libre de la tabla y especifique el valor de la fuerza resultante y punto de aplicación para cada una de las fuerzas distribuidas de la figura.

(b) (3 puntos) Utilizando las ecuaciones de equilibrio, encuentre el valor de la intensidad de fuerza w y el ancho d del soporte derecho de manera que la fuerza resultante y torque resultante con respecto al punto A sean cero.





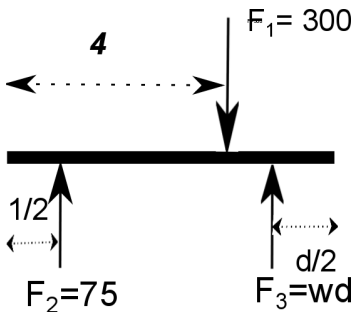
Solución:

a) La fuerza resultante en cada caso es el area, $F_1 = (1/2)6 * 100 = 300N$, $F_2 = 75N$ y $F_3 = wd$. Las fuerzas F_2 y F_3 actúan en el punto medio de cada distribución.

La distribución de fuerzas F_1 es $w(x) = 100x/6$ y el punto de aplicación $\overline{x}$ se calcula a partir de

$$300\overline{x} = \int_0^6 x w(x) dx$$

que implica $\overline{x} = 4$. Esto se muestra en la figura



b) La suma de las fuerzas se anula

$$300 = 75 + wd$$

y el torque respecto a A se anula

$$M_A = 75 \times 0{,}5 + wd(6 - d/2) - 300 \times 4 = 0$$

El sistema se resuelve y se encuentra

$$\boxed{d = 5/3m} \qquad \boxed{w = 135N}$$

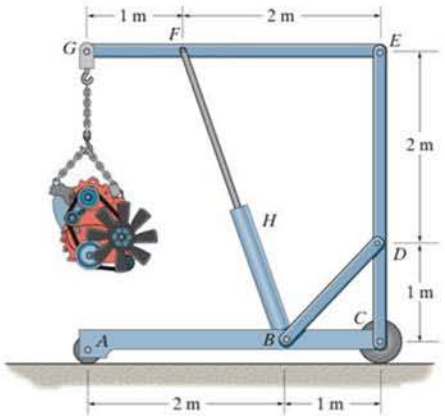
Problema 3

La estructura de la figura soporta un motor de masa $m = 150$ kg. Suponga que las barras que componen la estructura no tienen masa.

(a) (2 puntos) Determine la fuerza sobre el miembro FB.

(b) (3 puntos) Determine la fuerza sobre la barra BD. Especifique si está en tensión o compresión.

(c) (1 punto) Determine la fuerzas que el piso ejerce sobre cada una de las ruedas de la estructura.

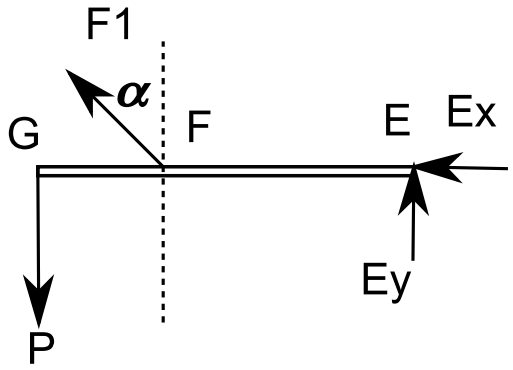


Solución:
De la geometría de la figura vemos que el largo de la barra FB es $\sqrt{10}$ y que el largo de la barra BD es $\sqrt{2}$. Llamemos α al ángulo que forma la barra FB con la vertical. De la figura vemos

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

en tanto que el ángulo que forma la barra BD con la vertical es de 45°.

a) La barra FB es de dos fuerzas por lo que ejerce fuerza solamente a lo largo de su dirección. Para determinar esta fuerza dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la barra GE



Llamamos P al peso del motor y F_1 la fuerza que la barra FB ejerce sobre la barra GE. El torque respecto a E, que se anula en equilibrio, es

$$M_E = 3P - 2F_1 \cos\alpha = 0$$

de donde obtenemos la fuerza

$$\boxed{F_1 = \frac{3P}{2\cos\alpha} = \sqrt{\frac{5}{2}}P = 150\sqrt{\frac{5}{2}}g.}$$

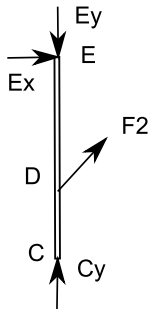
b) Conviene determinar inmediatamente las fuerzas E_x y E_y pidiendo que las fuerzas sobre la barra GE se anulen. La componente horizontal es

$$E_x = -F_1 \sin\alpha$$

y la componente vertical es

$$E_y = P - F_1 \cos\alpha = -\frac{P}{2}.$$

Para calcular la fuerza sobre la barra BD dibujamos la barra EC: El torque respecto a C se



anula, es decir

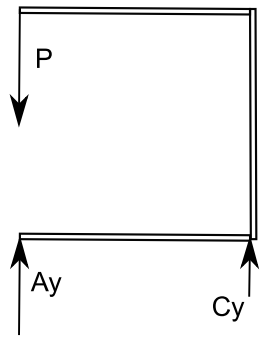
$$M_C = 3E_x + F_2 \sin 45 = 0$$

de donde se obtiene, usando el valor de E_x calculado anteriormente,

$$\boxed{F_2 = \frac{3P}{\sqrt{2}}.}$$

La barra BD entonces está comprimida.

c) Para calcular la fuerza que ejerce el suelo sobre las ruedas observamos el diagrama del objeto completo



Calculando el torque respecto a C vemos que $A_y = P$ y por equilibrio de fuerzas, $C_y = 0$.