Dinámica, 2-2025

Versión del 24 de noviembre de 2025

Prefacio

Estos apuntes están en construcción para el curso de Dinámica (2-2025). Es por esto que hay diversas partes inconclusas o que faltan algunas cosas.
Estas notas no pretenden reemplazar las clases y solo deben usarse como material complementario.
Es muy probable que existen diversos errores.
Actualizaciones:

- *Versión 19 de agosto: Se agrega la primera parte del capitulo de dinámica.*
- *Versión 25 de agosto: Se agrega movimiento relativo y algunos ejemplos.*
- *Versión 1 de septiembre: En capitulo de cinemática se ordenan los ejemplos en una sola sección. En el capitulo de dinámica se agregan mas ejemplos, algunos le faltan su solución.*
- *Versión 9/9: Se vuelve agrega tensión, fuerza elástica, movimiento armónico simple y roce viscoso.*
- *Versión 1/10: Se agrega capítulo de energía y trabajo.*
- *Versión 6/10: Se agrega Conservación de momentum.*
- *Versión 8/10: Se agrega ejemplo de energía y trabajo con resorte.*
- *Versión 9/10: Se corrige un error en el ejemplo de energía y trabajo con resorte. Agradecimientos a Miguel Alexandroff.*
- *Versión 15/10. Se agregan ejemplos de movimiento armónico simple y poleas.*
- *Versión 11/11: Se coeficiente de restitución. Introducción a dinámica de muchas partículas y solido rígido (aún incompleta).*
- *Versión 24/11: Solido Rígido Completo.*

Índice general

Prefacio I

1. Introducción Matemática 2
- 1.1. Análisis Dimensional . . . 2
  - 1.1.1. Ejemplos: . . . 3
- 1.2. Unidades de Medida . . . 3
  - 1.2.1. Ejemplos: . . . 4

2. Cinemática 5
- 2.1. Movimiento . . . 5
- 2.2. Cinemática en una dimensión . . . 6
  - 2.2.1. Lanzamiento vertical y caída libre . . . 8
- 2.3. Movimiento 2-dimensional . . . 8
  - 2.3.1. Movimiento Parabólico . . . 9
- 2.4. Coordenadas Polares y Cilíndricas . . . 10
  - 2.4.1. Coordenadas Polares . . . 10
  - 2.4.2. Coordenadas Cilíndricas . . . 13
- 2.5. Ejemplos . . . 14

3. Dinámica 19
- 3.1. Leyes de Newton . . . 19
- 3.2. Tipos de Fuerzas . . . 20
  - 3.2.1. Tensión en cuerdas . . . 21
- 3.3. Movimiento Relativo . . . 22
- 3.4. Diagrama de Cuerpo Libre . . . 24
- 3.5. Fuerzas no Conservativas: Fuerza de Roce . . . 25
- 3.6. Fuerza Elástica . . . 25
  - 3.6.1. Péndulo Simple . . . 27
- 3.7. Roce Viscoso . . . 28
- 3.8. Ejemplos: . . . 29

4. Trabajo y Energía 41
- 4.1. Trabajo . . . 41
- 4.2. Energía . . . 43
  - 4.2.1. Energía Cinetica . . . 43
  - 4.2.2. Energía potencial . . . 44

4.2.3. Energía potencial elástica . . . 45
4.3. Conservación de Energía. . . . 45
4.3.1. Fuerzas No Conservativas . . . 47
4.4. Ejemplos Resueltos. . . . 48

5. Momentum lineal y colisiónes **56**
5.1. Impulso . . . 57
5.2. colisiónes . . . 57
5.3. Coeficiente de Restitución . . . 57
5.3.1. Colisión en el centro . . . 57
5.3.2. Colisión oblicua . . . 58
5.4. Masa variable . . . 59
5.4.1. Flujo de masa . . . 59
5.4.2. Presión . . . 60
5.4.3. Segunda Ley de Newton . . . 60
5.5. Ejemplos: . . . 61

6. Colección de partículas y Cuerpo rígido **66**
6.1. Centro de Masa . . . 66
6.2. Torque . . . 67
6.3. Segunda Ley de Newton generalizada . . . 68
6.4. Cinematica circular . . . 69
6.5. Rotación de una colección de Partículas . . . 71
6.5.1. Segunda Ley de Newton . . . 71
6.5.2. Momentum angular . . . 72
6.5.3. Energía de rotación: . . . 73
6.5.4. Conservación de Energía . . . 74
6.6. Rotación de Cuerpo Rígido . . . 75
6.6.1. Segunda Ley de Newton . . . 75
6.6.2. Momento de Inercia . . . 77
6.7. Dinámica rotacional . . . 80
6.7.1. Energía de rotación. . . . 80
6.7.2. Tipos de Movimientos . . . 81
6.8. Ejemplo . . . 82

Capítulo 1

Introducción Matemática

Esta sección es para preparar algunas bases matemáticas para el desarrollo del curso. Pueden ser nociones sencillas pero no esta demás darle un tiempo para repasar algunos conceptos claves.

1.1. Análisis Dimensional

Distintas variables de un sistema tendrán diferentes dimensiones. Para entender esta idea mejor, consideremos ejemplos: La distancia tiene dimension de **Longitud**, el tiempo unidades de **Tiempo** y la masa unidades de **Masa**. La notación que usaremos será L: Longitud, T: Tiempo y M:Masa.

Para denotar la dimension de alguna variable X utilizaremos corchetes cuadrados $[X]$. Es decir,

$$[X] = \text{ dimension de la variable } X. \tag{1.1}$$

Supongamos sabemos que $d = 20m$ entonces $[d]$ =Longitud o simplemente $[X] = L$.

El análisis dimensional nos puede ayudar a saber si nuestras ecuaciones están bien o mal planteadas. Una ecuación del tipo

$$X + Y = Z \tag{1.2}$$

exige que las dimensiones cumplan $[X] + [Y] = [Z]$. Esto se traduce en que se debe cumplir

$$[X] = [Y] = [Z]. \tag{1.3}$$

Es decir, sumamos *peras con peras y manzanas con manzanas.* Consideremos otro caso:

$$\frac{1}{2}XW + Y = Z. \tag{1.4}$$

El factor numérico, $\frac{1}{2}$ en este caso, no cumple ningún rol en el análisis dimensional. Entonces las dimensiones deben cumplir:

$$[XW] = [Y] = [Z] \tag{1.5}$$

La dimension de una multiplicación es la multiplicación de las dimensiones, es decir:

$$[XW] = [X][W] = [Y] = [Z] \tag{1.6}$$

1.1.1. Ejemplos:

Ejemplo 1.
La siguiente ecuación,

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.7}$$

Considere que $[x] = [x_0] = L,\ [t] = T$. Entonces ¿cuál es la dimension de v y a? **Ejemplo 2.**

Considere:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.8}$$

donde $[m] = M$ y $[v] = \frac{L}{T}$. Obtenga la dimensión de E

1.2. Unidades de Medida

En la sección anterior encontramos que hay cantidades que poseen dimensión. A esta dimensión debemos darle un sentido tal que logremos dimensionar de *cuanto* estamos hablando.

En nuestro día a día, quizás sin darnos cuenta, utilizamos unidades de medida. Frases como:

- *Me da 3 kilogramos de tomate.*
- *Hoy camine 25 cuadras.*
- *Me demore 1 hora y 22 minutos en llegar a la universidad.*

tienen incluida unidades de medida que nos permiten entender la magnitud de lo que estamos hablando o pidiendo. La importancia de las unidades de medida se vuelve relevante al leer las frases previas sin incluir las palabras en rojo.

Las unidades de medida utilizadas en las frases previas son kilogramos, cuadras, hora que hacen referencia a masa, longitud y tiempo. Sin embargo podemos utilizar otras unidades de medida para describir exactamente la misma cantidad. Utilizando los ejemplos anteriores:

- *Me da 3000 gramos de tomate.*
- *Hoy camine 250 metro.*
- *Me demore 0.0569 días en llegar a la universidad.*

describen las mismas cantidades de masa, distancia y tiempo; pero en otras unidades.

Debido a esta arbitrariedad en la elección de las unidades es que la comunidad ha estandarizado distintos *sistemas de medidas*. En este curso utilizaremos el **Sistema Internacional de Unidades (S.I)** en el que las unidades básicas son:

- Masa: kilogramo,
- Longitud: metro,
- Tiempo: segundo

también se le conoce como MKS por (metro, kilogramo, segundo).

Sin embargo, hay otras unidades de medida tales como milla, día, libras, onzas, etc. Si nos dan alguna información en una unidad de medida que no conocemos, pero que sabemos como esta relacionado con una unidad de medida conocida, podemos transformar las unidades de medida.

1.2.1. Ejemplos:

Ejemplo 3.
En un viaje a Reino Unido, al preguntar donde queda nuestro hotel nos dicen que debemos caminar 5 millas. Sabiendo que 1 milla=1.6 km, ¿que distancia debemos caminar en km?

Ejemplo 4.
Si 1 libra = 453 g. ¿A cuanto equivale el famoso sandwich 1/4 de libra?

Capítulo 2

Cinemática

En este capitulo describiremos el movimiento de los objetos (no el porqué se mueven). Para esto debemos definir cantidades que serán claves para poder estudiar el movimiento.

2.1. Movimiento

Supongamos nos movemos de un punto a otro. Definiremos:

- **Desplazamiento:** Es un **vector** que va desde el origen hasta el punto final. Entonces lo escribiremos como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \tag{2.1}$$

  Donde el símbolo Δ significa *final-inicial*. En este caso, posición final menos posición inicial.

- **Distancia:** Es un número (escalar), que **no siempre es el modulo del desplazamiento!** y denota cuanto nos movimos, es decir depende de la curva que hagamos.

Por ejemplo: *Si corremos por una pista atlética y volvemos al inicio, nuestro desplazamiento fue cero (ya que punto final= punto inicial). Sin embargo, nuestra distancia recorrida fue de 400 m (el largo de la vuelta).*

Hemos descrito el cambio de posición, eso supone que en un tiempo, digamos inicial estábamos en una posición y tiempo después estuvimos en otro punto. Es decir, nos movimos. La cantidad que da cuenta de este cambio de posición en el tiempo es la **velocidad**. Definiremos:

- **Velocidad Promedio:** Es el desplazamiento de una partícula dividido por el intervalo de tiempo que le tomo realizar ese desplazamiento:

$$\vec{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

  Dado que es un vector, esta puede ser positiva o negativa.

- **Rapidez promedio:** Corresponde a la distancia recorrida dividido por el intervalo de tiempo que le toma realizar esa distancia:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo}} \tag{2.3}$$

Notemos que estas definiciones no nos entregan información sobre el detalle del recorrido. Veamos esto explicito en un ejemplo:

Salimos en auto a Puerto Varas, después de 20 minutos de viaje y 15 km recorridos nos damos cuenta que se nos olvido pasar a comprar cosas al supermercado por lo que nos devolvemos 5 km, lo que nos toma 5 minutos.
Entonces la velocidad promedio es: $\frac{10\ km}{25\ min}$, mientras que la rapidez promedio es: $\frac{25\text{km}}{25\ \text{min}}$.

La velocidad y la rapidez promedio no nos dieron información sobre la detención y el retorno que tuvimos que hacer. Para lidiar con estos "detalles" es que definimos:

- **Velocidad Instantánea:** Corresponde a la velocidad en un cierto punto (no intervalo) del recorrido. Esta definida como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.4}$$

  En un gráfico posición v/s tiempo, la velocidad instantánea corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva. Dado que es un vector, puede ser positiva, cero o negativa.

- **Rapidez Instantánea:** Corresponde al modulo de la velocidad instantánea. Al ser el modulo, es siempre mayor o igual a cero.

Hemos visto que para que el movimiento implica que hay una velocidad asociada. Es decir, la velocidad es el cambio de la posición en el tiempo. Podemos preguntarnos: ¿Cómo describo que en un tiempo dado tengo una velocidad dada, pero al llegar a destino, mi velocidad se vuelve cero? Es decir, ¿cómo describo el cambio de velocidad? Esto se hace definiendo:

- **Aceleración Promedio:**Es el cambio de la velocidad en un intervalo de tiempo:

$$\vec{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \tag{2.5}$$

- **Aceleración Instantánea:** Es el cambio de velocidad en un punto del movimiento:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.6}$$

2.2. Cinemática en una dimensión

En esta sección describiremos el movimiento en una dimensión, es decir, un objeto moviéndose en una linea (recta). Dado que se mueve solo a lo largo de una dimensión, utilizaremos solo una componente de cada uno de los vectores definidos en la sección previa.

Re-tomemos la definición de velocidad promedio

$$\vec{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

y dado que es un movimiento en una dimensión tendremos solo una de las componentes del vector. Además, recordando que $\Delta() = ()_{\text{final}} - ()_{\text{inicial}}$ tendremos

$$v_{\text{prom}} = \frac{r_{\text{final}} - r_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}} \tag{2.8}$$

Cuando hablamos de "final" en realidad queremos decir algún tiempo t que nos interese saber, no necesariamente el final del movimiento. Es por esto que escribiremos $r_f\text{final} = r(t)$. Por lo tanto:

$$v_{\text{prom}} = \frac{r(t) - r_{\text{inicial}}}{t - t_{\text{inicial}}}. \tag{2.9}$$

De aquí podemos ver:

$$r(t) = r_{\text{inicial}} + v_{\text{prom}}(t - t_{\text{inicial}}) \tag{2.10}$$

o de forma análoga:

$$r(t) = r_0 + v\Delta t. \tag{2.11}$$

donde hemos llamado $r_0 = r_f\text{inicial}$ y $\Delta t = t - t_0$. Esta ecuación nos entrega la posición de cualquier objeto que posea velocidad constante (es decir la aceleración es cero $a = 0$). Es importante notar que v_{prom} es la componente del vector $\vec{v}_{\text{prom}}$ por lo que puede ser negativo o positivo (también puede ser cero, pero en ese caso no hay movimiento).

Si estamos en un movimiento con aceleración distinta de cero, entonces de la definición de velocidad tendremos:

$$a_{\text{prom}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} \tag{2.12}$$

por lo tanto:

$$v(t) = v_0 + a_{\text{prom}}(t - t_0) \tag{2.13}$$

o de forma equivalente:

$$v(t) = v_0 + a\Delta t. \tag{2.14}$$

Notemos que, para aceleración constante:

$$v_{\text{prom}} = \frac{v_{\text{final}} + v_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}}. \tag{2.15}$$

Si tenemos un movimiento con aceleración, entonces la posición en un tiempo t será:

$$r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2.16}$$

Donde $r(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t, r_0 es la posición inicial, v_0 es la velocidad inicial y a es la aceleración.

Todas nuestras ecuaciones depende del tiempo t, sin embargo, si tenemos aceleración constante y no tenemos información sobre el tiempo t aún podemos trabajar las velocidades. Esto se puede lograr a través de:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a(r_f - r_0) \tag{2.17}$$

es decir, podemos escribir la velocidad final en función de las posiciones finales e iniciales.

De las definiciones de velocidad instantánea y aceleración podemos ver las siguientes relaciones:

$$r(t) - r_0 = \int_0^t v(t')dt', \quad v(t) - v_0 = \int_0^t a(t')dt' \tag{2.18}$$

Aceleración variable

¿Qué sucede si la aceleración cambia con el tiempo? Entonces la velocidad y la aceleración estarán relacionadas mediante:

$$v = \frac{a(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t a(t)dt = \int_0^t v(t)dt \tag{2.19}$$

2.2.1. Lanzamiento vertical y caída libre

Un ejemplo especial de movimiento es una dimension es el lanzamiento vertical y la caída libre. Debido a la acción de la gravedad que nos "empuja" hacia abajo, los objetos caen. Pensemos en dejar caer un objeto, en nuestras manos el objeto posee velocidad cero, pero al soltarlo este empieza a caer cada vez mas rápido, es decir esta sometido a una aceleración. Esta aceleración es la **aceleración de gravedad** que denotaremos como $g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$ y apunta hacia abajo. Como apunta hacia abajo, el vector aceleración de gravedad es $\vec{g} = -g\hat{j}$ donde el signo $-$ indica que va hacia abajo.

Entonces nuestras ecuaciones de movimiento unidimensional para estos casos son:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v(t) = v_0 - gt, \quad v_f^2 = v_0^2 - g(y_f - y_i) \tag{2.20}$$

donde usamos la letra y para enfatizar que el objeto se mueve a lo largo del eje y ya que sube/baja, el termino v_0 es la componente vertical de la velocidad por lo tanto puede ser positiva (lanzando hacia arriba) o negativa (lanzando hacia abajo)

Una característica importante del lanzamiento vertical es que al llegar a la altura máxima la velocidad del objeto es cero. Esto no significa que en este punto no tenga aceleración. De hecho la aceleración de gravedad es constante a lo largo de todo el vuelo. Por lo tanto: mientras sube, llega a su altura máxima y cae, siempre esta sometido a la misma aceleración de gravedad. De hecho, si al llegar a la altura máxima (velocidad cero) la aceleración fuese cero entonces la velocidad no cambia (quedaría en cero) y por lo tanto no caería.

2.3. Movimiento 2-dimensional

Al considerar un movimiento en dos dimensiones entonces el objeto mientras se mueve en el eje x también sube y baja. Es decir, el movimiento es tanto en el eje x como en el eje y. Entonces la posición de un objeto en cualquier tiempo t es dado por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{2.21}$$

dado que:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, \quad \vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j}, \quad \vec{v}_i = v_{i,x}\hat{i} + v_{i,y}\hat{j}, \quad \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{2.22}$$

donde $v_{i,x}$ es la velocidad inicial en el eje x y $v_{i,y}$ es la velocidad inicial en el eje y; de forma similar a_x es la aceleración en el eje x y a_y es la aceleración en el eje y.

Entonces la ecuación (2.21) se "separa" en la componente horizontal (eje x) y vertical (eje y). Dado que en el eje y siempre estará presente la aceleración de gravedad utilizamos $a_y = -g$ encontrando entonces:

$$\begin{aligned} \text{En el eje } x\text{, es decir horizontal} \quad & x(t) = x_i + v_{i,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ \text{En el eje } y\text{, es decir vertical} \quad & y(t) = y_i + v_{i,y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

De forma similar, la velocidad estará dada por:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \vec{a}t. \tag{2.24}$$

donde $\vec{v} = \vec{v}_x(t)\hat{i} + \vec{v}_y(t)\hat{j}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{En el eje } x\text{, es decir horizontal} \quad & v_x(t) = v_{i,x} + a_x t \\ \text{En el eje } y\text{, es decir vertical} \quad & v_y(t) = v_{i,y} - gt. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Usualmente, al resolver estos problemas nos encontraremos con sistemas de ecuaciones.

2.3.1. Movimiento Parabólico

Un caso especial de movimiento en dos dimensiones es el lanzamiento de proyectil o movimiento parabólico. Al lanzar un proyectil, este típicamente se moverá en el eje x, es decir avanza (o retrocede) y en el eje y (sube y/o baja). Una característica del lanzamiento de proyectiles es que **no** hay aceleración en el eje x. Es decir, las ecuaciones que gobiernan este tipo de movimiento son:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t,\ v_x = v_{x,0} \tag{2.26}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0,y} - \frac{1}{2}gt^2,\ v_y(t) = v_{y,0} - gt,\ v_y^2 - v_{0,y}^2 = -2g(y - y_0) \tag{2.27}$$

2.4. Coordenadas Polares y Cilíndricas

Hasta ahora descrito los vectores en coordenadas cartesianas, es decir:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \tag{2.28}$$

donde $\hat{x} = (1, 0)$ e $\hat{y} = (0, 1)$ son la base cartesiana. Sin embargo, la elección de coordenadas es, justamente, una elección. Usualmente uno elige las coordenadas de acuerdo a que facilita mas el estudio del fenómeno que queremos estudiar., en ese sentido las coordenadas cartesianas son muy útiles para describir movimientos rectilíneos o parabólico (el movimiento en x es rectilíneo) pero es poco practico para describir movimientos curvos como por ejemplo un movimiento circular u otros.

2.4.1. Coordenadas Polares

Supongamos queremos ir del punto A al B. Entonces, por ejemplo, podemos dar la siguiente información: *Debes caminar 3 m a la derecha y 4 m hacia arriba*. Esto en coordenadas cartesianas se lee como $\vec{r} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$. Sin embargo, también podemos dar la siguiente información: *Debes caminar 5 m en un ángulo de 36.67°* y llegamos al mismo punto. Es decir, podemos describir un punto utilizando información "rectangular" a describir el mismo punto usando radios y ángulos. Esta ultima idea es la semilla que conduce a las coordenadas polares.

Consideremos una trayectoria descrita por la linea amarilla de la imagen 2.1. Lo primero que pensamos es utilizar coordenadas cartesianas, es decir, utilizar la ecuación (2.28). Sin embargo, puedo utilizar otra base, en el caso de la figura, la base $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ para describir el mismo vector $\vec{r}$. Notemos que el vector que el vector $\vec{r}$ que llega al punto A, tiene un largo $r = |\vec{r}|$ y un

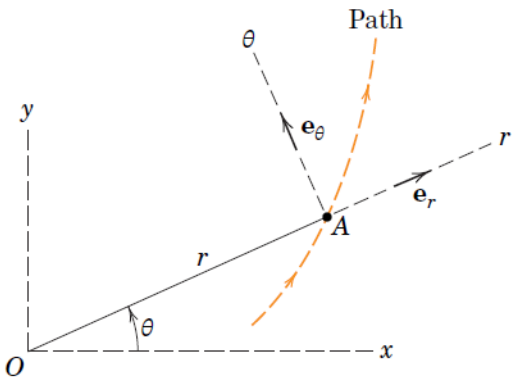


Figura 2.1: Trayectoria descrita por la linea amarilla

ángulo. Entonces, en coordenadas cartesianas podemos escribir el vector como:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} \\ &= r\cos(\theta)\hat{x} + r\sin(\theta)\hat{y} \\ &= r\left(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}\right)\end{aligned}$$

A pesar de haber escrito el vector $\vec{r}$ en función de radios, r, y el angulo, θ, el vector aún esta en base de $\hat{x},\ \hat{y}$, es decir, aun esta en coordenadas cartesianas. Sin embargo, notemos que si comparamos el termino $(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y})$ con $\mathbf{e}_r$, vemos que son iguales. Entonces:

$$\vec{r} = r\mathbf{e}_r, \tag{2.29}$$

Este corresponde al vector $\vec{r}$ en coordenadas polares.

De manera implícita, hemos relacionado el vector unitario $\mathbf{e}_r$ con $\hat{x}$ e $\hat{y}$. De manera similar, podemos relacionar el vector base $\mathbf{e}_\theta$ con $\hat{x}$ e $\hat{y}$ definiendo asi un cambio de coordenadas de coordenadas cartesianas a polares mediante mediante:

$$\mathbf{e}_r = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y},\ \mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y} \tag{2.30}$$

donde vemos que los vectores base de coordenadas polares $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ depende del ángulo θ.

Volviendo a cinemática, si ahora tenemos un vector posición en coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\mathbf{e}_r \tag{2.31}$$

entonces la velocidad será la derivada con respecto al tiempo. Para obtener la velocidad debemos derivar con respecto al tiempo, pero puede suceder que tanto el radio como el ángulo depende del tiempo, es decir $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$. Además, recordemos que $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta)$ y $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(\theta)$, es decir, los vectores unitarios en coordenadas polares dependen del ángulo y por lo tanto del tiempo. Entonces, usando derivada implícita tendremos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{2.32}$$

Asi como el cambio de posición en el tiempo es la velocidad, llamaremos al cambio de angulo en el tiempo **velocidad angular** definido como:

$$\omega = \dot{\theta} \tag{2.33}$$

De manera similar a como lo hicimos en coordenadas cartesianas, llamaremos v_r a la componente radial y v_θ a la componente angular:

$$\vec{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta,\ v_r = \dot{r},\ v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \tag{2.34}$$

notemos que hay una velocidad en dirección radial y una velocidad en dirección angular.

La aceleración corresponde a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.35}$$

$$= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \tag{2.36}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{2.37}$$

De manera similar, se define la aceleración angular como:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \tag{2.38}$$

Entonces, la aceleración en coordenadas polares se lee:

$$\vec{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta,\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\omega^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\alpha + 2\dot{r}\omega \tag{2.39}$$

es decir, hay una aceleración en dirección radial y una aceleración en dirección angular

Movimiento Circular

Una aplicación muy útil de las coordenadas polares es en el movimiento circular, es decir, una partícula que sigue una trayectoria circular. Un circulo tiene como característica que su radio no cambia, entonces:

$$\vec{r} = r\mathbf{e}_r, \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{2.40}$$

Entonces, para que haya movimiento circular debe haber velocidad angular, o de otra manera no habría velocidad. Si la velocidad angular es constante, entonces $\ddot{\theta} = 0$ y la aceleración sería:

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r \tag{2.41}$$

es decir, una aceleración en dirección radial, pero en dirección al centro del circulo: **Aceleración Centripeta**. En todo movimiento circular siempre hay aceleración centripeta. En la figura 2.2 esta el caso en que no hay aceleración angular ($\ddot{\theta} = 0$) y se gráfica la velocidad tangencial y la aceleración centripeta

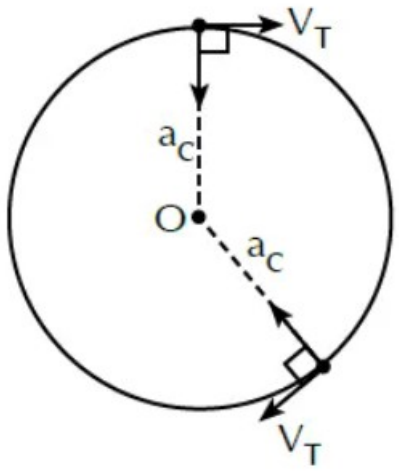


Figura 2.2: Velocidad tangencial y aceleración centripeta.

En general, la aceleración tiene una parte radial y otra angular (o tangencial):

$$a_r = -r\omega^2, \; a_\theta = r\alpha \tag{2.42}$$

tal como se ve en la figura 2.3 mientras que la velocidad tiene solo componente angular, o tangencial:

$$v_\theta = r\omega \tag{2.43}$$

Utilizando que $v_\theta = \int a_\theta dt$ podemos ver que:

$$v_\theta - v_{\theta,0} = r\omega - r\omega_0 = r\alpha t \Rightarrow \Delta\omega = \alpha t \tag{2.44}$$

Recordando que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, entonces encontramos:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \tag{2.45}$$

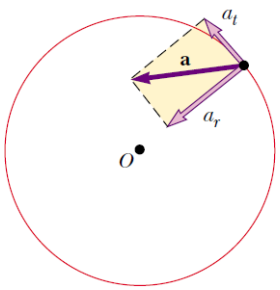


Figura 2.3: Aceleración centripeta (opuesta en la dirección radial) y aceleración tangencial.

En la figura 2.2 podemos ver la aceleración centripeta y la velocidad tangencial (es tangencial al circulo, es decir, en dirección angular)

Notemos que la velocidad angular, en el SI, tiene unidades de

$$\frac{\text{radianes}}{\text{segundos}} \tag{2.46}$$

Notemos que hemos considerado que el modulo de la velocidad tangencial es constante, a pesar de eso, hay aceleración centripeta.

2.4.2. Coordenadas Cilíndricas

Asi como en 2-dimensiones el vector posición en coordenadas cartesianas es dado por (2.28), un vector en 3-dimensiones en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},\\ \vec{v} &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z},\\ \vec{a} &= \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z},\end{aligned}$$

Entonces, podemos describir otras coordenadas en 3-dimensiones. Un ejemplo de estas son las coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas cilíndricas corresponden a considerar coordenadas polares en 2-dimensiones y agregar la tercera dimensión agregando $z\hat{z}$. Es decir, en coordenadas cilíndricas el vector posición es:

$$\vec{r} = r\mathbf{e}_r + z\hat{z} \tag{2.47}$$

entonces la velocidad y la aceleración simplemente son:

$$\vec{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\omega\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\hat{z} \tag{2.48}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\hat{z} \tag{2.49}$$

Ejemplo 5.
El tornillo de potencia parte del reposo y se le asigna una velocidad de rotación $\dot{\theta}$, que aumenta uniformemente con el tiempo t según$\dot{\theta} = kt$, donde k es una constante. Determine las expresiones para la velocidad v y la aceleración a del centro de la bola A cuando el tornillo ha dado una vuelta completa desde el reposo. El avance del tornillo por vuelta es L.

Solución Por Completar

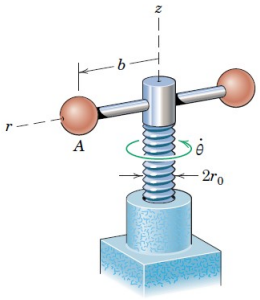


Figura 2.4: Tornillo de potencia girando

2.5. Ejemplos

Ejemplo 6.
Un saltador de salto largo se despega del suelo con velocidad de 9 $\frac{m}{s}$ y ángulo de 30º desde la horizontal. Obtenga su altura máxima y donde cae.

Solución Nos dan el modulo de la velocidad y el ángulo. Por lo tanto la velocidad será:

$$\vec{v_i} = 9\left(\cos(30^\circ)\hat{i} + \sin(30^\circ)\hat{j}\right) \Rightarrow v_{i,x} = 9\cos(30^\circ), \quad v_{i,y} = 9\sin(30^\circ) \tag{2.50}$$

además, solo posee aceleración en el eje y, es decir:

$$\vec{a} = -g\hat{j} \Rightarrow a_x = 0, \quad a_y = -g. \tag{2.51}$$

Para obtener la altura máxima, podemos considerar que la velocidad en el eje y en ese punto es cero. Por lo tanto:

$$v_y(t) = v_{i,y} - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{i,y}}{g} = \frac{9\sin(30^\circ)}{g} : \text{ Es el tiempo que tarda en llegar a la altura maxima.} \tag{2.52}$$

Entonces la altura máxima será la posición $y(t)$ con el tiempo que demoramos en llegar a la altura máxima:

$$\begin{aligned} y\left(t = \frac{9\sin(30^\circ)}{g}\right) &= 9\sin(30^\circ)\left(\frac{9\sin(30^\circ)}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{9\sin(30^\circ)}{g}\right)^2 \\ &= \frac{9^2\sin^2(30^\circ)}{g} - \frac{1}{2}\frac{9^2\sin^2(30^\circ)}{g} \\ &= \frac{1}{2}\frac{9^2\sin^2(30^\circ)}{g} \\ &= 1.03m \end{aligned}$$

Es decir, la altura máxima que logra es de 1.03 m.

Para obtener donde cae, podemos ver que el tiempo de vuelo, es decir el tiempo en que sube, llega a la altura máxima y cae es el doble del tiempo que demora en llegar a la altura máxima. Es decir, tarde en llegar:

$$t_{\text{vuelo}} = 2\frac{v_{i,y}}{g} = 2\frac{9\sin(30^\circ)}{g} = \frac{18\sin(30^\circ)}{g} \tag{2.53}$$

Por lo tanto, la posición horizontal, es decir en el eje x del saltador en el tiempo t_{vuelo} será:

$$\begin{aligned} x(t_{\text{vuelo}}) &= x\left(t = \frac{18\sin(30^\circ)}{g}\right) \\ &= 9\cos(30^\circ)t_{\text{vuelo}} \\ &= 9\cos(30^\circ)\frac{18\sin(30^\circ)}{g} \\ &= 7.15m \end{aligned}$$

Es decir, el saltador avanzo 7.15 m en el eje x y su altura máxima fue de 1.03 m.

Ejemplo 7.

Desde la cima de un edificio se lanza una pelota hacia arriba. Después de 1 segundo la pelota esta a una altura de 2 m desde el techo del edificio. Vemos que después de 10 segundos la pelota cae al suelo. Determine la altura del edificio. **Solución**Pondremos la altura inicial y_0 en el techo del edificio. Por lo tanto tendremos:

$$y(t = 1s) = v_0(1s) - \frac{1}{2}g(1s)^2 = 2 \Rightarrow v_0 = \left(2 + \frac{g}{2}\right)\frac{m}{s}. \tag{2.54}$$

Entonces, ya sabemos la velocidad inicial. Entonces, la posición de la pelota cuando choca el suelo nos dará la altura del edificio. La pelota choca con el suelo en $t = 10s$ por lo tanto buscamos la posición en $t = 10s$:

$$y(t = 10s) = v_0(10s) - \frac{1}{2}g(10s)^2 \tag{2.55}$$

$$= \left(2 + \frac{g}{2}\right)\left[\frac{m}{s}\right](10[s]) - \frac{g}{2}100[s^2] \tag{2.56}$$

$$= (20 + 5g)\,[m] - 50g[s^2] \tag{2.57}$$

utilizando $g = 9.8\left[\frac{m}{s^2}\right]$ tendremos:

$$y(t = 10s) = -421[m]. \tag{2.58}$$

Veamos que dio un numero negativo, esto se debe a que el suelo esta debajo de donde pusimos la altura inicial. Entonces podemos concluir que el edificio posee altura de 421m.

Ejemplo 8.

El movimiento curvilíneo de una partícula esta definido como $v_x = 50 - 16t$ y $y = 100 - 4t^2$, donde v_x esta en metros por segundo, y en metros y t en segundos. También se sabe que $x = 0$ cuando $t = 0$. Realizar el gráfico del camino de la partícula y determine su velocidad y aceleración cuando alcanza $y = 0$.

Solución De la definición de velocidad:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (50 - 16t)dt = 50t - 8t^2 \tag{2.59}$$

utilizando que $x(t = 0) = 0$ tenemos que $x_0 = 0$. Por lo tanto:

$$x(t) = 50t - 8t^2. \tag{2.60}$$

Además, la aceleración en x será:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -16\frac{m}{s}. \tag{2.61}$$

De manera similar, para el movimiento en el eje y tendremos:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -8t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -8\frac{m}{s} \tag{2.62}$$

Notemos que para llegar a $y = 0$, el tiempo que tarda, que llamaremos t^*, se obtendrá de resolver:

$$y(t^*) = 100 - 4(t^*)^2 = 0 \Rightarrow t^* = 5s \tag{2.63}$$

Entonces, en $t = 5s(= t^*)$, tendremos

$$v_x(t^*) = 50 - 16(5) = -30\frac{m}{s},\ v_y = -8(5) = -40\frac{m}{s},\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 50\frac{m}{s},\ a = 17.89\frac{m}{s^2} \tag{2.64}$$

Ejemplo 9.
¿Cuál es la aceleración centripeta del planeta tierra orbitando el sol? (Aproxime la órbita a un circulo de radio $r = 1.49 \times 10^{11}m$)

Solución El movimiento de la tierra al rededor del sol se puede aproximar a una circunferencia de radio $r = 1.49 \times 10^{11}m$. Utilizando:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{2.65}$$

donde v es la velocidad de la tierra. La velocidad de la tierra la obtenemos a partir de:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T}r \tag{2.66}$$

es decir, una vuelta completa dividido el tiempo, T. En este caso, el tiempo T corresponde a 1 año. Por lo tanto:

$$a_c = \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.49 \times 10^{11}m)}{(1\text{año})^2} = 5.93 \times 10^{-3}\frac{m}{s^2} \tag{2.67}$$

en la ultima igualdad hemos pasado de años a segundos.

Ejemplo 10.
Un auto exhibe una aceleración constante de $0.300\frac{m}{s^2}$ paralelamente a la calzada. El coche pasa por una subida de la calzada tal que la parte superior de la subida tenga la forma de un círculo de radio 500 metros. En el momento en que el automóvil está en la cima de la pendiente, su velocidad El vector es horizontal y tiene una magnitud de 6.00 $\frac{m}{s}$. ¿Cuál es la dirección del vector de aceleración total para el coche en este instante?

Solución El dibujo del problema es: Sabemos la velocidad tangencial $v_t = 6\frac{m}{s}$ y el radio $r = 500m$ por lo que podemos obtener la aceleracion centripeta:

$$a_c = \frac{v_t^2}{r} = \frac{36\frac{m^2}{s^2}}{500m} = 0.0720\frac{m}{s^2} \tag{2.68}$$

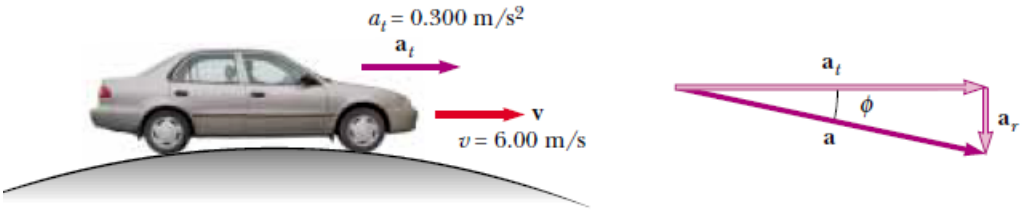


Figura 2.5: Diagrama del Ejemplo. Veamos que la aceleración tangencial forma un ángulo ϕ con respecto a la aceleración

El modulo de la aceleración total es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(0.0720)^2 + (0.3)^2} = 0.309 \frac{m}{s^2} \tag{2.69}$$

el ángulo es:

$$\tan(\phi) = -\frac{a_c}{a_t} \Rightarrow \phi = \arctan\left(-\frac{a_c}{a_t}\right) = -13.5^\circ \tag{2.70}$$

Ejemplo 11.
Una hormiga se mueve sobre una superficie de simetría polar, de acuerdo a la descripción en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{\rho} + z(t)\hat{k}$$

La superficie sobre la que se mueve la hormiga, se puede describir mediante la ecuación:

$$\rho(z) = \rho_0 \ln \frac{z}{z_0}$$

Si la hormiga se mueve según las ecuaciones:

$$z(t) = h_0 + u_0 t, \qquad \theta(t) = \omega_0 t,$$

con ρ_0, z_0, h_0, u_0 y ω_0 constantes positivas conocidas. Calcule:

a) El vector velocidad como función del tiempo, en las coordenadas cilíndricas planteadas.

b) El vector aceleración como función del tiempo, en las coordenadas cilíndricas planteadas.

Solución La velocidad, en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \tag{2.71}$$

entonces, es facil ver que:

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{\rho_0}{z}\dot{z} = \frac{\rho_0}{h_0 + u_0 t} u_0$$
$$\dot{\theta} = \omega_0$$
$$\dot{z} = u_0$$

Por lo tanto:

$$\vec{v} = \frac{\rho_0 u_0}{h_0 + u_0 t}\hat{\rho} + \rho_0 \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\omega_0\hat{\theta} + u_0\hat{k} \tag{2.72}$$

Mientras que la aceleración corresponde a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\vec{a} = -\frac{\rho_0 u_0^2}{(h_0 + u_0 t)^2}\hat{\rho} + 2\frac{u_0\rho_0\omega_0}{h_0 + u_0 t}\hat{\theta} - rho_0\omega_0^2 \ln\left(\frac{h_0 + tu_0}{z_0}\right)\hat{\rho} \tag{2.73}$$

Capítulo 3

Dinámica

Hasta ahora hemos estudiado la descripción del movimiento, podemos obtener cuánto tiempo vuela o donde cae un proyectil. Sin embargo, no hemos explicado que causa el movimiento.

3.1. Leyes de Newton

Para explicar que provoca el movimiento introduciremos las **leyes de Newton** o leyes del movimiento:

- **1ra Ley:** *En ausencia de fuerzas externas, un objeto con velocidad constante continua con velocidad constante.*

  Velocidad constante significa que puede ser negativa, positiva o cero, lo importante es que sea constante. Además, debemos recordar que la velocidad es un vector por lo que velocidad constante significa necesariamente que el objeto se mueve en linea recta.

- **2da Ley:** *La aceleración de un objeto es proporcional a la* **fuerza neta** *que actúa en ella e inversamente proporcional a la masa*

  $$\vec{F}_{\text{neta}} = \sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1}$$

  La fuerza neta es la suma de todas las fuerzas que actuan sobre el objeto. Debemos recordar que la fuerza es un vector por lo que esta ecuación se convierte en una ecuación para cada componente, es decir:

  $$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y \tag{3.2}$$

  En el sistema internacional la fuerza tiene unidades de Newton:

  $$[F] = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \tag{3.3}$$

- **3ra Ley:***Si dos objetos interactuan, la fuerza que hace el objeto 1 sobre el objeto 2, $\vec{F}_{12}$, es igual en magnitud y opuesta en sentido a la fuerza que hace el objeto 2 sobre el objeto 1, $\vec{F}_{21}$. Es decir:*

  $$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{3.4}$$

En la primera y segunda ley de Newton, nos importa la fuerza que actúa sobre UN objeto
A diferencia de la primera y segunda ley de Newton, la tercera ley nos habla sobre la fuerza entre DOS objetos.

Consecuencia de las leyes de Newton es que un objeto estará en reposo su la suma de fuerzas es cero.

3.2. Tipos de Fuerzas

Hay ciertas fuerzas que por su naturaleza merecen una descripcion especial.

Fuerza Peso

En la experiencia cotidiana, nos hemos dado cuenta que estamos parados en el suelo. Es más, si nos lanzamos de altura, caeremos al suelo, entonces estamos en movimiento por lo que hay una fuerza actuando. Esa fuerza que nos empuja de forma perpendicular al suelo es llamda fuerza de gravedad o fuerza peso. El peso esta definido como:

$$\vec{F}_g = m\vec{g}, \tag{3.5}$$

donde $\vec{g}$ es la aceleración de gravedad. Esta siempre va perpendicular al suelo, tal como se muestra en la figura 3.1

Fuerza Normal

Hemos visto que al estar parados en el suelo, la fuerza de gravedad nos empuja hacia el suelo, sin embargo, al estar en el suelo estamos quietos. Es decir la suma de fuerzas que sentimos es cero. Por lo tanto, la superficie debe estar haciendo una fuerza sobre nosotros. Esta es la fuerza **normal**.

La fuerza normal es una fuerza perpendicular a la superficie donde esta el objeto, es decir hace $90°$ con respecto a la superficie (la superficie no necesariamente es el suelo) tal como se muestra en la figura 3.1 y la denotamos como $\vec{N}$.

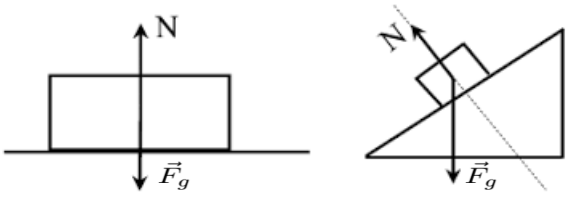


Figura 3.1: Fuerza Normal y fuerza de gravedad en una superficie horizontal y en un plano inclinado.

3.2.1. Tensión en cuerdas

Consideremos un objeto colgando de una cuerda, tal como se muestra en la figura 3.2. Si el objeto esta en reposo, entonces el peso que hace el objeto debe ser contrarrestado por otra fuerza, tal que la suma de fuerzas sobre el objeto sea cero. Esta fuerza la ejerce la cuerda y se le llama tensión de la cuerda y la denotaremos como T. Cabe destacar que en este curso



Figura 3.2: Objeto colgando de una cuerda

asumiremos que la cuerda es ideal, es decir: No tiene masa (o su masa es despreciable versus la masa del objeto), es inextensible (largo constante) y flexible (la fuerza solo de trasmite de manera longitudinal a la cuerda).

La fuerza tensión que siente el objeto va a lo largo de la cuerda. Entonces, por tercera ley de Newton, el otro extremo de la cuerda que esta afirmada en la mano (o un techo), debe ejercer una tensión también a lo largo de la cuerda, pero esta vez, hacia abajo.

Para determinar la tensión debemos trabajar las leyes de Newton para el caso que corresponda.

Maquina de Atwood

Consideremos el siguiente sistema de Poleas con cuerdas inextensibles e ideales mostrado en la figura 3.3 Entonces, haciendo el diagrama de cuerpo libre tendremos:

$$T_1 - mg = ma_1, \quad T_2 - Mg = Ma_2 \tag{3.6}$$

donde a_1 y a_2 son las aceleraciones de cada bloque. Debemos notar que tenemos 4 incógnitas: $T_1,\ T_2,\ a_1,\ a_2$ y dos ecuaciónes. En principio el sistema no tiene solución, sin embargo debemos considerar las **condiciones de ligadura**. Las condiciones de ligadura son relaciones que establecen relaciones entre distintas coordenadas del sistema. En este caso, sabemos que la cuerda es inextensible por lo tanto lo que "sube" la masa m debe "bajar" la masa M. En la practica esto se traduce en que:

$$z_1 + z_2 = l = \text{largo de la cuerda que es constante} \tag{3.7}$$

Por lo tanto: $a_1 + a_2 = 0$. Entonces, tenemos cuatro incognitas y tres ecuaciónes (las dos de movimiento mas la condicion de largo constante de la cuerda). Aún podemos explotar mas la

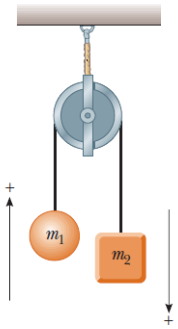


Figura 3.3: Dos masas m y M conectadas mediante una polea

condición de ligaduras, en este caso, que la cuerda es ideal entonces las tensiones que sufren son las mismas, es decir: $T_1 = T_2 = T$.
Entonces, el sistema de poleas cumple:

$$T - mg = ma_1,\ T - Mg = -Ma_1 \tag{3.8}$$

Entonces, obteniendo T de alguna de las ecuaciónes de arriba y reemplazando en la otra ecuación encontramos:

$$a_1 = \frac{m-M}{m+M}g, \quad z_2 = \frac{M-m}{m+M}g \tag{3.9}$$

y la tensión es:

$$T = 2\frac{mM}{m+M}g \tag{3.10}$$

3.3. Movimiento Relativo

Intuitivamente el movimiento esta asociado a la velocidad, si algo tiene velocidad entonces se mueve. Sin embargo, las leyes de Newton o leyes del movimiento no consideran la velocidad, sino la aceleración (esto es explicito en $\vec{F} = m\vec{a}$). Entonces, porque el movimiento de un objeto esta asociado a la aceleración y no a la velocidad? Para responder esto, debemos considerar el *movimiento relativo*.

Ahora consideremos la partícula O que esta siendo observada por dos observadores: A y B que pueden tener movimientos curvilíneos independientes en un plano dado o en planos paralelos (Figura.3.4). Adjuntaremos arbitrariamente el origen de un sistema de ejes traslacionales (no rotatorios) x–y al observador B y observaremos el movimiento de O desde nuestra posición en B. El vector de posición de O medido relativo al sistema de referencia x–y es

$$\mathbf{r}_B = x\hat{i} + y\hat{j},\ \text{Posición de } O \text{ con respecto a } B$$

Para el observador A, el observador B esta definido por el vector $\vec{r}_{A/B}$: *Posición de B con respecto a A*, medido desde el origen de los ejes fijos X–Y. Además, A observara a la partícula

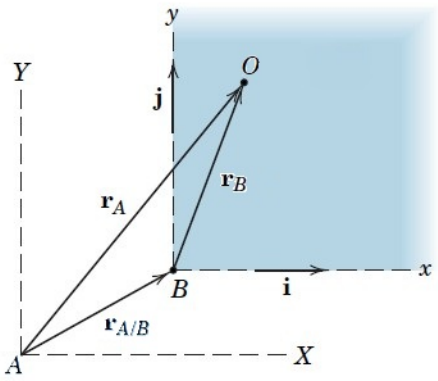


Figura 3.4: asdf

O a través del vector [1]

$$\vec{r}_A = X\hat{i} + Y\hat{j} \tag{3.11}$$

Entonces, tenemos dos observadores A y B midiendo la posición de la misma partícula O. Ambas posiciones están relacionadas mediante:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{AB} \tag{3.12}$$

es decir, es la suma de vectores. [2] Tomando una derivada con respecto al tiempo tendremos las velocidades:

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{AB} \quad \text{o} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB} \tag{3.13}$$

una derivada mas conduce a la aceleración:

$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}_{AB} \quad \text{o} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB} \tag{3.14}$$

Por supuesto, estas relaciones se pueden invertir.

Diremos que el sistema es inercial si la velocidad de B es constante con respecto a A. Es decir:

$$a_{AB} = 0 \tag{3.15}$$

Entonces:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{AB},\ \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB},\ \vec{a}_A = \vec{a}_B \tag{3.16}$$

Entonces, para A y B:

- No necesariamente medirán la misma posición para el objeto. En palabras simples, para uno puede estar cerca y para otro lejos.

[1] No es necesario que ambos observadores utilicen las mismas coordenadas. Cada observador puede describir el vector posición con las coordenadas que mas le acomode.

[2] Notemos que hemos asumido que el tiempo es universal, es decir A y B tienen el mismo tiempo. En relatividad especial, esta condición ya no esta. Lo que es igual para ambos es la velocidad de la luz que miden; por esto el dicho: "la velocidad de la luz es constante".

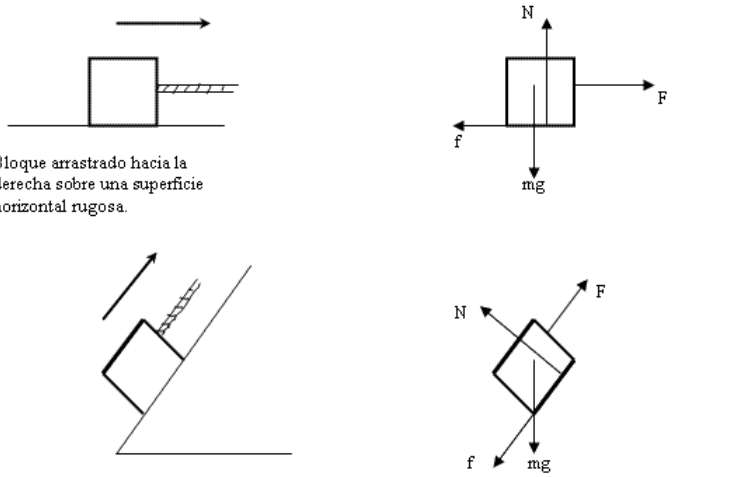
- No necesariamente medirán la misma velocidad para el objeto. En palabras simples, para uno puede moverse rápido y para otro lento, o incluso no moverse. Es decir, la velocidad es relativa por lo tanto si para uno se mueve, para otro observador puede ser que no.
- Van a medir la misma aceleración, es decir, observaran el mismo .

Debido al ultimo punto es que las leyes de Newton (en sistemas inerciales), que utilizan la aceleración y no la velocidad, son las que realmente nos dicen si algo se mueve o no.

Cabe destacar que la discusión es exactamente la misma si consideramos que el observador B es otro cuerpo que se mueve. Es decir, podríamos considerar dos cuerpos moviéndose y un observador (en vez de dos observadores midiendo un fenómeno) y la física ni la descripción cambia.

3.4. Diagrama de Cuerpo Libre

El diagrama de cuerpo libre (DCL) es la representación grafica donde dibujaremos todas las fuerzas que actúan sobre **un** cuerpo. Tipicamente se ven como en las figuras



Bloque arrastrado hacia la derecha sobre una superficie horizontal rugosa.

Bloque arrastrado hacia arriba sobre un plano inclinado rugoso.

Bloques en contacto empujados hacia la derecha sobre una superficie sin fricción.

Note que P' y P son un par acción-reacción, esto es, la fuerza (P') que el bloque m_2 hace sobre m_1, es igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza (P) que el bloque m_1 hace sobre m_2. **P = -P'**

3.5. Fuerzas no Conservativas: Fuerza de Roce

La fuerza de roce es aquella que se opone al movimiento. Es importante destacar que va en dirección opuesta al movimiento en el punto de contacto de un objeto y otro, es decir es una fuerza de contacto.

En nuestra experiencia diaria nos podemos dar cuenta que cuesta mas empezar a mover un objeto que mantenerlo en movimiento. Es decir hay dos fuerzas de roce:

- Roce estático: Es la fuerza de roce que se opone a que se ponga en movimiento un objeto:

$$F_{re} \leq \mu_e N \tag{3.17}$$

  donde μ_c es el coeficiente de roce estático y N es el modulo de la fuerza normal. El coeficiente de roce s un número que depende del material y no posee dimensiones.

- Roce cinético: Es la fuerza de roce cuando el objeto esta en movimiento:

$$F_{rc} = \mu_c N \tag{3.18}$$

  donde μ_c es el coeficiente de roce cinético. Este depende del material y es adimensional y N es el modulo de la fuerza normal.

En general, $\mu_c < \mu_e$.

3.6. Fuerza Elástica

Consideremos un resorte (o elástico), estos posee un largo natural que llamaremos $\vec{x}_0$. En la experiencia cotidiana, hay resortes que son mas fáciles de estirar que otros, esta característica es una propiedad del resorte que llamaremos *constante elastica*. La constante elástica es un numero. Además, también podemos notar que si estiramos un resorte, la aceleración con la que se devuelve depende de cuanto lo estiremos. Esto induce a pensar en que hay una fuerza elastica. Formalicemos esta idea.

Si estiramos el resorte hasta un largo $\vec{x}$, como se muestra en la Figura 3.5. Entonces este hará una fuerza para volver a su largo natural, es decir la fuerza que hace el resorte se opone al estiramiento. La fuerza que haga el resorte también depende de la constante del resorte. Por otro lado, si contraemos el resorte, este también buscará volver a su largo natural. Entonces podemos decir que la fuerza que **hace el resorte** es:

$$\vec{F}_e = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) = -k\Delta\vec{x} \tag{3.19}$$

donde $\vec{F}_e$ es la fuerza elástica. Esta fuerza es conocida como Ley de Hooke. De esta ecuación podemos ver que en el SI, las unidades de la constante k con $\frac{\mathsf{N}}{\mathsf{m}}$.

Si colocamos el sistema de referencia en el largo natural del resorte, entonces $\vec{x}_0 = 0$ y tendremos que la fuerza que hace el resorte para volver a su largo natural será:

$$\vec{F}_e = -k\vec{x} \tag{3.20}$$

donde $\vec{x}$ es cuanto estiramos el resorte desde el origen.

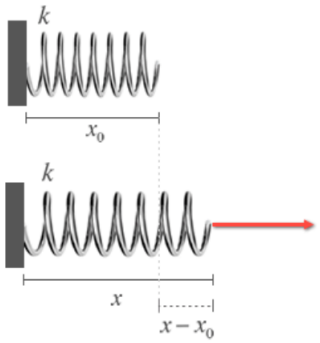


Figura 3.5: Resorte de constante k siendo estirado un largo x.

Supongamos tenemos un bloque de masa m unido a un resorte de constante k. Este bloque esta sobre una superficie sin roce y estiramos el resorte un longitud $\vec{x}$. Al soltar el sistema, esperamos que el bloque oscile en torno al largo natural del resorte y dado que no hay roce, no se detendrá. De la segunda ley de Newton, tendremos que la ecuación de movimiento que sigue el bloque será:

$$-k\vec{x} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} + \omega^2\vec{x} = 0 \tag{3.21}$$

donde

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.22}$$

a la variable ω se le conoce como frecuencia de oscilación o frecuencia angular y es la frecuencia a la que oscila la masa m unida al resorte de constante k. Utilizando la relación entre aceleración y posición encontramos que la ecuación de movimiento que sigue el bloque de masa m unida a un resorte de constante k es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.23}$$

Esta ecuación se conoce como **ecuación del oscilador armónico**[3]

La solución a la ecuación de oscilador armonico es dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{3.24}$$

donde A y B son constantes que se determinan a partir de las condiciones del problema en $t = 0$. Es fácil ver que:

$$x(0) = A. \tag{3.25}$$

La constante B se obtiene de la velocidad. La velocidad del bloque en cualquier momento será

$$v(t) = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) + B\omega\cos(\omega t) \tag{3.26}$$

por lo que

$$v(0) = B\omega. \tag{3.27}$$

[3]Básicamente cualquier ecuación que satisfaga: *la segunda derivada de una función mas una constante por esta función igual a cero* es la ecuación de un oscilador armónico.

Dado que el seno y coseno siempre están entre -1 y 1, existen la posición y velocidad máxima y mínimas. Es más, las funciones trigonométricas son periódicas por lo que estos máximos/mínimos se repiten. Para ver esto explicitamente consideremos que $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$, que se traduce en que:

$$x(t^*) = A\cos(\omega t^*) + B\sin(\omega t^*), \tag{3.28}$$

donde t^* es el tiempo que tarda en que sean iguales. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x(t^*) &= A\cos(\omega t^* + 2\pi) + B\sin(\omega t^* + 2\pi) \\ &= A\cos\left(\omega\left(t^* + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) + B\sin\left(\omega\left(t^* + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) \end{aligned}$$

O, escrito de otra forma:

$$x(t) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \tag{3.29}$$

es decir, la posición tiene período:

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.30}$$

Otra manera de escribir la solución (3.24) es:

$$x(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t - \delta) \tag{3.31}$$

donde $\mathcal{A}$ se le conoce como amplitud del movimiento y δ es la fase que es constante. Para demostrar que son iguales basta considerar la formular del coseno de la suma:

$$x(t) = \mathcal{A}\cos(\delta)\cos(\omega t) + \mathcal{A}\sin(\delta)\sin(\omega t) \tag{3.32}$$

donde δ es constante. Llamando

$$A = \mathcal{A}\cos(\delta), \quad B = \mathcal{A}\sin(\delta) \tag{3.33}$$

recuperamos (3.24).

La aceleración del bloque será:

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.34}$$

por el mismo argumento que la velocidad, la aceleración máxima sera:

$$a_{\text{max}} = \omega^2 A. \tag{3.35}$$

3.6.1. Péndulo Simple

Un péndulo simple consiste en una masa que cuelga de una cuerda ideal de longitud L atada a un punto fijo, como se ve en la figura 3.6 Si bien, no contiene un resorte, como veremos, contiene básicamente el mismo comportamiento que un sistema masa-resorte.

Del DCL de la masa m se ve que, en coordenadas polares, la suma de fuerzas es:

$$\sum \vec{F} = mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} - T\hat{r} = (mg\cos(\theta) - T)\hat{r} - mg\sin\theta\hat{\theta} \tag{3.36}$$

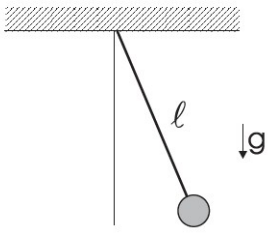


Figura 3.6: Masa m colgando de una cuerda que se mueve solo por efecto de su peso

Utilizando que la aceleración en coordenadas polares a radio L : constante es:

$$\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\hat{r} + L\ddot{\theta}\hat{\theta} \tag{3.37}$$

Entonces:

$$mg\cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2 \tag{3.38}$$

$$mL\ddot{\theta} + mg\sin(\theta) = 0 \tag{3.39}$$

La ultima ecuación es de la forma:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin(\theta) = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{3.40}$$

Las ecuaciónes (3.38) y (3.39) corresponden a ecuaciónes que debemos resolver para T y θ. Este ultimo esta derivado dos veces, por lo que debemos fijar dos condiciones iniciales: La posición inicial de la masa, $\theta(0)$ y la velocidad angular inicial de la masa $\dot{\theta}(0)$.

Notemos que en la ecuación (3.39), solo esta la incognita θ, por lo que no es necesario conocer T para resolverla. Sin embargo, la solución de esta ecuación es en termino de funciones elipticas que escapa al objetivo de este curso. Pero, podemos simplificar el sistema si consideramos *pequeñas oscilaciones*. Esto significa que estudiaremos el péndulo cuando θ es pequeño, es decir, la masa se mueve poco con respecto a su posición de reposo ($\theta = 0$). Entonces,

$$\sin(\theta)|_{\theta\sim 0} \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \tag{3.41}$$

Entonces, como θ es pequeño (θ pequeño con respecto a 1 rad), $\theta^3 \ll \theta$ y podemos aproximar $\sin(\theta) \approx \theta$. Entonces la ecuación (3.39) es:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \tag{3.42}$$

3.7. Roce Viscoso

Un cuerpo que se mueve en un fluido (o aire) experimenta una fuerza que se opone a su movimiento que se llama **roce viscoso**. Esta fuerza se opone al movimiento del cuerpo y

depende de la velocidad y geometría del cuerpo (es proporcional a la superficie transversal al movimiento del cuerpo). A bajas velocidades, esta fuerza se puede modelar como:

$$\vec{F}_v = -b\vec{v} \tag{3.43}$$

donde b es una constante que es proporcional a la viscosidad del fluido y la superficie del cuerpo transversal al movimiento.

Un ejemplo típico de viscosidad es el roce del aire en un cuerpo cayendo. La suma de fuerzas será:

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} = -mg\hat{k} - b\dot{z}\hat{k} \tag{3.44}$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento será:

$$-mg - b\dot{z} = m\ddot{z} \tag{3.45}$$

sujeto a las condiciones iniciales $z(0) = h$ y $\dot{z} = 0$ (se deja caer el objeto). Esta ecuación es mas fácil trabajarla considerando la velocidad en vez de la aceleración ($v = -\dot{z}$)

$$m\dot{v} + bv = mg \tag{3.46}$$

cuya solución es:

$$v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b} \tag{3.47}$$

donde A es una constante de integración a determinar. Usando $v(0) = 0$ se encuentra que:

$$A = -\frac{mg}{b} \tag{3.48}$$

y por lo tanto:

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{\frac{b}{m}t}\right) \tag{3.49}$$

Notemos que, para tiempos pequeños ($t < b/(2m)$) podemos expandir la exponencial encontramos:

$$v(t)|_{\text{corto tiempo}} \approx gt \tag{3.50}$$

es decir, al inicio de la caída no se siente el roce viscoso y se comporta como caída libre.

Para tiempos grandes, es decir $bt/m \gg 1$, la exponencial se va a cero y nos queda:

$$v = \frac{mg}{b} \tag{3.51}$$

que es constante por lo que es una velocidad terminal

3.8. Ejemplos:

Ejemplo 12.

Los pasajeros del avión de pasajeros A, que vuela hacia el este a una velocidad de 800 km/h, observan un segundo avión, B, que pasa por debajo del avión en vuelo horizontal. Aunque el morro del avión B apunta a 45° al noreste, los pasajeros del avión A perciben que el avión B se aleja del avión en un ángulo de 60°, como se muestra. Determine la velocidad real de B.

SoluciónPor Completar

Ejemplo 13.

Un puck de hockey de 0.3 kg de masa se desliza de forma horizontal sin roce. Dos palos de hockey golpean el puck de manera simultanea tal como muestra la Figura 3.7.

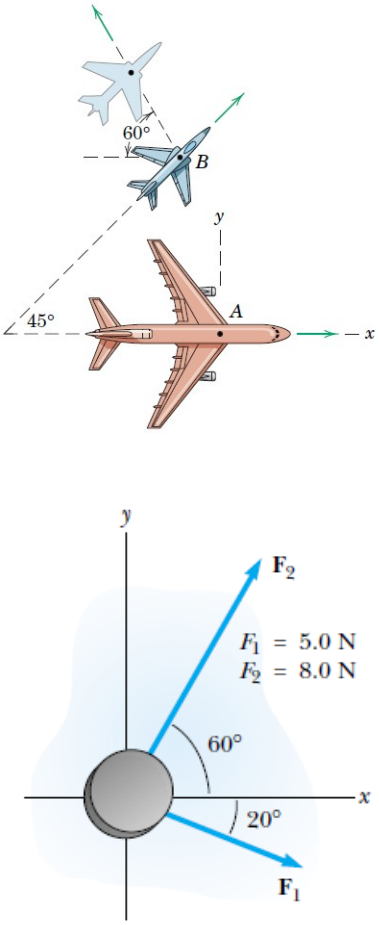


Figura 3.7: Puck con sus fuerzas

a) Determine la aceleración.

b) ¿Qué fuerza se debe ejercer para que el puck quede en reposo?

Solución La segunda Ley de Newton nos pide obtener la suma de fuerzas. La suma de fuerzas por componentes son:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} \\ &= F_1\cos(-20^\circ) + F_2\cos(60^\circ) \\ &= 5\cos(-20^\circ) + 8\cos(60^\circ) \\ &= 8.7\text{N} \\ \sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} \\ &= F_1\sin(-20^\circ) + F_2\sin(60^\circ) \\ &= 5.2\text{N}\end{aligned}$$

esto, debe ser igual a la masa por la aceleración, es decir:

$$\sum F_x = 8.7N = ma_x = 0.3a_x \Rightarrow a_x = 29\frac{m}{s^2} \tag{3.52}$$

$$\sum F_y = 5.9N = ma_y = 0.3a_y \Rightarrow a_y = 17.3\frac{m}{s^2}. \tag{3.53}$$

Por lo tanto, $\vec{a} = (29\hat{i} + 17.3\hat{j})\frac{m}{s^2}$. Si queremos que el puck quede detenido, debemos agregar una tercera fuerza $\vec{F}_3$ tal que:

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 8.7 + F_{3x} = 0 \Rightarrow F_{3x} = -8.7\text{N}. \tag{3.54}$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 5.2 + F_{3x} = 0 \Rightarrow F_{3y} = -5.2\text{N} \tag{3.55}$$

Ejemplo 14.
Un auto de masa $m = 500kg$ esta sobre una superficie sin roce inclinado en un angulo $\theta = 30°$.

a) Obtener la aceleración del auto

b) Suponga que se libera del reposo y hay una distancia $d = 500m$ hasta la base. ¿Cuánto tiempo tarde en llegar al final del plano inclinado y cuál es su velocidad?

Solución El DCL es: Utilizaremos la segunda ley de Newton. Para esto pondremos el sistema

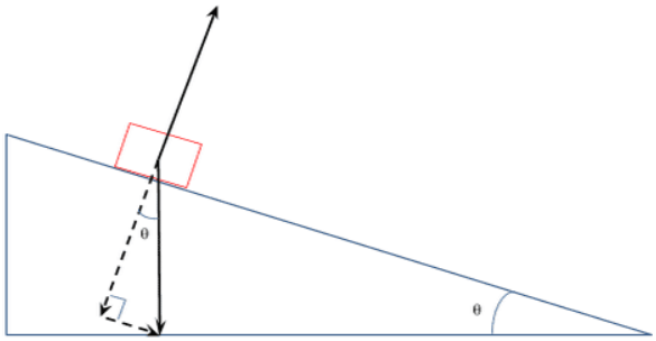


Figura 3.8: El vector fuerza normal y el vector fuerza peso.

de referencia inclinado donde el eje x es paralelo al plano inclinado y el eje y es paralelo al vector normal.

Entonces, la suma de fuerza en cada componente es:

$$\sum F_x = mg\sin(\theta) = ma_x \quad \sum F_y = N - mg\cos(\theta) = 0 \tag{3.56}$$

esto porque, debido al sistema de referencia que escogimos, solo hay movimiento en el eje x, mientras que en el y el bloque no se mueve. De aquí vemos que la aceleración del bloque es:

$$a_x = g\sin(\theta). \tag{3.57}$$

usando los datos del problema tendremos:

$$a_x = g\sin(30°) = \frac{g}{2} \tag{3.58}$$

Teniendo la aceleración, podemos utilizar las ecuaciónes de cinemática para obtener cuanto tiempo se demora en cubrir la distancia d. Dado que el bloque solo posee movimiento en el eje x, es un movimiento en una dimension a lo largo del eje x. Entonces la posición en el eje x a cualquier tiempo será:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{3.59}$$

como parte del reposo, $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$ entonces:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2 \tag{3.60}$$

entonces el tiempo que tarde en recorrer la distancia d es t_d será:

$$x(t_d) = d = \frac{1}{2} g \sin(\theta) t_d^2 \tag{3.61}$$

luego:

$$t_d = \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} \tag{3.62}$$

utilizando los valores del problema:

$$t_d = \sqrt{\frac{500}{9.8 \times \sin(30°)}} = 10.10s \tag{3.63}$$

Ejemplo 15.
Un pequeño objeto de masa m está suspendido de una cuerda de longitud L. El objeto gira con velocidad constante v en una trayectoria horizontal círcular de radio r, como se muestra en la Figura 3.13 . (Porque la cuerda barre la superficie de un cono, el sistema es conocido como péndulo cónico). Encuentre una expresión para v.

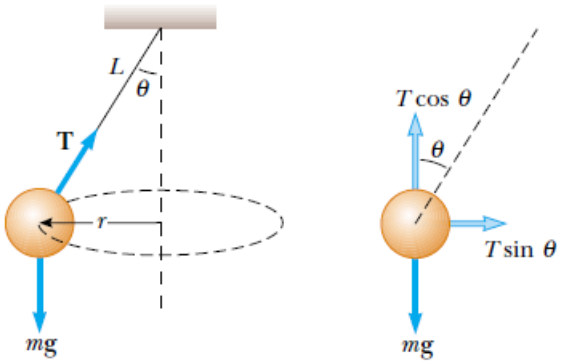


Figura 3.9: DCL del pendulo conico

Solución De la Figura 3.13 podemos ver que las fuerzas que actuan en dirección radial al movimiento es:

$$T \sin(\theta) = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Tr \sin(\theta)}{m}} \tag{3.64}$$

hemos usado que $T\sin(\theta)$ es la componente de la tension se proyecta al radio de la circunferencia. Notemos que la velocidad depende de la tensión y el radio, ambas variables desconocidas.

Para obtener la tension notemos que en el eje vertical no hay movimiento por lo que se debe cumplir

$$T\cos(\theta) - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos(\theta)} \tag{3.65}$$

Además, el radio es el cateto opuesto de la cuerda de largo L y ángulo θ por lo que:

$$\sin(\theta) = \frac{r}{L} \Rightarrow r = L\sin(\theta) \tag{3.66}$$

Entonces, la velocidad de la masa será:

$$v = \sqrt{\frac{Tr\sin(\theta)}{m}} = \sqrt{gL\sin(\theta)\tan(\theta)}. \tag{3.67}$$

Ejemplo 16.

Un piloto de masa m en un avión jet ejecuta una vuelta, como se muestra en la figura. En esta maniobra, el avión se mueve en un círculo vertical de 2.70 km de radio con una rapidez constante de 225 m/s.

1. Determine la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte inferior de la vuelta. Exprese su respuesta en términos del peso del piloto mg.

2. Resolver para la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte superior del rizo.

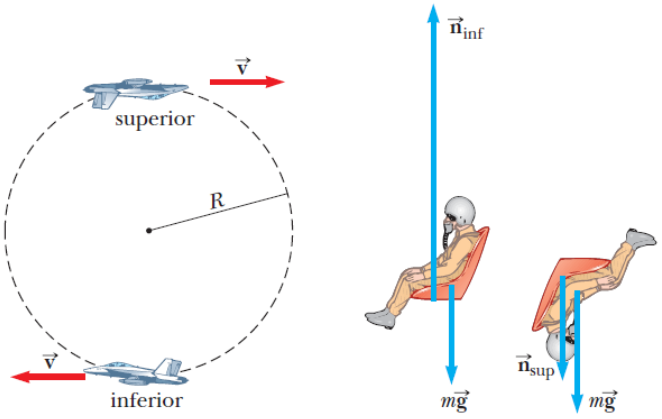


Figura 3.10: Avión girando

Solución

1. En la parte inferior, las fuerzas que sentira el piloto son el peso, mg, y la fuerza normal N que produce la silla sobre él. Por lo tanto, la suma de fuerzas será:

$$N - mg = F_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = m\frac{v^2}{R} + mg = m\left(\frac{225^2}{2700} + 9.8\right) = m28.55 \tag{3.68}$$

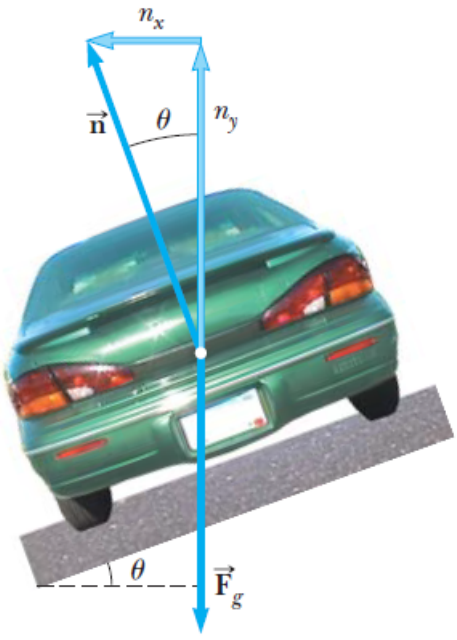
Notemos que $28.55 = 2.91g$, es decir, el asiento ejerce casi $3g$ de fuerza sobre el piloto provocando que este se sienta mas pesado.

2. En la parte superior, tendremos:

$$N + mg = F_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = m(\frac{v^2}{R} - g) = m8.95 \tag{3.69}$$

es decir, en la parte superior el piloto sentirá un peso de $m0.91g$ veces su peso en la tierra

Ejemplo 17.
Un ingeniero civil quiere rediseñar la curva de la autopista de la figura en tal forma que un automóvil no tenga que depender de la fricción para circular la curva sin derrapar. En otras palabras, un automóvil que se traslada a la rapidez diseñada puede superar la curva incluso cuando el camino esté cubierto con hielo. Dicha rampa será peraltada, lo que significa que la carretera está inclinada hacia el interior de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s y el radio de la curva es 35.0 m.¿Cuál es el ángulo de peralte?



Ejemplo 18.
Un bloque de masa m=2.00 kg se libera desde el reposo en h=0.500 m sobre la superficie de una mesa, en lo alto de un plano inclinado de $\theta = 30.0°$, como se muestra en la figura. El plano posee coeficiente de roce de $\mu = 0.2$ y está fijo sobre una mesa de altura $H = 2.00$ m.

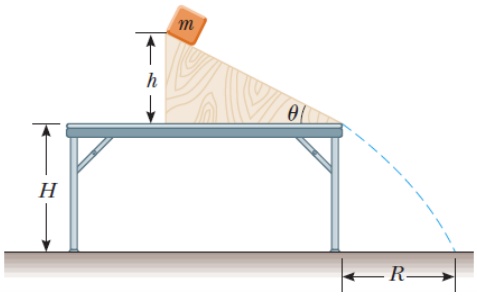
a) Determine la aceleración del bloque mientras se desliza por el plano.

b) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando deja el plano?

c) ¿A qué distancia de la mesa el bloque golpeará el suelo?

d) ¿Qué intervalo de tiempo transcurre entre la liberación del bloque y su golpe en el suelo?

e) Compare sus resultados al caso en que no haya roce.



Solución

a) Ubicando el sistema de referencia inclinado, con el eje x paralelo al plano tendremos que la suma de fuerza son:

$$\sum F_x = mg\sin(\theta) - F_r = ma \Rightarrow a = \frac{mg\sin\theta - F_r}{m} \tag{3.70}$$

$$\sum F_y = N - mg\cos(\theta) = 0 \tag{3.71}$$

Utilizando $F_r = N\mu$ y $N = mg\cos(\theta)$ tendremos:

$$a = g\sin(\theta) - \mu g\cos(\theta) = 3.2\frac{m}{s^2}. \tag{3.72}$$

b) En el eje x se tiene un movimiento con aceleracion constante $a = 3.2\frac{m}{s^2}$. Además, dado que se conoce el ángulo θ y la altura h, tenemos que la posicion final será de $x_f = \frac{h}{\sin(\theta)} = 1m$, entonces utilizando $v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$ con $v_i = 0$ (ya que parte del reposo) y $x_i = 0$ tendremos:

$$v_f^2 = 2ax_f = 6.4\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_f = \sqrt{2ax_f} = 2.53\frac{m}{s}. \tag{3.73}$$

c) Este problema ahora es de cinemática con velocidad inicial

$$\vec{v_i} = 2.53(\cos(\theta)\hat{i} - \sin(\theta)\hat{j}) = 2.53(\cos(30°)\hat{i} - \sin(30°)\hat{j}) \tag{3.74}$$

y aceleración $\vec{a} = -g\hat{j}$.

Ejemplo 19.

Maquina de Atwood Considere el sistema de la figura compuesto por masa $m_1 = 1kg$ y $m_2 = 2kg$. Determine la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda

Ejemplo 20.

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable atado a dos otros cables sujetos a un soporte, como se muestra en la Figura 3.11. Los cables superiores forman ángulos de 37° y 53° con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como los verticales. cable, y se romperán

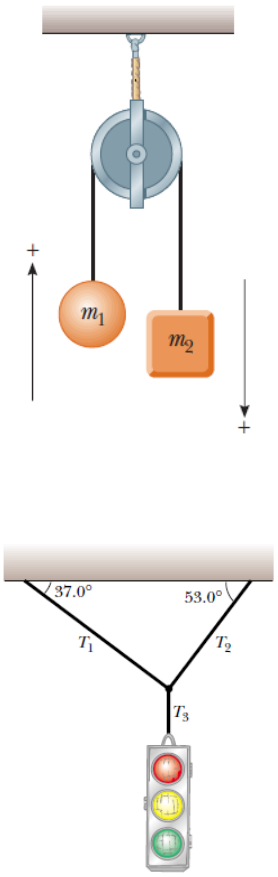


Figura 3.11: Semáforo y sus cables.

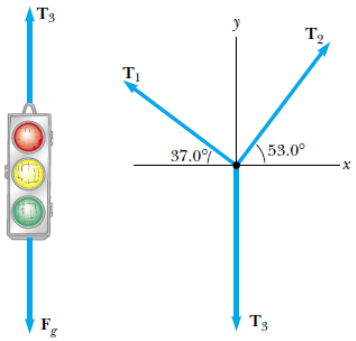


Figura 3.12: DCL semáforo y DCL de la unión de los cables o nudo.

si la tensión en ellos excede los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación o ¿Se rompe uno de los cables?

Solución Lo primero que haremos es el DCL, este se puede ver en la figura 3.12 Pediremos

que la suma de fuerzas sea cero, es decir consideramos que el semáforo esta en reposo. Si al considerar esto, vemos que las tensiones T_1 o T_2 son mayores a 100 N, entonces el cable se corta, si son menores a 100 N, no se cortan.

Para trabajar el problema estudiaremos las fuerzas tanto en el semáforo como en el nudo:

- **Semaforo** Solo hay dos fuerzas, T_3 y F_g. Entonces:

$$T_3 - F_g = 0 \Rightarrow T_3 = F_g = 122N \tag{3.75}$$

- **Nudo** Para el nudo, vemos que las fuerzas son:

$$\sum F_x = T_2 \cos(53°) - T_1 \cos(37°) = 0 \tag{3.76}$$

$$\sum F_= T_1 \sin(37°) + T_2 \sin(53°) - T_3 = 0 \tag{3.77}$$

Veamos que aquí tenemos un sistemas de ecuaciónes donde T_1, T_2 son las incógnitas (T_3 ya lo conocemos) y tenemos dos ecuaciónes. Por lo tanto el sistema se puede resolver.

De (3.76) podemos ver que:

$$T_2 = T_1 \frac{\cos(37°)}{\cos(53°)} \tag{3.78}$$

evaluando en (3.77) tendremos:

$$T_1 \sin(37°) + T_1 \frac{\cos(37°)}{\cos(53°)} \sin(53°) = T_3 = 122N \tag{3.79}$$

utilizando $\frac{\sin(53°)}{\cos(53°)} = \tan(53°)$ tendremos:

$$T_1 = \frac{122}{\sin(37°) + \cos(37°)\tan(53°)} = 73.42N \tag{3.80}$$

Reemplazando el valo de T_1 en (3.78) tendremos:

$$T_2 = 97.43N \tag{3.81}$$

Por lo tanto, dado que tanto T_1 y T_2 son menos a $100N$, ninguno de los cables de corta y el semáforo no se caerá.

Ejemplo 21.

Un bloque de masa $m_1 = 0.2kg$ sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una bola de masa $m_2 = 1kg$ mediante una cuerda ligera sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura. Al bloque se aplica una fuerza de magnitud $F = 3N$ en un ángulo $\theta = 30°$ con la horizontal como se muestra, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.4$. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

Solución El DCL para la m_2 nos dice que solo habrá fuerza en el eje y,

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a \Rightarrow T = m_2(a + g) \tag{3.82}$$

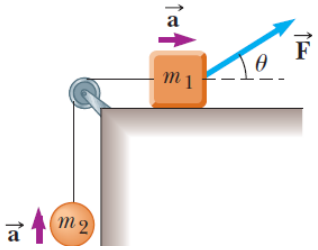


Figura 3.13: Bloques

Por otro lado, las fuerzas que actúan en la m_1 nos dicen que:

$$\sum F_x = F\cos\theta - T - F_r = 3\cos(30^\circ) - T - 0.4N = m_1 a \tag{3.83}$$

$$\sum F_y = N + F\sin(\theta) - m_1 g = 0 \Rightarrow N = m_1 g - F\sin(\theta) = 0.46N \tag{3.84}$$

Por lo tanto, reemplazando $T = m_2(a+g)$ y $N = m_1 g - F\sin(\theta)$ en la suma de fuerzas en x se encuentra:

$$\sum F_x = F\cos(\theta) - m_2(a+g) - \mu(m_1 g - F\sin(\theta)) = m_1 a \tag{3.85}$$

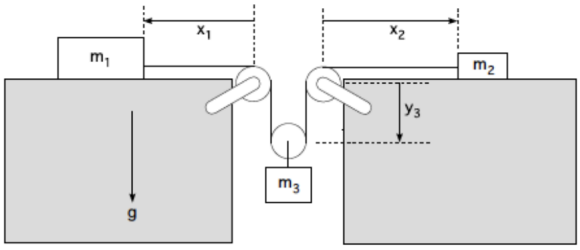
ordenando la ecuación encontramos:

$$3\cos(30^\circ) - (a+9.8) - 0.4(1.96 - 1.5) = 0.2a \Rightarrow a = -7.15 \tag{3.86}$$

Es decir, el bloque m_2 se mueve **hacia abajo**.

Ejemplo 22.

En el sistema mostrado anteriormente, $m_1 > m_2$. Las poleas son sin masa y sin fricción, y la cuerda que une los bloques no tiene masa. El coeficiente de fricción estática entre los bloques y las mesas es mayor que el coeficiente de fricción cinética: $\mu_s > \mu_k$. La aceleración de la gravedad hacia abajo es g.



(a) Imagina que, cuando el sistema se libera desde el reposo, el cuerpo 3 acelera hacia abajo con una tasa constante de magnitud a, pero solo uno de los otros bloques se mueve. ¿Cuál de los bloques no se mueve y cuál es la magnitud y dirección de la fuerza de fricción que lo mantiene en reposo?

(b) Ahora considera el caso en el que, al liberarse desde el reposo, los tres bloques comienzan a moverse. Encuentra las aceleraciones de los tres bloques y la tensión en la cuerda.

Solución

a) Para el cuerpo 3 ya conocemos su aceleración. Escogiendo que el eje y crece hacia abajo, la segunda ley de Newton por el cuerpo 3 es:

$$m_3 g - 2T = m_3 a_3 \tag{3.87}$$

Entonces, la tensión que sentirá las masas m_1 y m_2 son:

$$T = \frac{m_3}{2}(g - a_3) \tag{3.88}$$

Veamos que la fuerza de roce estática que siente cada bloque es:

$$f_{re,1} = \mu_s N_1 = m_1 g \mu_s, \quad f_{re,2} = m u_2 g \mu_s \tag{3.89}$$

Entonces, $f_{re,1} > f_{re,2}$ por lo que el bloque que se mueve es 2.
Veamos de la 2da de ley de Newton para 1, que si este esta en reposo:

$$T - f_{re,1} = 0 \Rightarrow f_{re,1} = T = \frac{m_3}{2}(g - a_3) \tag{3.90}$$

b) Si ahora todo se mueve, entonces para el bloque uno se cumplira:

$$\begin{aligned} &\text{eje x} \quad T - f_r = T - N\mu_k = m_1 a_1 \\ &\text{eje y} \quad N - m_1 g = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $T - m_1 g \mu_k = m_1 a_1$.
De manera similar para el bloque 2:

$$\begin{aligned} &\text{eje x} \quad T - f_r = m_2 a_2 \\ &\text{eje y} \quad N - m_2 g = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $T - m_2 g \mu_k = m_2 a_2$.
Finalmente, para el bloque 3, se tiene:

$$2T - m_3 g = m_3 a_3 \tag{3.91}$$

Notemos que tenemos 4 incognitas a_1, a_2, a_3, T. Usando la condicion de ligadura del largo de la cuerda

$$L = x_1 + x_2 + 2y_3 \tag{3.92}$$

donde hemos despreciado el radio de las poleas. Entonces, las aceleraciones cumplen:

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \tag{3.93}$$

Entonces, ahora si se puede resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} T - m_1 g \mu_k & = m_1 a_1 \\ T - m_2 g \mu_k & = m_2 a_2 \\ 2T - m_3 g & = m_3 a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 & = 0 \end{array}\right\} \tag{3.94}$$

Resolviendo:

$$a_1 = \frac{T}{m_1} - g\mu_k, \quad a_2 = \frac{T}{m_2} - g\mu_k, \quad a_3 = \frac{2T}{m_3} - g \tag{3.95}$$

evaluando en la ultima ecuacion de 3.94 tenemos:

$$T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) - 2g\mu_k - 2g = 0 \tag{3.96}$$

despejando para T, tenemos

$$T = \frac{2g(\mu_k + 1)}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}} \tag{3.97}$$

Entonces, ya podemos obtener las aceleraciones, reemplazando T en (3.95)

Capítulo 4

Trabajo y Energía

En este capitulo estudiaremos el concepto de trabajo que esta muy relacionado con la idea de energía. Veremos la energía y su conservación. Además introduciremos la cantidad de movimiento, llamado momentum y estudiaremos su conservación.

4.1. Trabajo

Consideremos el siguiente caso: Usted desea mover su celular a lo largo de la mesa, para esto ejerce fuerza. Sin embargo, la efectividad de la fuerza que usted realice se verá reflejada en si se mueve o no el celular. Por ejemplo si usted tiene su celular en la mesa y aplica una fuerza perpendicular al celular, este no se moverá. Aplica fuerza, pero el objeto no se mueve. Pero si aplica una fuerza paralela al suelo, moverá el celular y lo desplazara.

El **trabajo** encapsula esta idea de que no cualquier fuerza provoca movimiento.

Definiremos el trabajo, denotaremos W (por work en inglés), que realiza una fuerza como:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\Delta r \cos(\theta) \tag{4.1}$$

donde $\Delta\vec{r}$ es el desplazamiento del objeto sobre el que aplicamos la fuerza y θ es el ángulo que hay entre la fuerza y el desplazamiento, como se muestra en la Figura 4.1. De la definicion de trabajo vemos que las unidades de medida en el SI son:

$$[W] = [F][r] = N \cdot m = J \tag{4.2}$$

donde hemos definido el Joule (J) como Newtons· metro. El Joule es la unidad de medida del trabajo.

En el ejemplo del celular, si aplicamos la fuerza en $\theta = 90°$, entonces dado que $\cos(90°) = 0$, no haremos trabajo.

Es importante destacar que el trabajo puede ser negativo, basta con el ángulo entre el desplazamiento y la fuerza sea $90° < \theta \leq 180°$.

Ejemplo 23.

Un hombre limpiando un piso tira una aspiradora con fuerza. de magnitud $F = 50N$ en un ángulo de $30°$ con la horizontal como se muestra en la Figura 4.2. Calcule el trabajo realizado por la fuerza sobre la aspiradora a medida que la aspiradora se desplaza 3 m a la derecha.

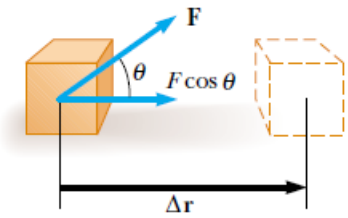


Figura 4.1: La fuerza aplicada sobre una caja en un angulo θ con respecto al desplazamiento.

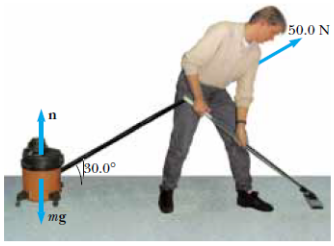


Figura 4.2: Hombre empujando la aspiradora.

Solución Del DCL del problema podemos ver que:

$$\sum F_x = 50\cos(30°)$$
$$\sum F_y = n - mg + 50\sin(30°)$$

dado que queremos desplazar la aspiradora por la horizontal, las fuerzas verticales no hacen trabajo (el ángulo entre las fuerzas verticales y la horizontal es $90°$). Entonces la única fuerza que hará trabajo es la componente x de la fuerza que hace el hombre. El trabajo será:

$$W = 50\cos(30°)3 = 130N \cdot m = 130J \tag{4.3}$$

Si hay varias fuerzas actuando en distintas momentos del movimiento, entonces el trabajo neto o trabajo total será la suma de los trabajos:

$$W_n = W_1 + W_2 + \ldots \tag{4.4}$$

Ejemplo 24.
Sobre una particula actua una fuerza que varia como se muestra en la Figura 4.3. Obtenga el trabajo hecho por la fuerza cuando la particula se mueve desde $x = 0m$ a $x = 6m$.

Solución El trabajo será el área bajo la curva. El trabajo 1 será el de la zona rectangular y el trabajo 2 será el del triangulo. Por lo tanto:

$$W_n = 5 \cdot 4J + \frac{1}{2}5 \cdot 2J = 25J. \tag{4.5}$$

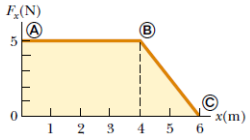


Figura 4.3: Grafico de Fuerza v/s Desplazamiento.

Un caso tipico donde la fuerza cambia es la fuerza elástica. Esto porque la fuerza depende de que tan lejos del largo natural estemos. Entonces la fuerza será mayor a medida que nos alejamos del largo natural e ira disminuyendo a medida que nos acercamos al largo natural. Recordando la ley de Hooke:

$$F_e = -kx \tag{4.6}$$

donde k es la constante del resorte y x la distancia al largo natural. Si hacemos el gráfico $Fvsx$ tendremos el gráfico de la Figura 4.4. Por lo tanto el trabajo que hace la fuerza elastica para ir desde el extremo al largo natural será el área bajo la curva de la parte izquierda del grafico:

$$W = \frac{1}{2}kx^2_{\text{max}} \tag{4.7}$$

En general, el trabajo que hace la fuerza elástica desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$ es:

$$W_e = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2. \tag{4.8}$$

4.2. Energía

Hemos visto que el trabajo es la influencia de una fuerza externa sobre un objeto. En otras palabras, el efecto del entorno sobre el sistema. Nos preguntamos, ¿Cómo afecta el trabajo al sistema?

4.2.1. Energía Cinetica

Dado que hay una fuerza actuando, hay una aceleración entonces esperamos que el sistema (objeto) cambie su velocidad. Resulta ser que el trabajo externo (que hace el entorno) sobre un objeto (sistema) es:

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{4.9}$$

donde v_i es la velocidad inicial en la posición inicial x_i y v_f es la velocidad final en la posición final x_f.
Definiremos la **energía cinética** como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4.10}$$

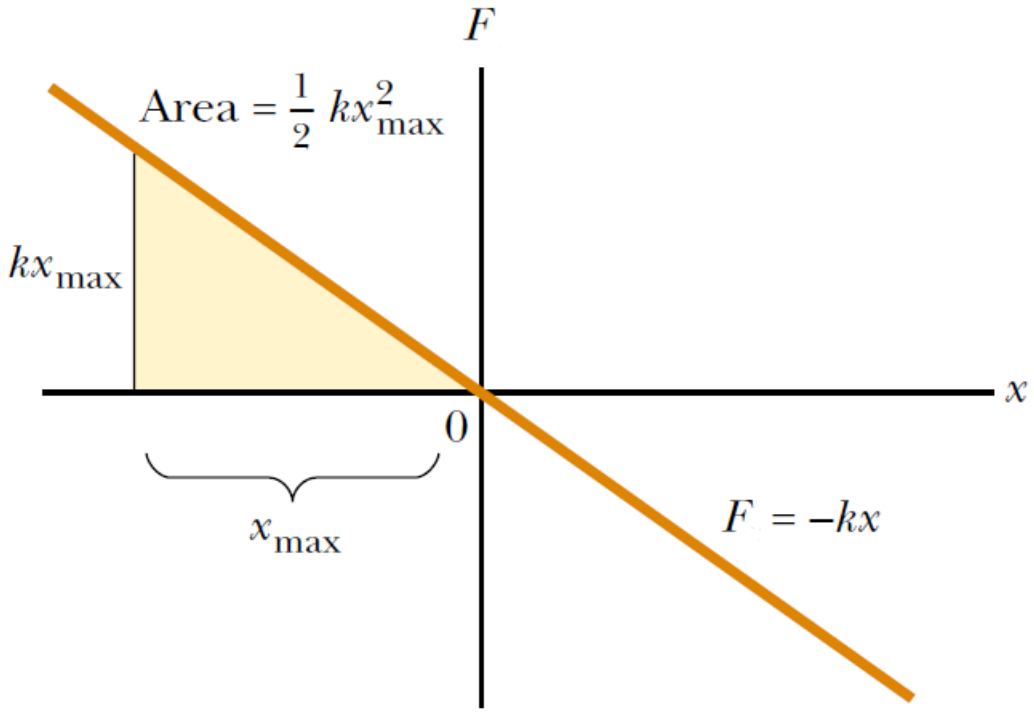


Figura 4.4: Gráfico de la fuerza elástica vs desplazamiento.

Entonces

$$W_{\text{ext}} = K_f - K_i \Rightarrow K_f = K_i + W_{\text{ext}} \tag{4.11}$$

Entonces podemos enunciar el teorema de trabajo-energía:

$$W = \Delta K \tag{4.12}$$

Este nos dice que si el trabajo que hace el entorno es positivo, entonces el sistema aumenta su velocidad.

4.2.2. Energía potencial

De la definición de trabajo:

$$W = F \cdot \Delta\vec{r} \tag{4.13}$$

Supongamos queremos levantar nuestro teléfono celular. Empieza desde el reposo y al llegar a la altura deseada, queda en reposo. Entonces, según el teorema de trabajo-energía, no se hizo trabajo (velocidad inicial y final son cero). Sin embargo, al soltar el celular, este tendrá una velocidad inicial cero pero la velocidad final no será cero. Entonces, de alguna manera el libro almaceno energía tal que al ser soltado obtiene energía cinética. Esta energía se le conoce como **energía potencial**.

Consideremos el trabajo que hace una fuerza que levanta un objeto de masa m. La fuerza que se hace es el peso del objeto por lo que $\vec{F} = mg\hat{j}$ y el desplazamiento es $\Delta\vec{r} = (y_f - y_i)\hat{i}$.

Por lo tanto el trabajo será:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = mgy_f - mgy_i \tag{4.14}$$

Definiremos la **energía pontencial gravitacional** como:

$$U_g = mgy \tag{4.15}$$

donde y es la altura. La unidad de medida es el Joule (J). Al igual que como lo hicimos en cinemática, podemos ubicar la altura de acuerdo al sistema de referencia.

Ahora consideremos que dejamos caer el celular. La fuerza es $\vec{F} = -mg\hat{j}$. A diferencia del caso anterior, el celular ira desde la altura $\vec{r}_i = y_i\hat{j}$ hasta una altura $\vec{r}_f = y_f\hat{j}$, por lo tanto $\Delta\vec{r} = (y_f - y_i)\hat{j}$. Por lo tanto el trabajo que hace la fuerza gravitacional es:

$$W_g = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -mg(y_f - y_i) = U_{gi} - U_{gf} = -\Delta U_g \tag{4.16}$$

Notemos que el trabajo que hace la fuerza de gravedad es menos el cambio de energía potencial gravitacional.

4.2.3. Energía potencial elástica

Consideremos un bloque de masa m unido a un resorte de constante k. Estiremos la masa un largo x, esta masa estará en reposo, es decir $K_i = 0$. Por otro lado, al llegar al otro extremo también tendrá velocidad cero por lo que $K_f = 0$, sin embargo entre medio tendrá energía cinética distinta de cero. Es decir, de forma similar al caso gravitacional, al estirar el resorte, estamos almacenando energía, esta energía es la **energía potencial elástica**.

Habíamos visto que el trabajo que externo que se requiere para estirar el resorte es:

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \tag{4.17}$$

Definiremos la **energía potencial elástica** como:

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2. \tag{4.18}$$

Veamos que la energía potencial elástica es siempre positiva.

Debido a que la fuerza externa=-fuerza del elástico por lo tanto el trabajo que hace el resorte será:

$$W_e = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\Delta U_e \tag{4.19}$$

Es decir, al igual que en la energía potencial gravitacional, el trabajo que hace el resorte (campo gravitacional) es menos el cambio de energía potencial elástica (gravitacional).

4.3. Conservación de Energía.

Volvamos a considerar el ejemplo de la energía potencial gravitacional. Habíamos visto que el trabajo que debemos hacer para levantar el libro es:

$$W_{\text{ext}} = mg(y_f - y_i). \tag{4.20}$$

Si soltamos el libro, la fuerza que provoca el movimiento es la fuerza gravitacional por lo que el trabajo que esta hace sobre el celular es:

$$W_{\text{sobre el celu}} = (-mg\hat{j}) \cdot ((y_i - y_f)\hat{j}) = -mgy_f + mgy_i = U_{gi} - U_{gf} = -\Delta U \tag{4.21}$$

Del teorema trabajo energía, tendremos:

$$W_{\text{sobre el celu}} = \Delta K \tag{4.22}$$

Por lo tanto:

$$\Delta K = -\Delta U_g \Rightarrow \Delta K + \Delta U_g = 0 \tag{4.23}$$

En el lado izquierdo tenemos la suma de cambios de energía almacenada en el sistema y en el lado izquierdo un cero que nos dice que no hay transferencia de energía fuera del sistema. El sistema celular-tierra es un sistema aislado.

Definiremos la energía mecánica como:

$$E_{\text{mec}} = K + U_g \tag{4.24}$$

Re escribamos la ecuación $\Delta K + \Delta U_g = 0$:

$$K_f - K_i + U_f - U_i = 0 \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i \tag{4.25}$$

es decir:

$$E_{\text{mec},f} = E_{\text{mec},i}. \tag{4.26}$$

es decir en un sistema aislado la energía mecánica se conserva. Esto significa que a lo largo de toda la evolución del sistema la suma de la energía cinética mas la energía potencial es la misma.

Si incluimos un resorte, la energía mecánica:

$$E_{\text{mec}} = K + U_g + U_e \tag{4.27}$$

La conservación de energía es exactamente igual:

$$E_{\text{mec},f} = E_{\text{mec},i} \tag{4.28}$$

Es importante destacar que esto solo se cumple si no hay lo que se conoce como fuerzas no conservativas. Un ejemplo de fuerza no conservativa es el roce. Es decir, en presencia de roce no se conserva lo energía mecánica.

4.3.1. Fuerzas No Conservativas

Hemos visto que la energía mecánica se conserva, sin embargo, esto no siempre es así. Consideremos un bloque de masa m que posee velocidad inicial v_i que se mueve en una superficie plana con coeficiente de roce μ. Debido al roce, después de desplazarse $\vec{d}$ el bloque se detendrá . Entonces, la energía mecanica inicial y final,

$$E_{mi} = \frac{1}{2}mv_i^2, \quad E_{mf} = 0, \tag{4.29}$$

es decir, no se conserva la energía. Se puede ver que se pierde energía, esta energía se pierde debido al roce. Se puede mostrar que el cambio de energía mecánica será:

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = W_{\text{roce}} \tag{4.30}$$

donde $W_{\text{roce}} = \vec{F}_r \cdot \Delta\vec{r}$. Notar que dado que el roce se opone al desplazamiento, el trabajo que hace el roce será negativo.

En general, si hay fuerzas no conservativas, como el roce o una fuerza externa que se le aplique al sistema (que no sea la fuerza de gravedad o elastica), entonces la energía no se conserva y se cumple:

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = \sum W_{\text{fuerzas no conservativas}} \tag{4.31}$$

es decir, el cambio de energía mecanica es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas no conservativas.

4.4. Ejemplos Resueltos.

Ejemplo 25.

Una caja de masa $m = 10$ kg se arrastra hacia arriba por un plano inclinado rugoso con una rapidez inicial de $1,50; \frac{m}{s}$. La fuerza de arrastre es de 100N paralela al plano inclinado, que forma un ángulo de $\theta = 30^\circ$ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre caja y plano inclinado es 0,4 y la caja se tira 6 m.

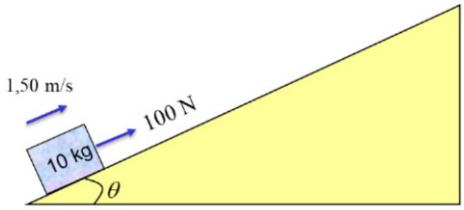
a) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de 100 N sobre la caja?

b) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre la caja?

c) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre la caja?

d) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de la caja?

e) ¿Cuál es la velocidad de la caja después de haberla arrastrado 6 m?

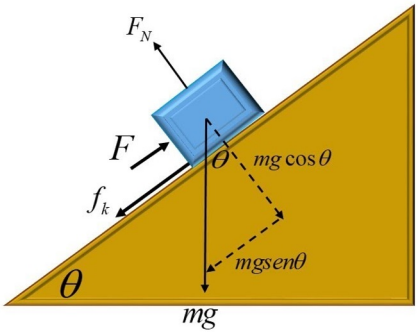


Solución

a) Debido a que la fuerza es paralela al desplazamiento, entonces el ángulo que hacen ambos vectores (Fuerza y desplazamiento) es cero. Por lo tanto el trabajo que hace esta fuerza es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}| \cos(0^\circ) = 600J. \tag{4.32}$$

b) Para obtener el trabajo, se debe realizar el DCL de la caja: Del DCL se ve que el ángulo que



hay entre el desplazamiento y el peso, mg, es $270^\circ - 30^\circ = 240^\circ$. Por lo tanto, el trabajo que hace la fuerza de gravedad es:

$$W = |F_g||\vec{x}| \cos(240^\circ) = mgd\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{10 \cdot 9.8 \cdot 6}{2} = -294J \tag{4.33}$$

c) La fuerza de roce, al oponerse al movimiento, hace un ángulo de 180° con respecto al desplazamiento. Por lo tanto, el trabajo que esta hace es:

$$W_{\text{roce}} = \vec{F}_r \cdot \Delta\vec{x} = |\vec{F}_r||\Delta\vec{x}| \cos(180^\circ) = -\mu N d \tag{4.34}$$

donde μ es el coeficiente de roce cinetico, N es la fuerza Normal y d el desplazamiento. Debemos obtener la fuerza normal. A partir de la segunda ley de Newton en el eje y, se ve que:

$$\sum F_y = N - mg\cos(30^\circ) = 0 \Rightarrow N = mg\cos(30^\circ) \tag{4.35}$$

Por lo tanto, el trabajo que hace el roce será:

$$W_{\text{roce}} = -\mu mgd\cos(30^\circ)d = -203.69J \tag{4.36}$$

d) El cambio de energía cinética lo podemos obtener de la no conservación de la energía mecánica. Es decir:

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pg} = \Delta E_c + mgh_f - mgh_i = W_F + W_{\text{roce}} \tag{4.37}$$

Podemos escoger la altura inicial como $h_i = 0$, entonces $mgh_i = 0$. Para obtener la altura, estudiamos el triangulo rectangulo de ángulo 30°, altura h_f e hipotenusa de $d = 6m$. Por lo tanto:

$$h_f = 6\sin(30^\circ) = 3m \tag{4.38}$$

Entonces, el cambio de energía cinética es:

$$\Delta E_c = W_F + W_{\text{roce}} - mgh_f = 600 - 203.69 - 10 \cdot 9.8 \cdot 3 = 102.31J \tag{4.39}$$

e) La velocidad final la podemos obtener del item anterior. A partir de

$$\Delta E_c = 102.31J \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_f^2 = 102.31J \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + 102.31J = \frac{1}{2}10 \cdot (1.5)^2 + 102.31 = 113.56 \tag{4.40}$$

Por lo tanto

$$v_f^2 = 2 \cdot 113.56\frac{1}{m} = 22.712 \Rightarrow v_f = 4.76\frac{m}{s} \tag{4.41}$$

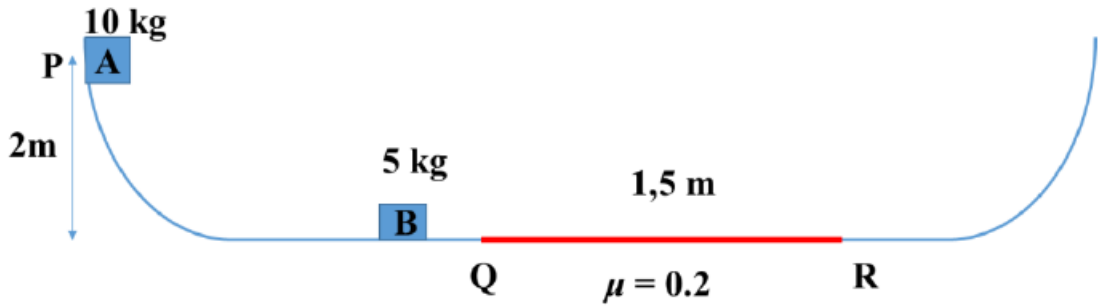
Ejemplo 26.

Se suelta un bloque A de 10 kg desde el punto P de la rampa (tiene una altura de 2 m desde la base). La vía no tiene fricción, excepto en el tramo entre Q y R, que tiene una longitud de 1,5 m. El bloque baja por la vía y colisiona con otro bloque B de masa 5 kg, que inicialmente estaba en reposo.

a) a) ¿Cuál es la velocidad del bloque A justo antes de chocar con el bloque B?

b) Los bloques quedan pegados con velocidad inicial de 4.17 $\frac{m}{s}$. Estos se encuentra una zona rugosa entre los puntos Q y R, con coeficiente de fricción 0,2, ¿cuál es la velocidad de los bloques justo después del punto R?

c) Si los bloques siguen moviendo, ¿hasta que altura suben los bloques en la rampa derecha?



Solución

a) Colocando la altura $h = 0$ en la parte plana de la rampa. Por conservación de energía tendremos:

$$m_A g h_A = \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 \tag{4.42}$$

donde h_A es la altura inicial del bloque A y v_{A1} es la velocidad con la que el bloque llega al suelo. Entonces:

$$v_{A1} = \sqrt{2gh_A} = 6.26\frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \tag{4.43}$$

b) Al chocar los bloques, podemos considerar que solo tenemos un bloque de masa $m = 10 + 5 = 15kg$, cuya velocidad en el punto Q es $v_q = 4.17\frac{m}{s}$ (dado en el enunciado). Al pasar por la zona con roce este hace trabajo por lo que:

$$W_r = -F_r d = -\mu N d \tag{4.44}$$

donde $N = (m_A + m_B)g = 15 \cdot 9.8 = 147N$ es la fuerza normal y μ el coeficiente roce. Entonces el cambio de energía:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_R^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_Q^2 \tag{4.45}$$

donde v_R es la velocidad al salir de la zona rugosa, notar que el cambio de energía potencial gravitacional es cero ya que los bloques no suben ni bajan. Este cambio de energía debe ser igual al trabajo del roce:

$$-\mu(m_A + m_B)gd = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{fR}^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{fQ}^2 \tag{4.46}$$

Entonces, la velocidad con la que llegan los bloques al punto R será

$$v_{fR}^2 = \frac{1}{2}v_{fQ}^2 - 2\mu gd = 11.53\frac{\mathsf{m}^2}{\mathsf{s}^2} \Rightarrow v_{fR} = 3,4\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}. \tag{4.47}$$

c) Una vez fuera de la zona con roce, los bloques tendrán velocidad $v_{fR} = 3,4\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$. Esta es la que consideraremos como velocidad inicial para la conservación de energía:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_{fR}^2 = (m_A + m_B)gh_2 \tag{4.48}$$

donde h_2 es la altura máxima a la que llegaran los bloques. Despejando

$$h_2 = \frac{v_{fR}^2}{2g} = 0.59\mathsf{m}. \tag{4.49}$$

Ejemplo 27.

Un bloque de masa m se usa para comprimir un resorte de constante k una distancia A. Después de soltar el bloque, este se mueve por un plano sin roce y después sube por un plano inclinado con un angulo θ sobre la horizontal y coeficiente de roce cinético μ_k.



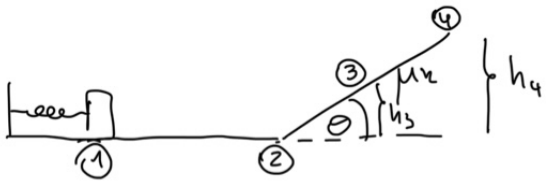
a) Determine la velocidad a la que llega a la base del plano inclinado

b) En el plano inclinado, cuando la velocidad es la mitad de la obtenida en a) ¿A que altura esta el bloque?

c) altura a la que llega el bloque.

Solución

a) Llamaremos punto 1 al resorte comprimido A. Punto 2 a la base del plano inclinado, 3 al punto del plano inclinado donde la velocidad es la mitad del punto 2 y 4 a la altura máxima del bloque.



Inicialmente el bloque esta en reposo por lo que es solo energía potencial elástica (hemos colocado la altura cero en la horizontal)

$$E_{m,1} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{4.50}$$

Cuando llega a la base del plano inclinado posee solo energía cinética:

$$E_{m,2} = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{4.51}$$

Entre 1 y 2 no hay roce por lo que se conserva la energía:

$$E_{m,1} = E_{m,2} \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}A = A\omega, \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{4.52}$$

como corresponde, ya que el bloque sale despedido del resorte a la velocidad máxima que es $A\omega$.

b) En el punto en que la velocidad del bloque es la mitad de la obtenida en a), es decir $v_3 = \frac{v_2}{2} = \frac{A\omega}{2}$. Entonces, en el punto 3 la energía del bloque es:

$$E_{m,3} = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh_3 \tag{4.53}$$

donde h_3 es quien buscamos. Como en este trayecto hay roce debemos utilizar $\Delta E_m = W$.
El cambio de energía mecánica es:

$$E_{m,3} - E_{m,2} = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh_3 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{8}mv_2^2 + mgh_3 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -\frac{3}{8}mv_2^2 + mgh_3 \tag{4.54}$$

(Note que puede usar $E_{m,3} - E_{m,1}$, ya que $E_{m,1} = E_{m,1}$).
Mientras que el trabajo que hace la fuerza de roce será:

$$W = -N\mu_k d_3 \tag{4.55}$$

donde d_3 es la distancia que ha recorrido el bloque hasta el punto 3. No es difícil darse cuenta que $h_3 = d\sin(\theta)$, mientras que la fuerza normal la podemos obtener de la segunda ley de Newton y es:

$$N - mg\cos(\theta) = 0 \tag{4.56}$$

por lo tanto:

$$W = -mg\mu_k h_3 \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -mg\mu_k h_3 \cot(\theta) \tag{4.57}$$

Entonces:

$$\Delta E_m = W$$
$$-\frac{3}{8}mv_2^2 + mgh_3 = -mg\mu_k h_3 \cot(\theta)$$

Resolviendo para h_3 encontramos:

$$h_3 = \frac{3}{8}\frac{v_2^2}{g(1+\mu_k\cot(\theta))} \tag{4.58}$$

d) Este caso es similar al item anterior, pero n la altura máxima tendremos solo energía potencial gravitacional:

$$E_{m,4} = mgh_4 \tag{4.59}$$

Entonces, usando $\Delta E_m = W$ tendremos

$$\Delta E_m = E_{m,4} - E_{m,2} = mgh_4 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -N\mu_k d_4 \tag{4.60}$$

donde d_4 es la distancia máxima y esta relacionado con la altura maxima mediante $h_4 = d_4\sin(\theta)$ y N es lo mismo del item anterior. Por lo tanto:

$$mgh_4 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -mg\mu_k h_4\cot(\theta) \Rightarrow h_4 = \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g(1+\mu_k\cot(\theta))} \tag{4.61}$$

Notemos, que como corresponde, $h_3 < h_4$.

Ejemplo 28.

Un resorte sin masa con constante elástica k está unido en un extremo a un bloque de masa M, el cual descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo del resorte está fijo a una pared.

Una bala de masa m_b es disparada hacia el bloque desde la izquierda con una velocidad v_0 y queda incrustada en el bloque (suponiendo que esto ocurre instantáneamente).

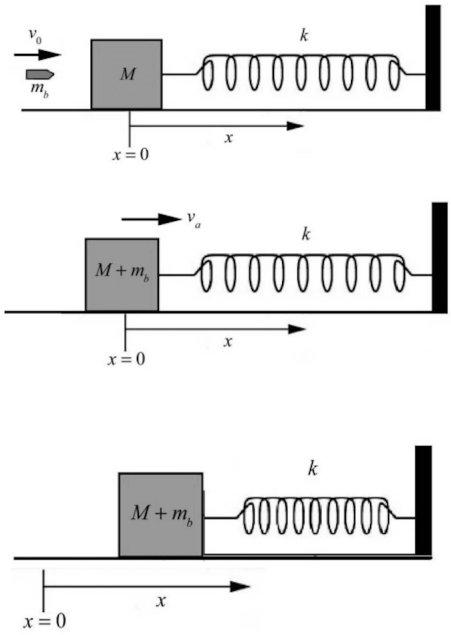
El bloque y la bala se mueven inmediatamente después de que la bala se incrusta con una velocidad dada por

$$v_a = \frac{m_b v_0}{m_b + M}.$$

El movimiento resultante del sistema (bloque + bala) es un movimiento armónico simple.

(a) Encuentra la amplitud del movimiento armónico simple resultante.

(b) ¿Cuánto tiempo tarda el bloque en volver por primera vez a la posición $x = 0$?



(c) Supón ahora que, en lugar de deslizarse sobre una mesa sin fricción, el bloque está sometido a la acción del resorte y a una fuerza de fricción constante de magnitud f. Se sabe que cuando el bloque regresa por primera vez a la posición $x = 0$, su velocidad es

$$v_f = \frac{m_b v_0}{2(m_b + M)}.$$

¿Cuánto ha recorrido el bloque?

Solución

a) Como no hay roce, se conserva la energía:

$$\frac{1}{2}(m_b + M)v_a^2 = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 \tag{4.62}$$

Entonces, el desplazamiento máximo es:

$$x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{m_b + M}{k}}v_a = \sqrt{\frac{1}{k(m_b + M)}}m_b v_0 \tag{4.63}$$

Lo que corresponde a la amplitud de la oscilacion.

Otra forma: En un MAS, la posición del bloque+bala será:

$$x(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t - \delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_b + M}} \tag{4.64}$$

sabemos que en $t = 0$ $x(0) = 0$ lo que significa que:

$$x(0) = \mathcal{A}\cos(-\delta) = 0 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \tag{4.65}$$

Por lo que:

$$x(t) = \mathcal{A}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{A}\sin(\omega t) \tag{4.66}$$

Además, la velocidad, en general es:

$$v(t) = \mathcal{A}\omega\cos(\omega t) \tag{4.67}$$

y en $t = 0$ sabemos que:

$$v(0) = \mathcal{A}\omega\cos(0) = \frac{m_b v_0}{m_b + M} \tag{4.68}$$

Por lo tanto:

$$x(t) = \mathcal{A}\sin(\omega t) = \frac{m_b v_0}{m_b + M}\frac{1}{\omega} = \frac{m_b v_0}{\sqrt{k(m_b + M)}}\sin(\omega t) \tag{4.69}$$

con

b) Al bloque+bala, le toma la mitad del periodo en retornar al punto $x = 0$. El periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_b + M}{k}} \tag{4.70}$$

Entonces, el tiempo que le toma es:

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m_b + M}{k}} \tag{4.71}$$

c) El trabajo hecho por el roce es:

$$W_{\text{roces}} = -fd \tag{4.72}$$

donde d es la distancia que viajo el sistema. El trabajo es igual al cambio de energía mecánica:

$$\Delta E_m = E_{m,1} - E_{m,a} \tag{4.73}$$

donde $E_{m,a}$ es la energía que tiene el bloque al pasar por $x = 0$. En este punto, la energía es solo energía cinetica:

$$E_{m,a} = \frac{1}{2}(m_b + M)\left(\frac{v_a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E_{m,a} \tag{4.74}$$

Por lo tanto:

$$-fd = \frac{1}{4}E_{m,a} - E_{m,a} = -\frac{3}{4}E_{m,a} \Rightarrow d = \frac{3}{4}\frac{E_{m,a}}{f} = \frac{3}{8}\frac{m_b^2}{(m_b + M)f}v_0^2 \tag{4.75}$$

Capítulo 5

Momentum lineal y colisiónes

Consideremos dos objetos, el primero de masa m_1 con velocidad v_1 y el segundo con masa m_2 y velocidad v_2. Supongamos que estos objetos colisiónan (chocan). Dado que el sistema esta aislado, el primer objeto solo siente la fuerza que ejerce el objeto dos y vice-versa. Entonces, de la tercera ley de Newton tendremos

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0. \tag{5.1}$$

Utilizando la segunda ley de Newton nos conduce a

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0 \tag{5.2}$$

utilizando la definición de aceleración, $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ tendremos

$$m_1\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = 0 \tag{5.3}$$

notemos que, si consideramos que las masas no cambian, tendremos:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0 \tag{5.4}$$

a la combinación de masa por velocidad la llamaremos **momentum lineal** y esta definido como:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \tag{5.5}$$

Definiendo el momentum total como

$$\vec{p}_{\text{tot}} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{5.6}$$

vemos que,

$$\frac{\Delta\vec{p}_{\text{tot}}}{\Delta t} = 0 \tag{5.7}$$

es decir, el momentum total del sistema no cambia en el tiempo, se conserva. Otra forma de enunciar la conservación de momentum es que el momemtum inicial es igual al momentum final:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}. \tag{5.8}$$

5.1. Impulso

Notemos que hay una relacion entre el momentum y la fuerza

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \tag{5.9}$$

donde hemos asumido que la masa es constante. Definiremos el impulso como:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \tag{5.10}$$

es decir, definiremos el impulso como el cambio de momentum de la partícula.

5.2. colisiónes

Consideremos dos objetos que colisiónan. En general tendremos dos situaciones:

- **Colisión elástica:** Se conserva la energía cinética y momentum
- **Colisión Inelástica:** No se conserva la energía cinética. Puede suceder que los objetos queden juntos, esto es una **colisión inelástica perfecta**. Cuando los objetos no quedan pegados son **colisiónes inelásticas**.

Ejemplo 29.
Un automóvil de 1.800 kg detenido en un semáforo es golpeado desde el detrás por un automóvil de 900 kg, y los dos se unen, moviéndose por el mismo camino que el del coche que se movía originalmente. Si el auto más pequeño se mueve a 20.0 m/s antes del colisión, ¿cuál es la velocidad de los autos enredados después de la colisión? **Solución** Corresponde a una colisión perfectamente inelástica. El momentum inicial solo corresponde al auto de menor masa

$$p_i = m_1 v_i = 900 \cdot 20\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.8 \times 10^4\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.11}$$

después de la colisión, tendremos que el momentum final corresponde a la masa de ambos autos por su velocidad

$$p_f = (m_1 + m_2)v_f = 2700 v_f\text{kg} \tag{5.12}$$

Utilizando la conservación de momentum tenemos:

$$1.8 \times 10^4\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2700 v_f\text{kg} \Rightarrow v_f = 6,67\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.13}$$

5.3. Coeficiente de Restitución

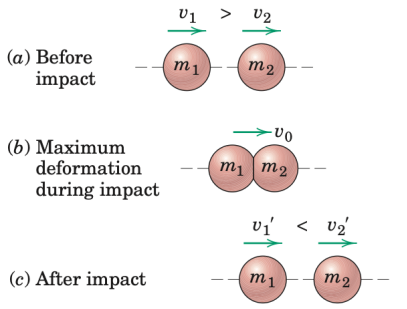
5.3.1. Colisión en el centro

Consideremos una colisión entre dos objetos que se deforman al colisiónar y después vuelven, en alguna medida a su forma original. Entonces para cada objeto existirá un periodo de deformación y un periodo de tiempo de restitución. Tanto la deformación como la restitución se deben a una fuerza por lo tanto tienen asociado un impulso.

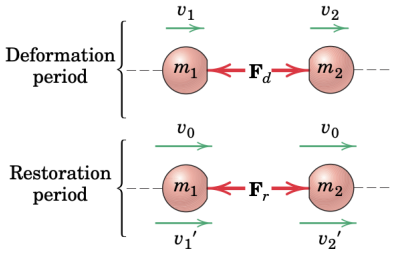
Considerando que el periodo de deformación ocurre en un tiempo $0 \leq t \leq t_0$ y el de restitución en $t_0 \leq t \leq t$. Entonces, para cada cuerpo el coeficiente de restitución será:

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_d dt}{\int_{0}^{t_0} F_d dt} = \frac{m_1(-v_1' - (-v_0))}{m_1(-v_0 - (-v_1))} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$
$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_{0}^{t_0} F_d dt} = \frac{m_2(v_2' - v_0)}{m_2(v_0 - v_2)} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$

donde cada velocidad se ve en la imagen 5.1. Eliminando v_0 de las expresiones se encuentra



(a) Previo al impacto, durante el impacto y después del impacto.



(b) Periodo de deformación y de restitución

Figura 5.1: Colsion entre dos objetos

que:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{|\text{velocidad relativa de separacion}|}{|\text{velocidad relativa de separacion}|} \tag{5.14}$$

cuando $e = 1$, entonces la colisión es elástica, es decir, se conserva la energía cinetica. Si $0 \leq e < 1$, entonces la colisión no es elástica.

5.3.2. Colisión oblicua

Consideremos ahora, que la colisión no resulta en que las velocidades finales son paralelas. Consideremos dos masas, m_1 y m_2 cuyas velocidades iniciales son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, tal como se muestra en (a) de la figura 5.2. De la figura (d), vemos que hay una componente normal de la velocidad v_n y tangencial v_t:

$$(v_1)_n = -v_1 \sin(\theta_1),\ (v_1)_t = v_1 \cos(\theta),\ (v_2)_n = v_2 \sin(\theta),\ (v_2)_t = v_2 \cos(\theta). \tag{5.15}$$

Después de la colisión, en la parte (d) de la figura, hay una fuerza de impacto $\vec{F}$ y $-\vec{F}$, que varia de cero hasta el peak de la colisión, tal como se muestra en (e).

Suponiendo conocidas las velocidad iniciales $(v_1)_n,\ (v_1)_t,\ (v_2)_n,\ (v_2)_t$, queremos saber con que velocidad salen las masas después de la colisión, es decir tendremos cuatro incógnitas: $(v_1')_n,\ (v_1')_t,\ (v_2')_n,\ (v_2')_t$ por lo que necesitamos cuatro ecuaciones:

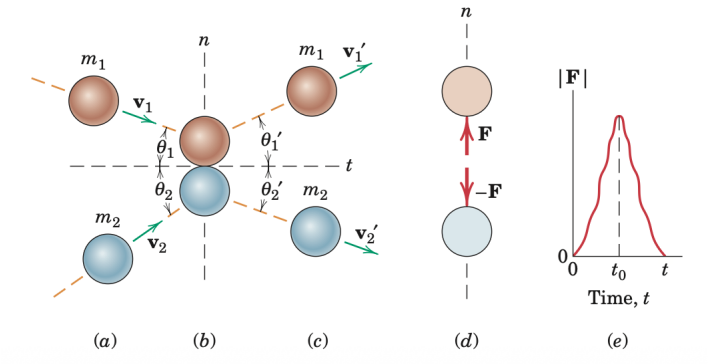


Figura 5.2: (a) Antes (b) Durante (c) Después de la colisión. (d) Colisión y dirección normal

1) En la dirección normal, se conserva el momentum:

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n \tag{5.16}$$

2) y 3) El momentum de cada masa se conserva en la dirección tangencial:

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t, \quad m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \tag{5.17}$$

4) El coeficiente de resitución es exactamente el mismo que en el caso anterior (5.14), pero solo se consideran las componentes normales:

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \tag{5.18}$$

Resolviendo este sistema podemos encontrarlas velocidades finales

5.4. Masa variable

5.4.1. Flujo de masa

El flujo de masa corresponde a la cantidad de masa que cruza una sección por unidad de tiempo y lo denotaremos como $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$.

Consideremos un fluido que circula por una tubería. Entonces, el diferencial de masa que circular por a través de una sección diferencial de área $d\vec{A}_c$ es proporcional a la densidad y su velocidad:

$$\dot{m} = \rho\vec{v} \cdot \vec{A}_c \tag{5.19}$$

donde $\vec{V}$ es la velocidad del fluido. Notemos que el cambio del flujo de masa es proporcional al producto punto entre la velocidad y el diferencial de área, es decir, solo importan las componentes paralelas de la velocidad con el área. Entonces, el cambio en el flujo de masa es

$$\dot{m} = \rho V_n A \tag{5.20}$$

donde V_n es la componente normal de la velocidad y A es el área. En la figura 5.3 se puede ver una represación gráfica.

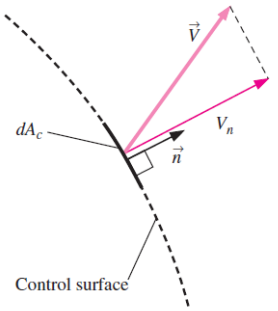


Figura 5.3: La velocidad normal V_n es aquella que va paralela al vector normal de la superficie.

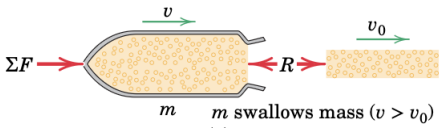


Figura 5.4: Cuerpo de masa m y velocidad v sometido a una fuerza F

5.4.2. Presión

Definiremos la presión como:

$$P = \frac{F}{A} \tag{5.21}$$

donde F es la fuerza y A es el área sobre la que se ejerce la fuerza.

5.4.3. Segunda Ley de Newton

Consideremos un objeto de masa m y velocidad v que va a atrapar otro cuerpo que lleva velocidad $v_0 < v$. Debido a que la masa

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{5.22}$$

si la masa no es constante tendremos:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v} \tag{5.23}$$

En marcos inerciales, tanto la masa como la aceleración son cantidades absolutas, es decir, todos los observadores inerciales miden la misma masa y aceleración. Sin embargo, la velocidad no es absoluta por lo que debemos entender mejor esta parte de la ecuación.

Consideremos un cuerpo de masa m y velocidad v sometido a una fuerza F que absorbe otro cuerpo que leva velocidad $v_0 < v$, tal como se ve en la figura 5.4 El objeto de velocidad v_0, al ser absorbido experimenta un cambio de velocidad ya que ahora tendrá velocidad v, cuya fuerza será:

$$R = \dot{m}(v - v_0) = mu, \quad u = v - v_0 \tag{5.24}$$

Entonces, la segunda ley de Newton, para este caso será:

$$\sum F - R = m\dot{v} \Leftrightarrow \sum F = m\dot{v} + \dot{m}u \tag{5.25}$$

Para el caso en que el objeto de masa m pierde masa, como en la figura 5.5. En este caso, la fuerza R requerida para desacelerar de velocidad v a velocidad $v_0 < v$ es:

$$R = \dot{m}(-v_0 - (-v)) \tag{5.26}$$

pero, esta vez, $\dot{m} < 0$. Entonces, podemos escribir $R = -|\dot{m}|u$. Entonces, la suma de fuerzas será:

$$\sum F = m\dot{v} + |\dot{m}|u \tag{5.27}$$

Notemos que, entonces, podemos escribir:

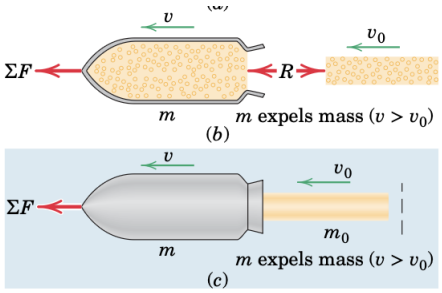


Figura 5.5: Cuerpo de masa m y velocidad v sometido a una fuerza F

$$\sum F = ma + \dot{m}u \tag{5.28}$$

donde u es la velocidad relativa entre el objeto de masa m y la velocidad que lleva la masa que se pierde.

5.5. Ejemplos:

Ejemplo 30.
Considere un arquero de 60 kg sobre hielo (sin roce) y lanza una flecha de 0.5 kg de forma horizontal a $50\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Qué velocidad tiene el arquero después de disparar la flecha?

Solución Notemos que no podemos resolver este problema utilizando las leyes de Newton ya que no sabemos la aceleración de la flecha o la fuerza que esta hace sobre el arquero. Además, no podemos utilizar conservación de energía ya que cuanto trabajo hace la flecha sobre el arquero o cuánta energía se almacena en el arco.

Sin embargo, utilizando momentum lineal este problema se resuelve rápidamente. Notemos que al inicio del problema tanto el arquero como la flecha están en reposo, entonces

$$\vec{p}_i = m_{\text{arq}} v_{\text{arq},i} + m_{\text{flecha}} v_{\text{flecha},i} = 0 \tag{5.29}$$

El momentum final será:

$$\vec{p}_f = m_{\text{arq}} v_{\text{arq},f} + m_{\text{flecha}} v_{\text{flecha},f} \tag{5.30}$$

donde $m_{\text{arq}} = 60kg$, $v_{\text{arq},f}$ es lo que queremos saber, $m_{\text{flecha}} = 0.5$ kg y $v_{\text{flecha},f} = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Entonces tendremos:

$$\vec{p} = 60v_{\text{arq, f}} + 0.5 \cdot 50\frac{\text{m}}{\text{s}} = 60v_{\text{arq, f}} + 25\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.31}$$

Por lo tanto, utilizando conservación de momentum lineal

$$0 = 60v_{\text{arq, f}} + 25\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.32}$$

resolviendo para la velocidad del arquero tendremos:

$$v_{\text{arq, f}} = -\frac{25}{60}\frac{\text{m}}{\text{s}} = -0.42\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5.33}$$

es decir, el arquero se mueve en la dirección opuesta a la flecha.

Ejemplo 31.

Un automóvil de 1 500 kg, que viaja al este con una rapidez de 25.0 $\frac{m}{s}$, choca en un cruce con una camioneta de 2 500 kg que viaja al norte con una rapidez de 20.0 $\frac{m}{s}$, como se muestra en la figura . Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad del choque después de la colisión, y suponga que los vehículos quedan unidos después de la colisión. **Solución** Por completar.

Ejemplo 32.

El martillo de una hincadora de pilotes tiene una masa de 800 kg y se suelta desde el reposo a 2 m por encima de la parte superior de un pilote de 2400 kg. Si el martillo rebota hasta una altura de 0,1 m después del impacto con el pilote, calcula:

a) la velocidad del pilote inmediatamente después del impacto,

b) el coeficiente de restitución e

c) el porcentaje de pérdida de energía debida al impacto

Solución

a) Cuando el martillo cae, se conserva la energía por lo que:

$$\frac{1}{2}mv = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 6,26m/s \tag{5.34}$$

cuando rebota, también conserva la energía

$$\frac{1}{2}mv' = mgh' \Rightarrow v' = \sqrt{2gh'} = 1,401m/s \tag{5.35}$$

Por conservación de momentum, tendremos

$$800(6,26) + 0 = 800(-1,401) + 2400v'_p \Rightarrow v'_p = 2,55m/s \tag{5.36}$$

b) El coeficiente de restitución es:

$$e = \frac{|\text{vel. rel. de separacion}|}{|\text{vel. rel. de aproximacion}|} = \frac{2,555 + 1,401}{6,26} = 0,631 \tag{5.37}$$

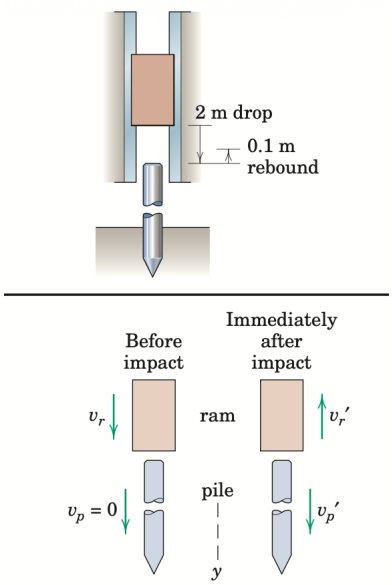


Figura 5.6: Martillo (ram) golpeando un pilote (pile)

c) La energía inicial es:

$$K = E_{pg} = mgh = 800(9,81)(2) = 15700J \tag{5.38}$$

despues del impacto, la energía cinética es:

$$K' = \frac{1}{2}800(1,401)^2 + \frac{1}{2}(2400)(2,55)^2 = 8620J \tag{5.39}$$

Por lo tanto, el porcentaje de energía perdida es:

$$\frac{15700 - 8620}{15700} = 0,451 = 45,1\,\% \tag{5.40}$$

Ejemplo 33.
Una partícula esférica 1 tiene velocidad $v_1 = 6$m/s en la dirección que se ve en la figura y colisiona con una partícula esférica 2 de igual masa y diámetro que estaba en reposo. Si el coeficiente de restitución es $e = 0.6$, determine:

a) El movimiento final de cada partícula.

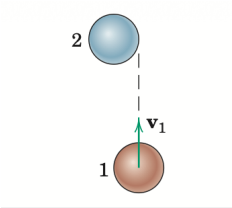
b) El porcentaje de energía perdida en la colisión.

Solución De la geometria del problema vemos que el angulo que se hace entre la velocidad $\vec{v}_1$ y la normal n es de 30°. Entonces, las velocidades iniciales son:

$$(v_1)_n = v_1\cos(30°),\ (v_1)_t = v_1\sin(30°),\ v_2 = 0 \tag{5.41}$$

La conservación de momentum, con $m_1 = m_2$ es:

$$5,2 + 0 = (v_1')_n + (v_2')_n \tag{5.42}$$



Del coeficiente de resitucion sabemos:

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_2)_n - (v_1)_n} = 0.6 = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{5,2 - 0} \tag{5.43}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos:

$$(v_1')_n = 1,039, \quad (v_2')_n = 4,16 \tag{5.44}$$

La conservación de momentum en la dirección tangencial es para cada molécula porque sumimos que no hay fuerza en la dirección t. Entonces,

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t \Rightarrow (v_1')_t = (v_1)_t = 3 \tag{5.45}$$

$$m_2(v_2') - t = m_2(v_2)_t \Rightarrow (v_2')_t = (v_2)_t = 0 \tag{5.46}$$

Por lo tanto, las velocidades finales son

$$v_1' = \sqrt{(v_1')_t^2 + (v_1')_n^2} = 3,17$$

$$v_2' = \sqrt{(v_2')_t^2 + (v_2')_n^2} = 4,16m7s$$

y el angulo es

$$\theta' = \arctan\left(\frac{(v_1')_n}{(v_1')_t}\right) = 19,11^\circ \tag{5.47}$$

Teniendo las velocidades es directo obtener el cambio de energía cinética.

Ejemplo 34.

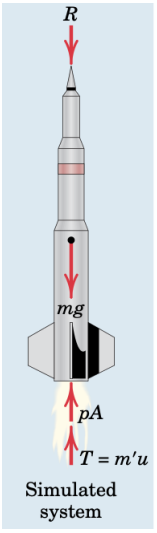
Un cohete con una masa total inicial m_0 se lanza verticalmente desde el polo norte y acelera hasta que se agota el combustible, que se quema a una velocidad constante. La velocidad relativa de los gases de escape en la tobera tiene un valor constante u, y la tobera expulsa el gas a presión atmosférica durante todo el vuelo. Si la masa residual de la estructura y la maquinaria del cohete es m_b cuando se produce la combustión, determine la expresión para la velocidad máxima alcanzada por el cohete. Desprecie la resistencia atmosférica y la variación de la gravedad con la altitud.

Solución Solución I: Consideremos la tobera como una fuerza externa que afecta al cohete. Colocando el eje y que crece hacia abajo. Entonces, la segunda ley de Newton para el cohete

$$T - mg = m\dot{v} \tag{5.48}$$

donde hemos despreciado la fuerza R y la presión atmosférica. La fuerza T que hace la tobera es: $T = -\dot{m}u$, ya que empuja al cohete hacia arriba

$$-\dot{m}u - mg = m\dot{v} \tag{5.49}$$



Como buscamos la velocidad, podemos escribir:

$$dv = -\frac{\dot{m}}{m}udt - gdt = -u\frac{dm}{m} - gdt \tag{5.50}$$

Integrando:

$$v = u\ln(m_0/m) - gt \tag{5.51}$$

Como el combustible se quema a tasa constante, entonces:

$$\dot{m} = \text{constante} \Rightarrow m(t) = m_0 + \dot{m}t \tag{5.52}$$

Entonces, si m_b es la masa que queda del cohete cuando se acaba el combustible. Entonces, esto ocurre en el tiempo:

$$t_b = \frac{m_b - m_0}{\dot{m}} \tag{5.53}$$

Por lo tanto, la velocidad máxima es:

$$v_{\text{max}} = u\ln(m_0/m_b) + \frac{g}{\dot{m}}(m_0 - m_b) \tag{5.54}$$

Solución II: Si usamos masa variable, entonces la unica fuerza externa que actua es el peso:

$$-mg = m\dot{v} + \dot{m}u \tag{5.55}$$

pero, $\dot{m}u = -T$, por lo que nos queda:

$$T - mg = m\dot{v} \tag{5.56}$$

Capítulo 6

Colección de partículas y Cuerpo rígido

En este capitulo estudiaremos la rotación de colección de partículas y cuerpos rígidos.

6.1. Centro de Masa

Hemos visto que se puede estudiar el momentum y colisiones cuando hay mas de un cuerpo.

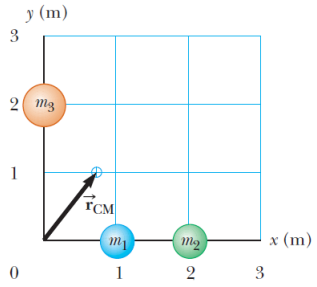
El centro de masa es un punto que representa a todos los cuerpos en un solo punto. Esto también aplica a objetos no puntuales, como una mesa o una persona. El centro de masa es, básicamente, el promedio de las posiciones de los cuerpos, es decir:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.1}$$

o en su versión continua:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \tag{6.2}$$

Notemos que en el denominador esta la masa total del cuerpo. **Ejemplo 35.**
Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura. Encuentre el centro de masa del sistema. Una distribución continua de objetos es básicamente un objeto



que esta hecho de otros mas pequeños pero que son imposibles de distinguir. Por ejemplo, una

mesa, silla, muro, puerta, etc. Todos ellos están hechos de objetos mas pequeños, átomos, pero es imposible de distinguir y se ven como un gran objeto. El centro de masa, es:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \tag{6.3}$$

6.2. Torque

Consideremos una puerta cerrada, si queremos abrirla lo natura es empujarla pero la pregunta que surge es, ¿Cuánta fuerza debemos aplicar para abrir la puerta? pero, desde la experiencia, nos podemos dar cuenta que a pesar de aplicar una fuerza la puerta se moverá de distintas maneras dependiendo de si aplicamos la fuerza mas cerca o lejos de la bisagra. Es decir, la puerta girará distinto dependiendo de la fuerza y de la distancia sobre la que apliquemos la fuerza. Definiremos el **torque** como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.4}$$

donde $\vec{r}$ es el radio vector que hay entre el eje de giro y la fuerza aplicada $\vec{F}$.

El modulo del torque es:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin(\alpha) \tag{6.5}$$

donde α es el angulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Debemos notar que el modulo solo nos entrega la magnitud, pero no la dirección del torque por lo que debemos obtenerla de otra manera. Un forma bastante util es utilizar la regla de mano derecha.

De la definición, diremos que un torque es positivo si provoca que el giro sea contra las manecillas del reloj. Por el contrario, diremos que un torque es negativo si provoca que el giro sea a favor de las manecillas del reloj.

Ejemplo 36.

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura 6.1, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una cuerda enrollada en torno al tambor, que tiene radio $R_1 = 1m$, ejerce una fuerza $T_1 = 5N$ hacia la derecha sobre el cilindro, mientras que el radio $R_2 = 0.5m$ y la tension es $T_2 = 15N$. Obtenga el torque neto sobre el cilindro

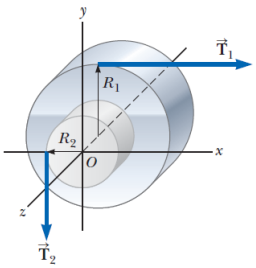


Figura 6.1: El brazo de torque de $\vec{T}_1$ es R_1 y el de $\vec{T}_2$ es R_2

Solución El torque que sentirá el cilindro será la suma de los torques, es decir:

$$\tau_{\text{neto}} = \tau_1 + \tau_2 \tag{6.6}$$

donde τ_1 es el torque que realiza la tensión $\vec{T_1}$ sobre R_1 y τ_2 el torque que hace la fuerza T_2 sobre R_2.

Veamos que para el torque 1 la punta de la flecha de la fuerza con la punta de la flecha del radio hacen un ángulo de $270°$, entonces el torque será:

$$\tau_1 = r_1 T_1 \sin(270°) = 1 \cdot 5(-1) = -5Nm \tag{6.7}$$

mientras que para el torque 2 tendremos que la flecha de la tension 2 con la flecha del radio 2 hacen un ángulo de 90º por lo que tendremos:

$$\tau_2 = r_2 T_2 \sin(90°) = 0.5 \cdot 15 \cdot 1 = 7.5Nm \tag{6.8}$$

Por lo tanto el torque neto que siente el cilindro es:

$$\tau_{\text{neto}} = \tau_1 + \tau_2 = (-5 + 7.5)N \cdot m = 2.5Nm \tag{6.9}$$

dado que el torque es positivo el cilindro girará contra las manecillas del reloj.

Otra forma de ver los signos de los torques es darse cuenta que la tension 1 genera que el cilindro gire a favor de las manecillas del reloj por lo que el torque 1 debe ser negativo. De forma similar, vemos que la tension 2 genera un giro contra las manecillas del reloj por lo que su torque es negativo. Recordar que es el torque de cada fuerza, el torque neto es la suma de ambos.

6.3. Segunda Ley de Newton generalizada

Supongamos una colección de partículas confinadas a un volumen finito del espacio. Una masa m_i de este objeto estará sometido a fuerzas $\vec{F_i}$, desde afuera y fuerzas $\vec{f_i}$ desde dentro de los bordes del sistema. Las fuerzas desde afuera se deben a fuerzas externas como fuerza de gravedad u otras. Las fuerzas internas se deben a interaccion dentro de los bordes del sistema, es decir, son fuerzas de reación. En la figura 6.2 se puede ver una representación de esto. Usando la definición de centro de masa, podemos ver que la ubicación de este es:

$$m\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{6.10}$$

Utilizando la segunda ley de Newton sobre la masa m_i

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots = m_i \ddot{\vec{r}}_i \tag{6.11}$$

Aplicando lo mismo, para cada masa m_i del sistema tendremos:

$$\sum \vec{F} + \sum \vec{f} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \tag{6.12}$$

donde las sumas son todas las fuerzas actuando sobre todas las partículas. Dado que las fuerzas internas son de acción y reacción al sumar sobre todas ellas estas dan idénticamente cero. Entonces nos queda:

$$\sum \vec{F} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad \text{o} \quad \vec{F} = m\vec{a}_{CM} \tag{6.13}$$

donde hemos usado que $\vec{a}_{CM} = \ddot{\vec{r}}_{CM}$

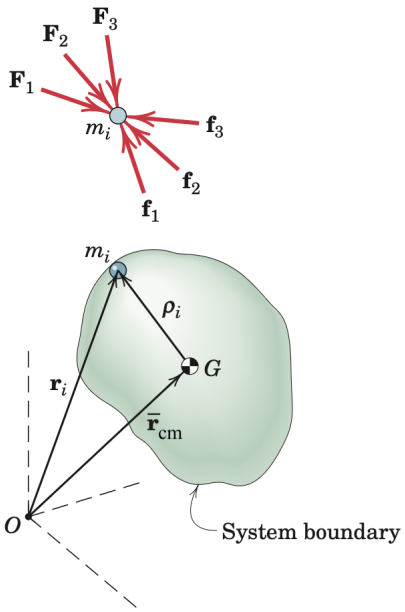


Figura 6.2: Fuerzas actuando sobre una masa m_i. G es el centro de masa del sistema.

6.4. Cinematica circular

Si queremos estudiar la dinamica rotacional, tanto de colección de partículas como de solidos, debemos estudiar la cinemática rotacional esta vez permitiendo que la velocidad angular cambie.

A partir del vector posición en coordenadas polares

$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{6.14}$$

obtuvimos que la velocidad es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \tag{6.15}$$

donde el termino $\dot{r}$ corresponde a la componente radial de la velocidad y $r\dot{\omega}$ a la componente tangencial. Además, a $\omega = \dot{\theta}$ se le suele llamar **velocidad angular**.

La aceleración es:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \tag{6.16}$$

Si el radio es constante, la aceleración posee un termino radial, $-\hat{r}r\dot{\theta}^2$ y un termino tangencial $r\ddot{\theta}$. Al termino $\alpha = \ddot{\theta}$ se le llama **aceleración angular.** Entonces, la aceleración tangencial es:

$$a_t = r\alpha. \tag{6.17}$$

En realidad, la velocidad angular es un vector $\vec{\omega}$ que apunta en dirección al eje de rotación del objeto, tal como se ve en la figura 6.3. El modulo de la velocidad angular es $|\vec{\omega}| = \dot{\theta}$.

Notemos que, si el radio es constante, podemos escribir la velocidad como:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{6.18}$$

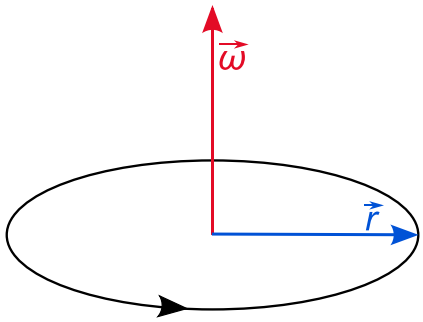


Figura 6.3: Objeto con radio r y velocidad angular $\vec{\omega}$

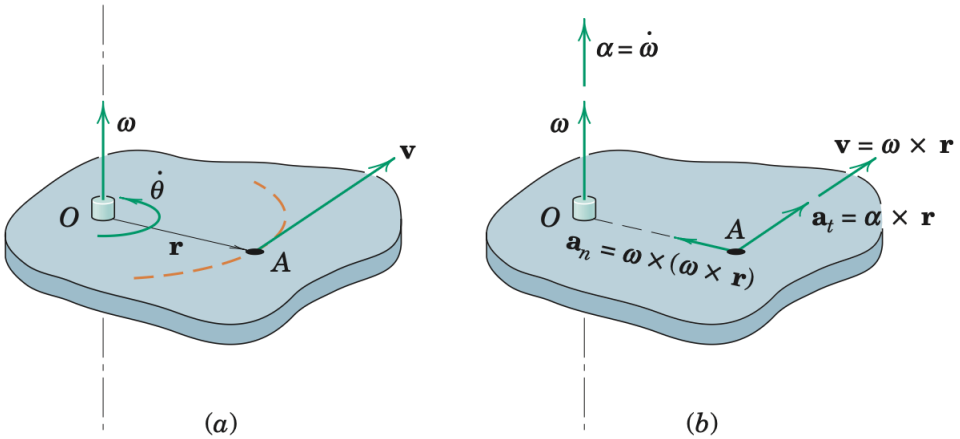


Figura 6.4: Velocidad y aceleración angular de un solido rotando

y la aceleración

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} \tag{6.19}$$
$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \tag{6.20}$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{6.21}$$

Entonces, en resumen, podemos ver que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}. \tag{6.22}$$

En la figura 6.4 se ve una descripción gráfica de los vectores.

6.5. Rotación de una colección de Partículas

6.5.1. Segunda Ley de Newton

Consideremos la segunda Ley de Newton actuando sobre un objeto de masa m que esta girando a un radio $\vec{r}$ de un eje de giro:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{6.23}$$

donde la aceleración es 6.19. Entonces, las fuerzas se separarán en una componente normal (o radial) y una tangencial. Entonces, la segunda Ley de Newton será:

$$\sum F_n = m\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{6.24}$$

$$\sum F_t = m\vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{6.25}$$

Si queremos construir el torque, tomemos el producto cruz entre el radio de giro y cada componente de la fuerza

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_n = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

tanto $\vec{\omega}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre ellos y cada uno es perpendicular a $\vec{r}$. Por lo tanto, el producto cruz es idénticamente cero. Es decir, la componente normal no general torque.

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_t = 0 \tag{6.26}$$

Esto tiene todo el sentido ya que esta componente de la fuerza es la que uno interpreta como fuerza centripeta. Es decir, mantiene el objeto girando a velocidad angular constante

Para la componente tangencial

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_t = m\vec{r} \times (\alpha \times \vec{r}) \tag{6.27}$$

utilizando la identidad:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{6.28}$$

tenemos:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_t = m\left(\vec{\alpha} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\alpha})\right) \tag{6.29}$$

Como la aceleración angular va en dirección de la velocidad angular (puede ir en sentido opuesta si la frena o en el mismo sentido la acelera), entonces nos queda:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_t = mr^2\vec{\alpha} \tag{6.30}$$

Por lo tanto, el torque, que corresponde al radio de giro producto cruz con la fuerza:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.31}$$

$$= \vec{r} \times (\vec{F}_n + \vec{F}_t) \tag{6.32}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_t \tag{6.33}$$

$$= mr^2\vec{\alpha} \tag{6.34}$$

Se le llama **momento de inercia** a:

$$I = mr^2 \tag{6.35}$$

Debemos notar que esto corresponde para una particula rotando. Si hay mas particulas rotando con respecto al mismo eje, la segunda ley de Newton se lee como:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots = m_1 r_1^2 \vec{\alpha}_1 + m_2 r_2^2 \vec{\alpha}_2 \tag{6.36}$$

6.5.2. Momentum angular

Cuando estudiamos la segunda Ley de Newton, en realidad es:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{6.37}$$

de manera similar, escribiremos la segunda Ley de Newton rotacional como

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{6.38}$$

donde hemos introducido el **momentum angular**: $\vec{L}$, que esta definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{6.39}$$

Si hay varias partículas, cada una tendra su propio torque:

$$\vec{\tau}_1 = \frac{d\vec{L}_1}{dt}; \quad \vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_2}{dt} \tag{6.40}$$

Entonces, el torque total de una colección de partículas es

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) \tag{6.41}$$

Supongamos que cada partícula, ademas de las fuerzas entre ellas, estan sometidas a fuerzas externas. Entonces la fuerza que siente la particula 1 será: $\vec{F}_1 + \vec{f}_{12}$, y de manera similar para la particula 2, tal como se ve en la figura 6.5

Entonces, cada torque es:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12}),\ \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{f}_{21})$$

Usando que $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ nos queda:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{f}_{21} \tag{6.42}$$

si asumimos que la fuerza entre ellos va en la misma dirección de $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, entonces el ultimo terminoe es cero y nos queda:

$$\vec{\tau}_{1,\text{ext}} + \vec{\tau}_{2,\text{ext}} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) \tag{6.43}$$

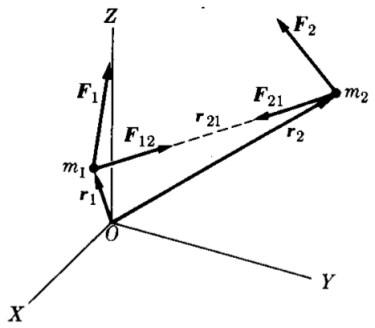


Figura 6.5: Masa m_1 y m_2, cada una ubicada en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

Por supuesto, si hay mas partículas se tendrá:

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{\tau}_{i,\text{ext}} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) \tag{6.44}$$

Entonces, podemos enunciar que la rapidez de cambio del momentum angular total de un sistema de partículas, relativo a un punto arbitrario, es igual al torque total relativo al mismo punto, de las fuerzas externas actuantes sobre el sistema.
Notemos que si no hay fuerzas externas, entonces:

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots) = 0 \tag{6.45}$$

Es decir,

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots = \text{constante} \tag{6.46}$$

6.5.3. Energía de rotación:

Consideremos un sistema, que por simplicidad, compuesto por dos partículas. Ambas estan sometidas a fuerzas internas y externas y además tienen velocidad, tal como se ve en la figura 6.6. A partir de la segunda ley de Newton y pensando en el trabajo, veamos que:

$$\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1$$
$$\vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

sumando, tendremos:

$$\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 \tag{6.47}$$

usando $\vec{a} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = v dv$ y llamando $d\vec{r}_{12} = d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2$, nos queda:

$$m_1 v_1 dv_1 + m v_2 dv_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12} \tag{6.48}$$

Integrando desde un tiempo inicial t_0 a un tiempo t, entonces

$$\frac{1}{2} m_1 \Delta v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \Delta v_2^2 = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_A^B \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12} \tag{6.49}$$

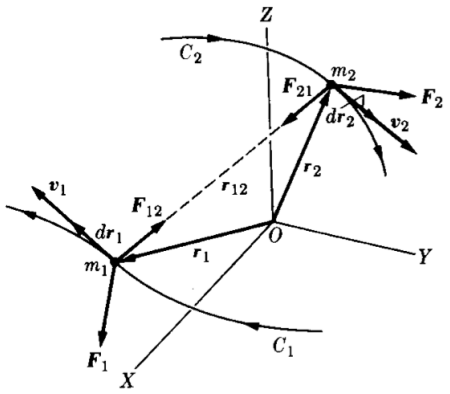


Figura 6.6: Masa m_1 y m_2, cada una ubicada en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ y velcidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

donde $\vec{B} = \vec{r}(t)$ y $\vec{A} = \vec{r}(t_0)$. Notemos que hay trabajo externo debido a las fuerzas externas $\vec{F}$ e interno debido a las fuerzas internas $\vec{f}$. Entonces, finalmente:

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K \tag{6.50}$$

6.5.4. Conservación de Energía

Consideremos que las fuerzas internas son conservativas, entonces:

$$W = \int_A^B \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_{p,12} \tag{6.51}$$

Entonces, generalizando a N partículas:

$$W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta E_p \tag{6.52}$$

donde

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad E_p = \sum_{i<j} E_{p,ij} = E_{p,12} + E_{p,13} + \ldots + E_{p,23} + E_{p,24} + \ldots \tag{6.53}$$

Si además, las fuerzas externas también son conservativas, entonces también se pueden escribir como menos el cambio de energía potencial. Entonces:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta E_{p,\text{int}} + \Delta E_{p,\text{ext}} = 0 \tag{6.54}$$

Es decir, la energía total del sistema $E = K + E_{p,\text{int}} + E_{p,\text{ext}}$ se conserva.

Debemos notar que si la cantidad de partículas es excesivamente grande, entonces debemos utilizar termodinámica para describir su comportamiento.

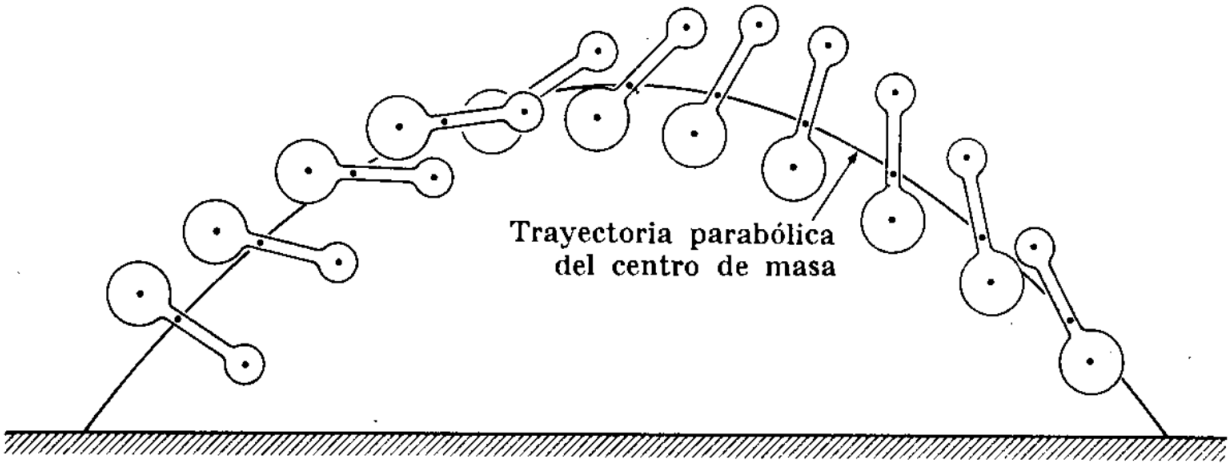


Figura 6.7: El centro de masa de un solido describe una tayectoria parabolica.

6.6. Rotación de Cuerpo Rígido

6.6.1. Segunda Ley de Newton

Ahora estudiaremos el cuerpo rígido. Un cuerpo rígido tiene todas las partículas a la misma distancia entre ellas. Es decir, mantiene su forma.

Los cuerpos rígidos pueden trasladarse, rotar o ambas.

La traslación del objeto se manifiesta a través del movimiento del centro de masa del solido rígido, es decir, satisface:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{CM} \tag{6.55}$$

Por lo tanto nos debemos enfocar en estudiar la rotación del solido. Para esto, utilizaremos que la segunda ley de Newton para rotaciones es:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{6.56}$$

entonces, obtengamos el momentum angular de un solido rígido.

Momentum angular.

Consideremos un cuerpo rígido que gira en torno al eje z con velocidad angular $\vec{\omega}$, como se ve en la figura 6.8. Entonces, cada una de sus particulas describe un movimiento circular con respecto al eje de giro. Entonces, la velocidad del punto A es: $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ con $\vec{r}_i$ el vector posición con respecto al origen O. No es difícil ver que la magnitud de la velocidad $v = \omega r_i \sin(\theta) = \omega R_i$. Entonces, el momentum angular de la partícula A con respecto a O es

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{6.57}$$

Del producto cruz se ve que la dirección del momentum angular es perpendicular a la velocidad y al radio. La componente z del momentum angular corresponde a:

$$L_{iz} = m_i r_i v_i \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_i) = m_i R_i^2 \omega \tag{6.58}$$

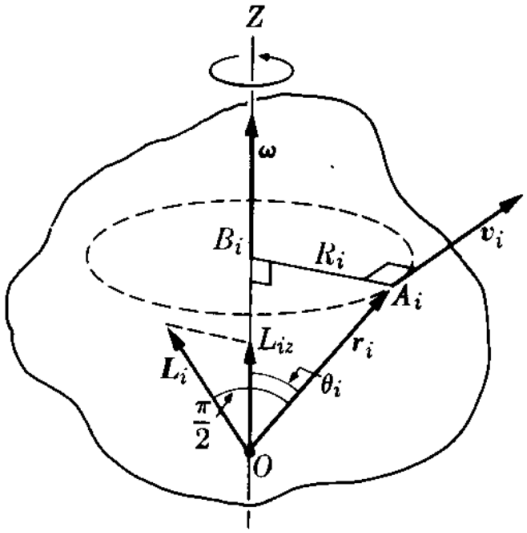


Figura 6.8: Momentum angular solido rígido

Entonces, la componente z del momentum angular total del cuerpo rotando es:

$$L_z = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots)\omega = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega \tag{6.59}$$

donde nuevamente aparece el momento de inercia. Llamando:

$$I = \sum_i m_i R_i^2 \tag{6.60}$$

entonces tendremos que la componente z del momentum angular cumple con:

$$L_z = I\omega \tag{6.61}$$

El momentum angular total del cuerpo será:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \tag{6.62}$$

y en general **no** es paralelo al eje de rotación.

Notemos que cada cuerpo puede girar de distintas maneras, sin embargo es posible escoger el sistema de referencia tal que el momentum angular sea paralelo al eje de rotación [1]. Se puede mostrar que para cada cuerpo, sin importar su forma, hay al menos tres direcciones mutuamente perpendiculares para las cuales el momentum angular total es paralelo al eje de rotación. Estos ejes se llaman **ejes principales de inercia** y los momentos de inercia correspondientes se llaman **momentos de inercia principales**. Llamemos a los ejes princpales $X_0,\ Y_0,\ Z_0$, ellos

[1] En realidad no depende del sistema de referencia. Se puede mostrar que para cada cuerpo hay algún eje de rotación para el cual el momentum angular total sea paralelo al eje.

constituyen u n sistema d e referencia fijo en el cuerpo, y, e n general, rotan con respecto al observador. Cuando e l cuerpo tiene alguna clase d e simetría, los ejes principales coinciden con algún eje de simetría. Por ejemplo, en una esfera, cualquier eje que pasa a través de s u centro es u n eje principal. Para u n cilindro y, en general, para cualquier cuerpo con simetría cilíndrica, e l eje de simetría, así como cualquier eje perpendicular a él, son ejes principales. Para u n bloque rectangular los tres ejes principales son perpendiculares a las superficies y pasan a través del centro del bloque. En la figura 6.9 se ve los ejes principiales de distintas figuras. Cuando un cuerpo gira al rededor de un eje principal, el momentum de inercia es paralelo al

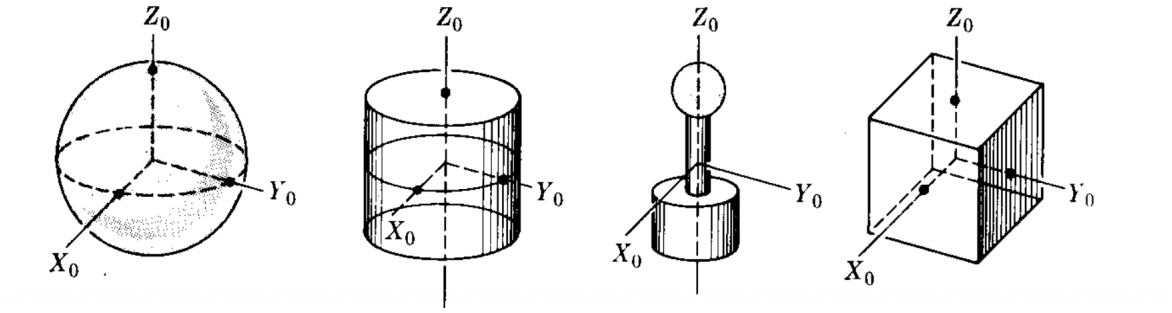


Figura 6.9: Ejes principales

eje, es decir, es paralelo a la velocidad angular ω. Entonces, podemos escribir:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{6.63}$$

donde I es el momento de inercia principal. Esta relación solo es valida si gira de manera paralela a un eje principal

6.6.2. Momento de Inercia

Veamos en mayor detalle el momento de inercia y su calculo.
Habiamos visto que tenemos una colección de partículas, el momento de inercia corresponde:

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{6.64}$$

En un cuerpo rígido, las particulas son muchas y estan muy cerca una de otra por lo que se comporta como un continuo, es decir:

$$I = \int r^2 dm \tag{6.65}$$

Sin embargo, esta relación para tratarla hay que determinar sobre que eje gira. Supongamos que gira en torno al eje z como se ve en la imagen 6.10 Notemos que gira en circulo con respecto al eje z por lo que se cumple $r^2 = x^2 + y^2$. Entonces el momento de inercia será:

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm \tag{6.66}$$

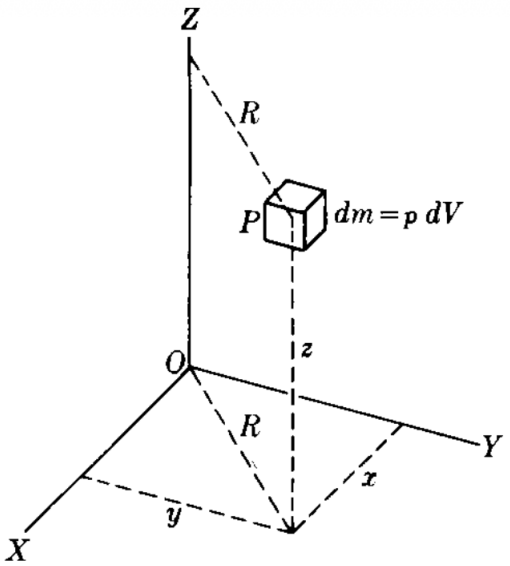


Figura 6.10: masa dm girando en torno a z

En general, para calcular la integral debemos escribir

$$dm = \rho dV = \frac{M}{V} dxdydz \tag{6.67}$$

donde M y V son la masa total y volumen total respectivamente. Debemos tener en mente que el elemento de volumen $dxdydz$ corresponde a una integral triple en el caso de un objeto en 3 dimensiones, integral doble en dos dimensiones e integral simple en una dimension. Además, si se cambian las coordenadas hay que agregar el jacobiano de la transformación.

Teorema de ejes paralelos

Supongamos que un objeto gira con respecto a un eje que no pasa por su centro de masa. Entonces podemos relacionar el momento de inercia de este eje con respecto al eje que si pasa por el centro de masa del cuerpo. Esto se llama **teorema de Steiner** o **Teorema de los ejes paralelos**.

Sea Z un eje arbitrario 4 Z_C un eje paralelo a Z que pasa por el centro de masa del cuerpo. Si a es la distancia entre los ejes, entonces

$$I = I_C + Ma^2 \tag{6.68}$$

donde I e I_C son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a Z y Z_C, respectivamente, y M es la masa del cuerpo.

Demostración: Sea Z un eje de rotacion arbitrario y Z_C un eje paralelo que pasa por el centro de masa del cuerpo, tal como se ve en la figura 6.11

Coloquemos el sistema de centro de masa X_C, Y_C, Z_C en el centro de masa C del cuerpo de masa M y el eje Y_C esta en el plano determinado por Z y Z_C. El sistema coordenada XYZ

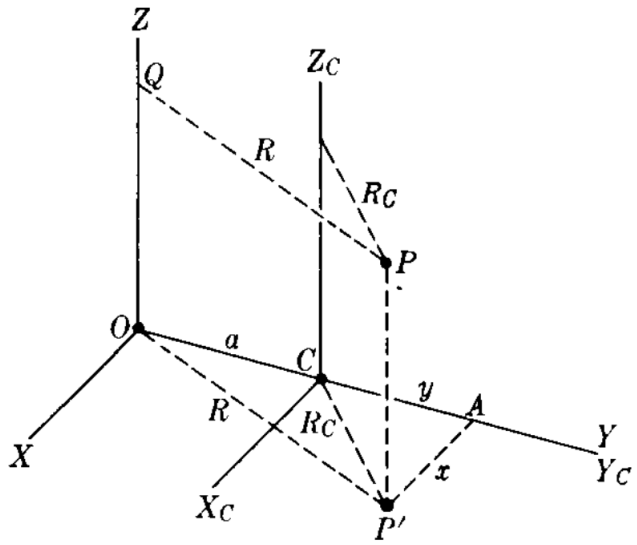


Figura 6.11: Ejes Z y Z_C

esta tal que Y coincide con Y_C. El punto P es un punto arbitrario del cuerpo M. Entonces, de la figura 6.11, entnoce $P'A$ es perpendicular a Y_C y $P'A = x$, $CA = y$, y $OC = a$, tenemos:

$$\begin{aligned} R_C^2 &= x^2 + y^2 \\ R^2 &= x^2 + (y+a)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2ay + a^2 \\ &= R_C^2 + 2ya + a^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando por la mas obtenemos el momento de inercia:

$$I = \sum mR^2 = \sum m(R_C^2 + 2ya + a^2) = \sum mR_C^2 + 2a(\sum my) + a^2 \sum m \tag{6.69}$$

El primer termino es el momento de inercia con respecto al eje Z_C y el utimo termino es la masa total $M = \sum m$. Entonces:

$$I = I_C + Ma^2 + 2a \sum my \tag{6.70}$$

Notemos que, del centro de masa tenemos:

$$y_{CM} = \frac{\sum my}{M} \tag{6.71}$$

pero en este caso $y_{CM} = 0$ por lo que nos queda $\sum my = 0$ y tenemos:

$$I = I_C + Ma^2 \tag{6.72}$$

6.7. Dinámica rotacional

Habiendo determinado el momentum angular y que es el momento de inercia, podemos escribir la segunda ley de Newton rotacional, para una rotación en torno a un eje principal:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}, \quad \alpha = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{6.73}$$

donde hemos asumido que el tanto el eje como el momento de inercia permanece constante. Hay que tener en mente que los torque son los torques producidos por fuerzas *externas*.

Diremos que un cuerpo esta en reposo o equilibrio si cumple que:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \vec{\tau} = 0 \tag{6.74}$$

6.7.1. Energía de rotación.

Habiamos definido la energía cinética de un grupo de particulas como:

$$K_{\text{rot}} = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m v_i^2 \tag{6.75}$$

En un cuerpo rígido, la velocidad angular es constante por lo que podemos escribir la energía cinética como:

$$K_{\text{rot}} = \sum \frac{1}{2} m R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i R_i^2 \right) \omega^2 \tag{6.76}$$

donde identificando que esta el momento de inercia total. por lo tanto, la energía de rotación de un cuerpo es:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{6.77}$$

Notemos que, a partir de:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow \omega^2 = \frac{L^2}{I} \tag{6.78}$$

Por lo que podemos escribir:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} \tag{6.79}$$

Energía de rotación y traslación

Consideremos ahora un cuerpo que esta rotando en torno a su centro de masa y a la vez se traslasa (según un observador inercial). Entonces, la energía que se le mide a este cuerpo es:

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K_{\text{rot, CM}} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \tag{6.80}$$

Dado que en un cuerpo rigido la distancia entre particulas no cambia podemos asumir que las fuerzas internas no hacen trabajo. Por lo tanto, del teorema de trabajo energia vemos que el cambio de energía cinética será

$$\Delta K = W_{\text{ext}} \tag{6.81}$$

Si las fuerzas externas son conservativas, entonces se les puede asociar una energía potencial tal que:

$$W_{\text{ext}} = -\Delta E_p \tag{6.82}$$

Por lo tanto, se cumplira que:

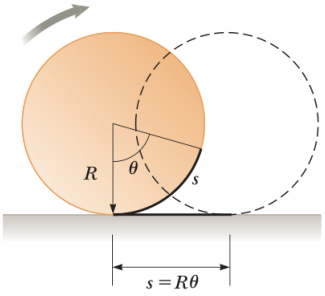
$$\Delta E = \Delta K + \Delta E_p = 0 \quad \text{Solo si las fuerzas externas son conservativas} \tag{6.83}$$

6.7.2. Tipos de Movimientos

Hemos visto que el movimiento de un objeto esta descrito por el movimiento (rotación) del centro de masa mas la rotación en torno al centro de masa. Entonces tenemos tres tipos de movimientos de un solido rotando:

- **Rodamiento Puro:**El objeto rota y se traslada sin deslizarse. Es decir, todo lo que gira la rueda es igual a lo que se mueve el centro de masa:

$$\Delta x_{CM} = R\Delta\theta \Rightarrow v_{CM} = R\omega \Rightarrow a_{CM} = R\alpha \tag{6.84}$$



- **Rotación pura**: Si es solo rotación, entonces el centro de masa no se mueve:

$$v_{CM} = 0, \quad v = R\omega \neq 0 \tag{6.85}$$

- **Traslación Pura:**En este caso, solo se mueve el centro de masa pero no hay rotación:

$$v_{CM} \neq 0, v = R\omega = v_{CM} \tag{6.86}$$

En la figura 6.12 vemos estos casos:

La fuerza de rozamiento puede ser la causante de que un objeto ruede, pero ¿por qué nos cuesta menos desplazar un objeto haciéndolo rodar que deslizarlo sobre el suelo? Consideremos un disco de masa m y radio R en una superficie con roce. El roce solo actúa sobre el punto de contacto del disco con la superficie:

$$f_r = \mu N = \mu mg \tag{6.87}$$

La velocidad en el punto P será:

$$v_P = v_{CM} - \omega R \tag{6.88}$$

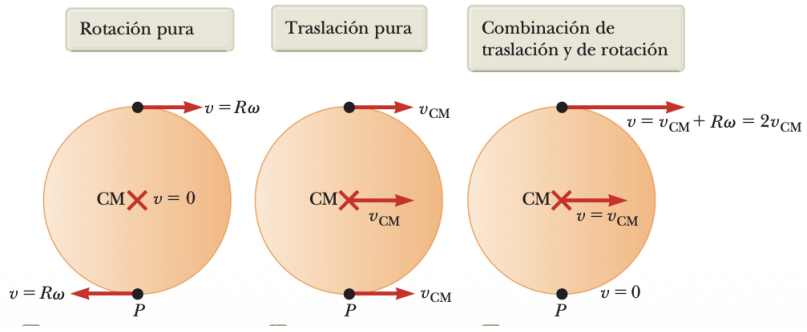


Figura 6.12: Movimiento de rotación pura+movimiento de traslación pura= rotación mas traslación sin deslizar.

Si el objeto rueda sin deslizar, entonces $v_{CM} = \omega R$, por lo tanto, la velocidad del punto P con respecto al suelo es cero y por lo tanto la fuerza de roce no hace trabajo. Es decir, se comporta como si el objeto girara en torno al punto P y por lo tanto su energía cinética sería:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \tag{6.89}$$

con I_P el momento de inercia medido desde P

6.8. Ejemplo

Ejemplo 37.
Considere cuatro masas, dos poseen masa m a una distancia b del centro y las otras dos son de masa M y están a una distancia a. Esta configuración puede rotar de dos maneras distintas, tal como muestra la figura 6.13. Obtenga el momento de inercia para el caso a) y para el caso b). Compare

Solución

a) Para este caso, veamos las masas que giran son M, mientras que las masas m no giran. Entonces el momento de inercia de esta configuración es:

$$I = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2 \tag{6.90}$$

b) Ahora todas las masas giran, entonces el momento de inercia total es:

$$I = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2 \tag{6.91}$$

Entonces, podemos ver que a pesar de ser la misma figura debido a que giran de distinta forma poseen distintos momentos de inercia.

Ejemplo 38.
Una rueda de radio R, masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como en la figura 6.14. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene

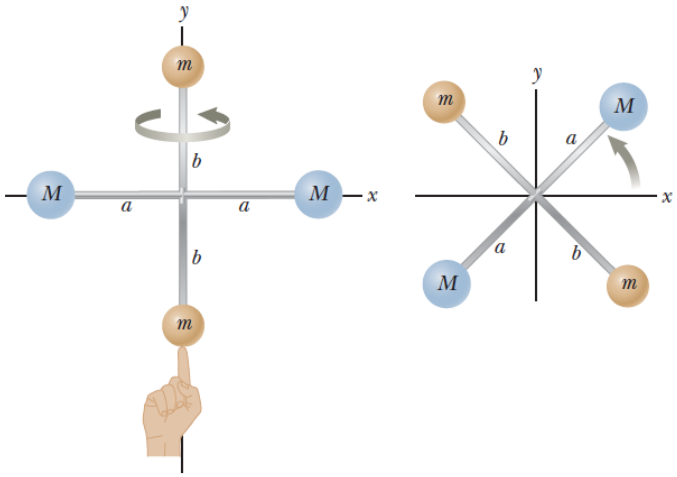


Figura 6.13: Caso a) el objeto gira en torno al eje y, caso b) el objeto gira en el plano xy.

un objeto de masa m. Cuando la rueda se libera el objeto acelera hacia abajo, la cuerda se desenrolla en la rueda y ésta gira con una aceleración angular. Encuentre una expresión para la aceleración angular de la rueda, la aceleración translacional del objeto y la tensión en la cuerda.

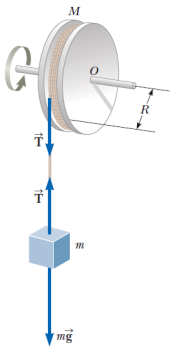


Figura 6.14: Rueda de masa M unida a un bloque de masa m mediante una cuerda inextensible de masa despreciable.

Solución Del diagrama de cuerpo libre para la masa m podemos ver que:

$$T - mg = -ma \Rightarrow T = m(g - a) \tag{6.92}$$

Para el disco, vemos que la tensión de la cuerda T hace una fuerza que provoca que giré por lo que:

$$\tau = TR = I\alpha \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R} \tag{6.93}$$

evaluando en la tensión obtenida del DCL de la masa m tenemos:

$$\frac{I\alpha}{R} = m(g-a) \tag{6.94}$$

Tenemos dos incógnitas, α y a. Pero notemos que la aceleración de la masa m, a debe ser igual a la aceleración tangencial del disco a_t. Es decir $a_t = R\alpha = a$, por lo tanto:

$$\frac{Ia}{R^2} = m(g-a) \tag{6.95}$$

luego:

$$a = \frac{g}{1+\left(\frac{I}{mR^2}\right)}. \tag{6.96}$$

Entonces, la tensión es:

$$T = \frac{mg}{1+\left(\frac{mR^2}{I}\right)} \tag{6.97}$$

y la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R+\left(\frac{I}{MR}\right)} \tag{6.98}$$

Si la masa $M = 1kg$, $m = 3kg$ y $R = 0.3m$, además el momento de inercia del disco es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Entonces,

$$a = 8.4\frac{m}{s^2}, \quad T = 4.2N, \quad \alpha = 28\frac{1}{s^2}. \tag{6.99}$$

Ejemplo 39.
Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 6.15. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ($I = \frac{ML^2}{3}$) ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido?

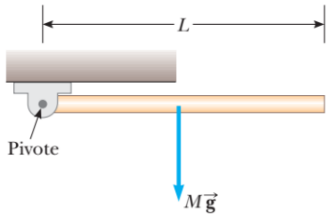


Figura 6.15: Barra sujeta a un pivote

Solución Al soltar la barra, debido a la fuerza de gravedad esta caerá. Esta fuerza de gravedad actúa sobre el centro de masa de la barra, que asumiremos homogenea (todos los puntos de la barra masan lo mismo). Por lo tanto, el CM de masa de la barra esta en el centro a una distancia $\frac{L}{2}$ del pivote. Es decir, hay fuerza mg y radio $\frac{L}{2}$, por lo tanto hay torque. Este torque es el que provoca que la barra gire.

El torque será:

$$\tau = Mg\frac{L}{2} \tag{6.100}$$

de la segunda ley de Newton se tiene:

$$\sum \tau = Mg\frac{L}{2} = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{Mg\frac{L}{2}}{M\frac{L^2}{3}} = \frac{3g}{2L} \tag{6.101}$$

La aceleracion tangencial será:

$$a_t = \alpha R = \frac{3g}{2L}L = \frac{3}{2}g \tag{6.102}$$

Ejemplo 40.
Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo, tal como se muestra en la figura 6.15. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

a) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

b) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

Solución Dado que se quieren determinar las velocidades, utilizaremos energía. Ubicando la altura cero en el extremo inferior de la barra cuando ya cayó. Entonces, la energía inicial será:

$$E_{m,i} = K_i + U_{g,i} = mg\frac{L}{2} \tag{6.103}$$

La energía mecánica final es:

$$E_{m,f} = K_f + U_{g,f} \tag{6.104}$$

esta vez $U_{g,f} = Mg\frac{L}{2}$, ya que es donde esta ubicado el centro de masa de la barra. La energía cinetica de la barra girando en torno al pivote es:

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2} \tag{6.105}$$

Por conservación de energía se tiene:

$$E_{m,i} = E_{m,f} \Rightarrow mgL = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}. \tag{6.106}$$

La velocidad del centro de masa es:

$$v_{CM} = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL} \tag{6.107}$$