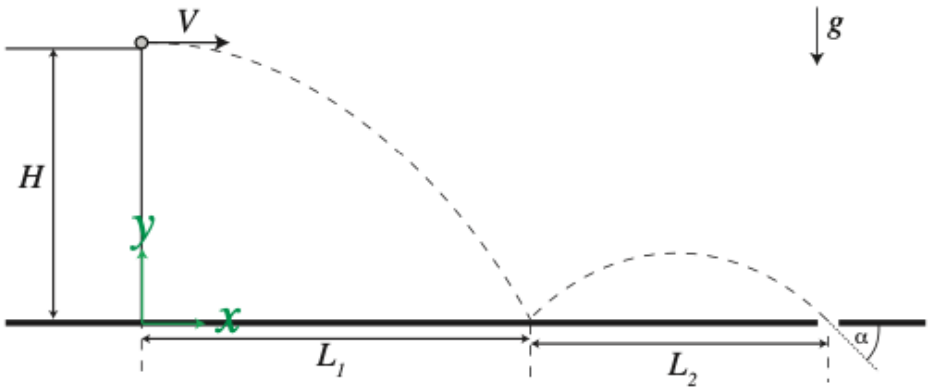
Interrogación 1

Fecha: 12 de Septiembre de 2024

1. Desde una plataforma de altura H se lanza horizontalmente una pelota con rapidez V. La pelota rebota contra el suelo después de haber recorrido una distancia horizontal L_1 (desconocida). Luego de rebotar contra el suelo, la componente horizontal (x) de la velocidad no cambia, mientras que la componente vertical (y) cambia de signo y se reduce a la mitad, es decir:

$$v_{\text{x, después}} = v_{\text{x, antes}}$$
$$v_{\text{y, después}} = -\frac{1}{2} v_{\text{y, antes}}$$

Después del rebote, la pelota continua su movimiento de forma que al llegar al suelo por segunda vez, cae en un agujero a una distancia horizontal L_2 (desconocida) con respecto al lugar donde dio el bote tal como muestra la figura.



(a) Determine la distancia L_1 y el tiempo de vuelo t_1 que la pelota tarda en recorrer L_1. Exprese su resultado en función de H, g y V. **[2 ptos.]**

(b) Determine la distancia L_2 y el tiempo de vuelo t_2 que la pelota tarda en recorrer L_2. Exprese su resultado en función de H, g y V. **[2 ptos.]**

(c) Encuentre el valor de la rapidez inicial V, tal que la velocidad de la pelota forme un ángulo α al llegar al agujero. Exprese su resultado en función de H, g y α. **[2 ptos.]**

(a) Colocando el sistema de referencia en la base de la torre de lanzamiento, la posición de la pelota desde su lanzamiento hasta el momento del rebote, está dada por

$$x_1 = Vt$$
$$y_1 = H - \frac{1}{2} g t^2$$

Por lo tanto, el tiempo hasta el rebote es $t_1 = \sqrt{2H/g}$ y la distancia $L_1 = V\sqrt{2H/g}$.

■

(b) Justo antes del rebote, la velocidad de la pelota es

$$\vec{V}_1 = V\hat{\imath} - \sqrt{2gH}\hat{\jmath}$$

Utilizando la regla del rebote, la velocidad inmediatamente después de la colisión es

$$\vec{V}_1' = V\hat{\imath} + \sqrt{gH/2}\hat{\jmath}$$

Luego, la posición de la partícula para después del rebote está dada por

$$x_2 = L_1 + Vt$$
$$y_2 = \sqrt{gH/2}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2$$

donde Δt corresponde al intervalo de tiempo desde el momento del rebote.
Luego, el tiempo de vuelo y la distancia recorrida tras la colisión son $t_2 = \Delta t = \sqrt{2H/g}$ y $L_2 = V\sqrt{2H/g}$.

(c) La velocidad con la que la pelota llega al agujero es

$$\vec{V}_1' = V\hat{\imath} - \frac{\sqrt{2gH}}{2}\hat{\jmath}$$

de lo cual obtenemos $\tan\alpha = -\sqrt{2gH}/2V$. Así, la rapidez de salida V de la pelota, para llegar con un ángulo α al agujero debe ser

$$V = -\frac{\sqrt{2gH}}{2\tan\alpha}$$

donde $\alpha < 0$, por lo que $\tan\alpha < 0$, de forma que $V > 0$.

■

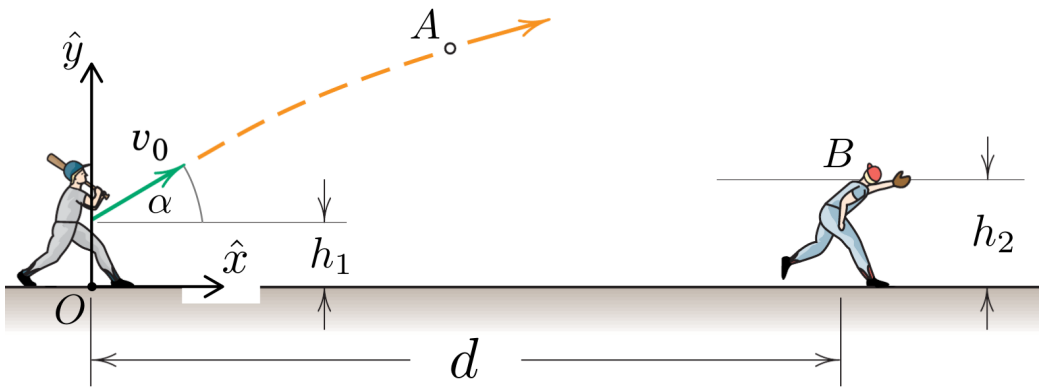
2. Un bateador golpea una pelota A a una altura h_1 del suelo, con una velocidad inicial de magnitud v_0 hacia un jugador B formando un ángulo α con la horizontal. El jugador B, ubicado inicialmente a una distancia d del punto de lanzamiento, demora un tiempo t_0 desde que el bateador golpea la pelota en comenzar a desplazarse con velocidad constante hacia la *posición final de atrapada* que está a una altura $h_2 > h_1$.

   a) Considere el sistema de referencia de la figura con origen en el punto O, y a partir de éste escriba las ecuaciones para la posición y velocidad de la pelota en función del tiempo en cada eje en términos de parámetros conocidos del problema (v_0, g, α, y h_1). **[2 ptos.]**

   b) Determine el tiempo T transcurrido entre el bateo y la atrapada de la pelota, y determine la distancia horizontal entre el punto O y el jugador B cuando éste atrapa la pelota. Exprese su resultado en función de parámetros conocidos del problema (v_0, g, α, h_1 y h_2). **[1.5 ptos.]**

   c) Considerando ahora que la distancia entre el punto de lanzamiento O y el jugador B cuando éste atrapa la pelota es D (conocido), determine la magnitud de la velocidad v_B del jugador B en ese instante. Exprese su resultado en función de parámetros conocidos del problema y asuma conocido el tiempo T entre el bateo y la atrapada de la pelota. **[1 pt.]**

   d) Determine la velocidad $\vec{v}_{A/B}$ de la pelota A con respecto al jugador B, en el momento en el que es atrapada. Exprese su resultado en función de v_0, g, α, D, d, T y t_0. **[1.5 ptos.]**



a) Considere el sistema de referencia de la figura, con origen en el punto O, las ecuaciones de movimiento y de velocidad de la pelota A en cada eje son:

$$x_A(t) = v_0 \cos\alpha t$$
$$y_A(t) = h_1 + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_{Ax}(t) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{Ay}(t) = v_0 \sin\alpha - gt$$

2 pt. = 0.5pts cada ecuación

■

b) Para determinar lo pedido, consideremos que el tiempo de vuelo de la pelota hasta su recogida la determinamos imponiendo que su altura sea h_2, es decir:

$$y_A(T) = h_2 = h_1 + v_0 \sin\alpha T - \frac{1}{2} g T^2$$

0.3pts condición + 0.2pts. ecuación.

Resolviendo la ecuación cuadrática en el tiempo se obtiene:

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2g(h_2 - h_1)}}{g}$$

0.2pts. ecuación.

Para determinar el signo correcto de la solución, consideremos que al ser $h_2 > h_1$ se tiene que $\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2g(h_2 - h_1)} < v_0 \sin\alpha$, por lo que el signo negativo corresponde a la primera vez que alcanza h_2 (justo después del lanzamiento) y el signo positivo es la segunda vez que alcanza h_2, que corresponde a la única solución físicamente probable:

$$T = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2g(h_2 - h_1)}}{g}.$$

0.3pts. análisis solución correcta + 0.1pts. ecuación.

Luego, considerando que en el momento de la recogida, el jugador B y la pelota están en la misma posición horizontal. se tiene que la separación entre el punto de lanzamiento y el punto de recogida será:

$$x_A(T) = v_0 \cos\alpha T = v_0 \cos\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2g(h_2 - h_1)}}{g} \right)$$

0.2pts. expresión + 0.2pts. resultado.

■

c) La ecuación para la posición del jugador B (se mueve a velocidad constante) está dada por:

$$x_B(t) = d + v_B(t - t_0)$$

0.5 pts.

Considerando que en el momento de la recogida $x_B(T) = D$ y despejando v_B, se tiene:

$$v_B = \frac{D - d}{T - t_0}$$

0.3 pts. condición + 0.2 resultado.

■

d) Para calcular la velocidad de la pelota respecto al jugador B consideremos::

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

0.5 pts.

En el momento de la recogida las velocidades estarán dadas por:

$$\vec{v}_A = v_{Ax}(T)\,\hat{x} + v_{Ay}(T)\,\hat{y}$$ 0.25 pts.

$$\vec{v}_A = v_0 \cos\alpha\,\hat{x} + (v_0 \sin\alpha - gT)\,\hat{y}$$ 0.25 pts.

$$\vec{v}_B = \frac{D-d}{T-t_0}\,\hat{x}$$ 0.25 pts.

Luego, reemplazando se obtiene:

$$\vec{v}_{A/B} = \left(v_0 \cos\alpha - \frac{D-d}{T-t_0}\right)\hat{x} + (v_0 \sin\alpha - gT)\,\hat{y}$$

0.25 pts.

■

3. Una hormiga se mueve sobre una superficie de simetría polar, de acuerdo a la descripción en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{\rho} + z(t)\hat{k}$$

La superficie sobre la que se mueve la hormiga, se puede describir mediante la ecuación:

$$\rho(z) = \rho_0 \ln \frac{z}{z_0}$$

Si la hormiga se mueve según las ecuaciones :

$$z(t) = h_0 + u_0\, t\,,$$
$$\theta(t) = \omega_0\, t\,.$$

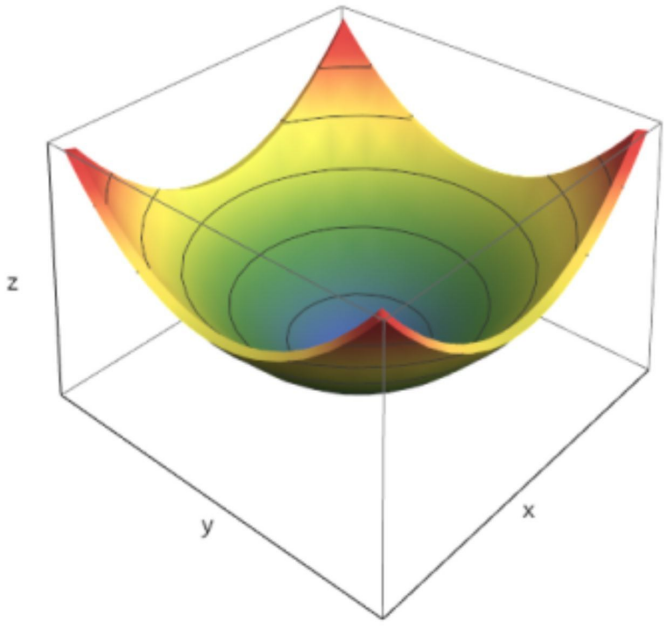
con ρ_0, z_0, h_0, u_0, y ω_0 constantes positivas conocida. Calcule:

a) El vector velocidad como función del tiempo, en las coordenadas cilíndricas planteadas. **[3.0 ptos.]**

b) El vector aceleración como función del tiempo, en las coordenadas cilíndricas planteadas. **[3.0 ptos.]**

Hint: la aceleración en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{a} = \ddot{z}\hat{z} + (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}$$



a)
Necesitamos tanto para la velocidad como para la aceleracion, las derivadas temporales de ρ, z y θ.
Para la velocidad necesitamos las primeras derivadas

$$\vec{v} = \dot{z}\ \hat{k} + \dot{\rho}\ \hat{\rho} + \rho\ \dot{\theta}\ \hat{\theta}$$

Derivando con cuidado y con regla de la cadena:

$$\dot{\theta} = \omega_0$$

0.5pts

$$\dot{z} = u_0$$

0.5pts

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_0 u_0}{h_0 + u_0\ t}$$

1.5pts

por lo que reemplazando

$$\vec{v} = u_0\ \hat{k} + \frac{\rho_0 u_0}{h_0 + u_0\ t}\ \hat{\rho} + \rho_0\ \omega_0 \ln \frac{h_0 + u_0\ t}{z_0}\ \hat{\theta}$$

0.5pts

b)
Para la aceleracion necesitamos ademas las segundas derivadas:

$$\vec{a} = \ddot{z}\hat{z} + (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

0.5pts

$$\ddot{z} = 0$$

0.5pts

$$\ddot{\rho} = -\frac{\rho_0 u_0^2}{(h_0 + u_0\ t)^2}$$

1.0pts

$$\vec{a} = 0\hat{z} + (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (0 + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

0.5 pts

$$\vec{a} = 0\hat{z} + (\ -\frac{\rho_0 u_0^2}{(h_0 + u_0\ t)^2}\ -\ \rho_0\omega_0^2 \ln \frac{h_0 + u_0\ t}{z_0}\ )\hat{\rho} + (2\frac{\rho_0 u_0 \omega_0}{h_0 + u_0\ t})\hat{\theta}$$

0.5pts

■