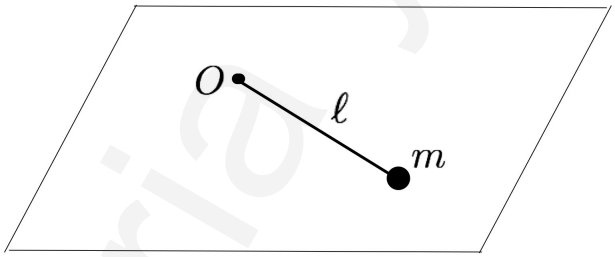
Dinámica y Movimiento Circular Uniforme

Rafael Benguria y M. Cristina Depassier

Existen muchas situaciones en que una partícula realiza un movimiento circular uniforme siempre que esté sometido a fuerzas apropiadas. A continuación resolveremos varios problemas estandar de este tipo. Vamos a ir aumentando gradualmente su grado de dificultad.

Problema 1. [Partícula realizando movimiento circular uniforme sobre una mesa horizontal fija, atada a un punto fijo por medio de una cuerda ideal]. Consideremos la partícula de masa m que se mueve sobre una mesa horizontal lisa, sujeta a un punto fijo O mediante una cuerda ideal de largo ℓ. Si la velocidad angular de la partícula es ω (constante), encuentre la tensión de la cuerda.



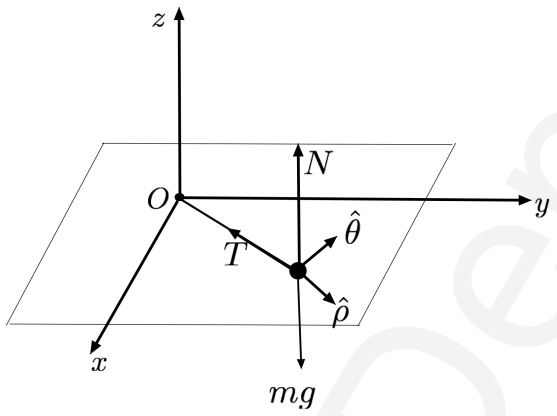
Solución: En la figura hemos dibujado las fuerzas que actúan sobre m. A lo largo de la vertical actúan el peso $m\,g$ (hacia abajo) y la normal N hacia arriba. En tanto, en el plano solo actúa la tensión de la cuerda T dirigida en forma radial hacia el punto O. En este problema ciertamente conviene elegir coordenadas polares, (ρ, θ) en el plano, centradas en O. Aquí, $\rho = \ell$ (constante), de modo que $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Por otra parte $\dot{\theta} = \omega$ (constante), de modo que $\ddot{\theta} = 0$. Entonces, la aceleración de la partícula (en polares) está dada por

$$\vec{a} = -\ell\,\omega^2 \hat{\rho}. \tag{1}$$

Benguria y Depassier

Por otra parte, la fuerza total que actúa sobre la partícula (en cilíndricas) es:

$$\vec{F} = -T\hat{\rho} + (N - mg)\hat{k}. \tag{2}$$



Escribiendo la ecuación de Newton, usando (1) y (2), tenemos,

$$-T\hat{\rho} + (N - mg)\hat{k} = -m\,\ell\,\omega^2\hat{\rho},$$

y, dado que $\hat{k}$ y $\hat{\rho}$ son linealmente independientes, finalmente obtenemos,

$$N = m\,g, \tag{3}$$

y,

$$T = m\,\ell\,\omega^2. \tag{4}$$

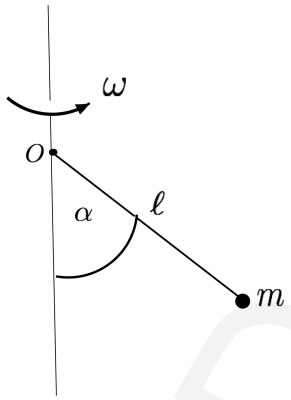
que era lo que se pedía.

Comentario: Una variante de este problema es suponer que una "cuenta" se desliza con rapidez constante por un aro de radio R. Se pide calcular la fuerza de reacción del aro sobre la "cuenta".

Ahora podemos complicar un poco el problema anterior, sacando la mesa y dejando que la partícula siga atada a un punto fijo, sostenida por la misma cuerda y sometida a la gravedad.

Benguria y Depassier

Problema 2. Una masa m que cuelga de una cuerda ideal de largo ℓ gira alrededor de la vertical con una velocidad angular constante ω como se indica en la figura. Calcule la tensión de la cuerda y el ángulo α.



Solución: Usando coordenadas cilíndricas, en que el plano $z = 0$ coincide con el plano donde está girando la partícula, la partícula se encuentra realizando una trayectoria circular en dicho plano con radio constante $\rho = \ell \operatorname{sen} \alpha$. Como ρ es constante y $\dot{\theta} = \omega$ es constante, tenemos nuevamente que la aceleración de la partícula en cilíndricas está dada por,

$$\vec{a} = -\ell\, \omega^2 \hat{\rho}. \tag{5}$$

tal como en el problema anterior. Esta vez las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la tensión de la cuerda. En nuestro sistema de coordenadas tenemos que

$$\vec{T} + m\, \vec{g} = T\, \cos\alpha\, \hat{k} - T\, \operatorname{sen}\alpha\, \hat{\rho} - m\, g\, \hat{k}. \tag{6}$$

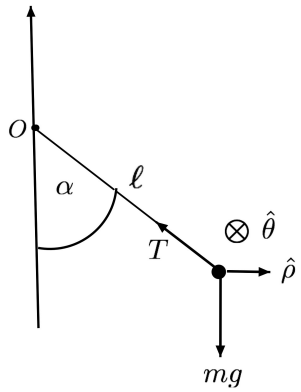
Escribiendo la ecuación de Newton para la partícula de masa m, usando (5) y (6) finalmente obtenemos,

$$T \cos\alpha = m\, g, \tag{7}$$

y

$$-T \operatorname{sen}\alpha = -m\rho\, \omega^2 = -m\ell \operatorname{sen}\alpha\, \omega^2. \tag{8}$$

Benguria y Depassier



Despejando T de (7) y reemplazando en (8) obtenemos

$$\operatorname{sen}\alpha\left(\ell - \frac{g}{\omega^2}\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 0, \tag{9}$$

La ecuación (9) tiene dos posibles soluciones para α. Una de ellas es $\alpha = 0$, y la segunda está dada a través de

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2\,\ell}, \tag{10}$$

que solo tiene solución si la partícula gira suficientemente rápido. De hecho se necesita que $\omega \geq \sqrt{g/\ell}$. Si ω es menor que este valor, la única solución es $\alpha = 0$. En caso que $\alpha = 0$ ciertamnete $T = m\,g$. En cambio, si $\cos\alpha = g/(\omega^2\,\ell)$, entonces,

$$T = m\,\ell\,\omega^2. \tag{11}$$

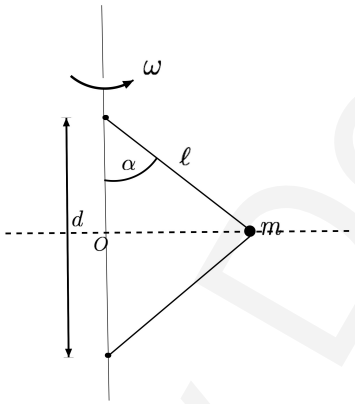
que era lo que se pedía.

Comentario: Este problema se conoce usualmente como el *péndulo cónico* y está discutido en muchas referencias. Ver por ejemplo [5], p. 77 ("the conical pendulum"). No es dificil demostrar que la solución $\alpha = 0$ es estable solo si $\omega \leq \sqrt{g/\ell}$ [ver, e.g., [4] Problema 111, Capítulo 7].

Problema 3. Consideremos ahora el sistema de la figura, que consiste en uma masa m sujeta a dos puntos fijos mediante dos cuerdas ideales del mismo largo ℓ. Los puntos fijos

Benguria y Depassier

están en la misma línea vertical y esyán separados por una distancia $d < 2\ell$. El bloque de masa m se hace girar con suficiente velocidad angular ω (cosntante) de modo que ambas cuerdas están tensas. El bloque describe entonces una trayectoria circular de radio R en el plano simetral a los dos puntos fijos. Encuentre el mínimo valor de ω para que esto ocurra, y si ω excede este valor encuentre la tensión en cada una de las cuerdas.



Solución: De la figura se concluye que $R = \ell \operatorname{sen}\alpha$, en que $\tan\alpha = 2\,\ell/d$. Sobre el bloque actúan tres fuerzas: i) El peso mg, ii) La tensión T_1 en la cuerda superior y iii) La tensión T_2 en la cuerda inferior. Para describir el movimiento del bloque usamos coordenadas cilíndricas, en que el plano $z = 0$ coincide con el plano simetral de los dos puntos (i.e., el plano donde se realiza el movimientode bloque). En el plano usamos polares (centradas en el eje vertical que une los dos puntos fijos) para describir el movimiento del bloque. Entonces tenemos, $\rho = R = \ell \operatorname{sen}\alpha$ y θ tal que $\dot{\theta} = \omega$, una constante. Entonces, tal como en los problemas anteriores, la aceleración del bloque está dada por

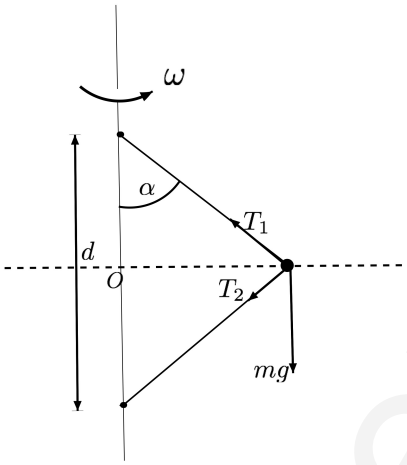
$$\vec{a} = -R\,\omega^2\hat{\rho}. \tag{12}$$

Por otra parte la suma de fuerza que actúa sobre el bloque, en cilíndricas, está dada por,

$$(T_1\cos\alpha - T_2\cos\alpha - mg)\hat{k} + (-T_1\operatorname{sen}\alpha - T_2\operatorname{sen}\alpha)\,\hat{\rho}. \tag{13}$$

Usando (12) y (13), podemos escribir la ecuación de movimiento del bloque como,

Benguria y Depassier



$$(T_1\cos\alpha - T_2\cos\alpha - mg)\hat{k} + (-T_1\,\mathrm{sen}\,\alpha - T_2\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\hat{\rho} = -m\ - R\,\omega^2\hat{\rho}. \tag{14}$$

Como $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$ son linealmente independientes, de aquí concluimos que,

$$T_1 - T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}, \tag{15}$$

y,

$$T_1 + T_2 = \frac{m\,\omega^2 R}{\mathrm{sen}\,\alpha}. \tag{16}$$

Resolviendo (15) y (16) para T_1, y T_2 encontramos finalmente que

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{mg}{\cos\alpha} + \frac{m\,\omega^2 R}{\mathrm{sen}\,\alpha}\right], \tag{17}$$

y

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m\,\omega^2 R}{\mathrm{sen}\,\alpha} - \frac{mg}{\cos\alpha}\right]. \tag{18}$$

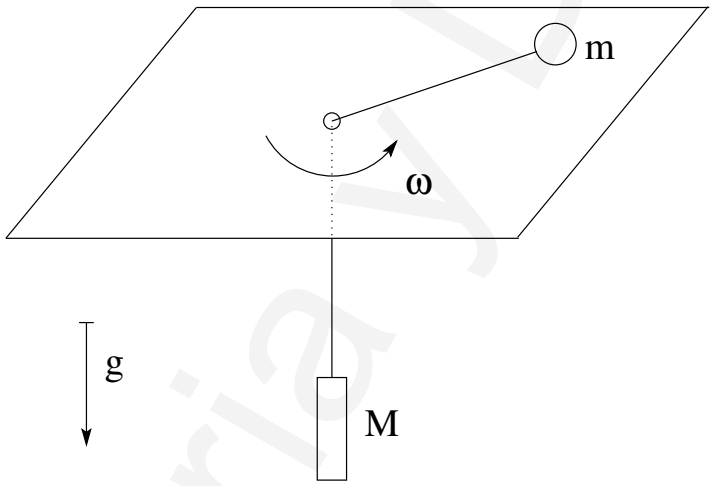
De (18) tenemos que la mínima velocidad angular para que ambas cuerdas estén tensas (i.e., para que $T_1 > 0$ y $T_2 > 0$) es

$$\omega_{\min} = \sqrt{g\,\tan\alpha/R} = \sqrt{\frac{2\,g}{d}}. \tag{19}$$

Beng Jurie y Depassier

Aumentando gradualmente la dificultad consideremos ahora un sistema de dos cuerpos, ligados por una cuerda ideal, uno de los cuales realiza una trayectoria circular en un plano horizontal y el otro cuelga en una posición fija.

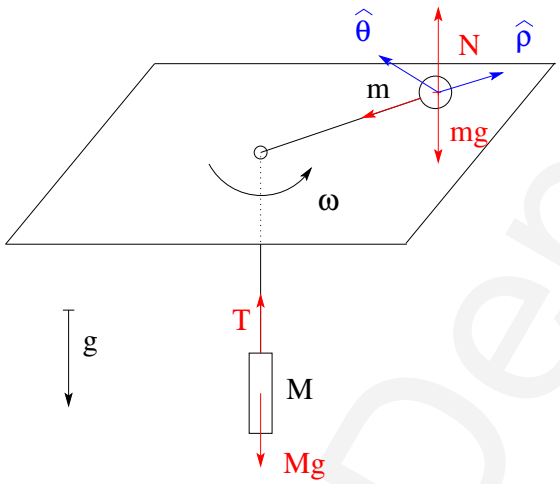
Problema 4. Considere ahora dos cuerpos de masa m y M respectivamente unidos por una cuerda ideal de largo ℓ. La masa m se desplaza por una mesa horizontal lisa. La cuerda pasa por un pequeño agujero hasta llegar al cuerpo de masa M que cuelga en forma vértical. Encuentre la velocidad angular ω con que se mueve el cuerpo de masa m en torno al agujero para que el cuerpo de masa M esté en equilibrio a una distancia z_0 del agujero. ¿En ese caso cuál es la tensión de la cuerda?



Solución: Ahora tenemos dos cuerpos. Las fuerzas que actúan sobre el bloque que cuelga son su peso $M\,g$ y la tensión de la cuerda, T. Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre el bloque de masa m son su peso, $m\,g$, la reacción de la mesa sobre él, N, y la tensión de ls cuerda T (ver figura). Para describir el movimiento del bloque de masa M usamos la coordenada vertical z (hacia abajo), en tanto que para describir el movimiento del bloque de masa m usamos las coordenadas polares ρ y θ. Como el bloque de masa M está en equilibrio, $z = z_0$, una constante. Como la cuerda es ideal, $\rho + z = \ell$, de modo

Benguria y Depassier

que $\rho = \ell - z_0$ una constante. Entonces tenemos que $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Por otra parte, $\omega = \dot{\theta}$ es constante, de modo que $\ddot{\theta} = 0$.



Las ecuación de movimiento del bloque de masa M entonces está dada por

$$M\,g - T = 0, \tag{20}$$

en tanto que las ecuaciones del bloque de masa m están dadas por

$$N - m\,g = 0, \tag{21}$$

en la dirección vertical, y

$$-T = -m\,\rho_0\,\omega^2. \tag{22}$$

en que $\rho_0 = \ell - z_0$. Como $T = M\,g$, de (22) obtenemos,

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{m}\frac{g}{(\ell - z_0)}}. \tag{23}$$

Obviamente de (20) tenemos que la tensión de la cuerda es,

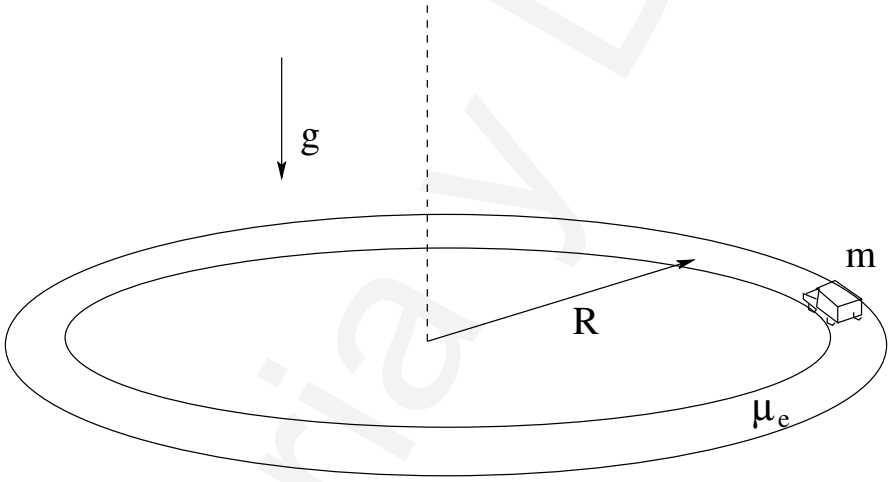
$$T = M\,g.$$

Benguria y Depassier

Comentario: Este problema está discutido en muchas referencias. Ver por ejemplo [5], p. 76 ("the whirling block").

Ahora podemos introducir roce en este tipo de problemas con movimiento circular. Lo haremos en los dos problemas siguientes.

Problema 5. [Movimiento de un auto en un camino con roce]. Consideremos un auto de masa m que se mueve en un camino (trayectoria) circular de radio R. ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener el vehículo si no resbala radialmente con respecto al suelo que es una superficie rugosa de coeficiente de roce estático μ_e?



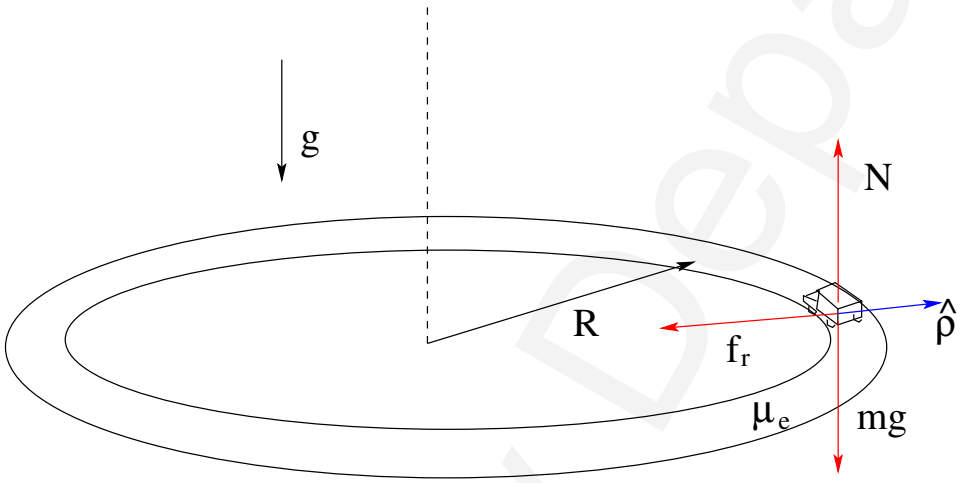
Solución: En este caso, las fuerzas que actúan sobre el auto son su peso $m\vec{g}$ la reacción del suelo sobre el, digamos N, y la fuerza de roce estático, que impide que el auto resbale radialmente. Llamamos f_r a la magnitud de dicha fuerza. Para describir la posición del vehículo usamos coordenadas polares (ρ, θ), centradas en el centro de la trayectoria circular. Como el auto describe una trayectoria circular de radio R, $\rho = R$, $\dot{\rho} = 0$ y $\ddot{\rho} = 0$. La velocidad del auto en polares está dada por,

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = R\,\omega\,\hat{\theta},$$

Benguria y Depassier

en que ω es constante. De hecho, de la ecuación anterior vemos que $\omega = v/R$, en que v es la rapidez del auto. Las ecuación de Newton para el auto está dada por,

$$(N - mg)\hat{k} - f_r\hat{\rho} = m(-R\,\omega^2)\hat{\rho}, \tag{24}$$



en que hemos usado el hecho que cuando ρ y $\dot{\theta}$ son constantes la aceleración en polares está dada por $-\rho\,\dot{\theta}^2\,\hat{\rho}$. De (24) obtenemos de inmediato que

$$N = m\,g \tag{25}$$

y

$$f_r = m\,R\,\omega^2. \tag{26}$$

La fuerza de roce estático, f_r no puede superar la fuerza umbral, es decir,

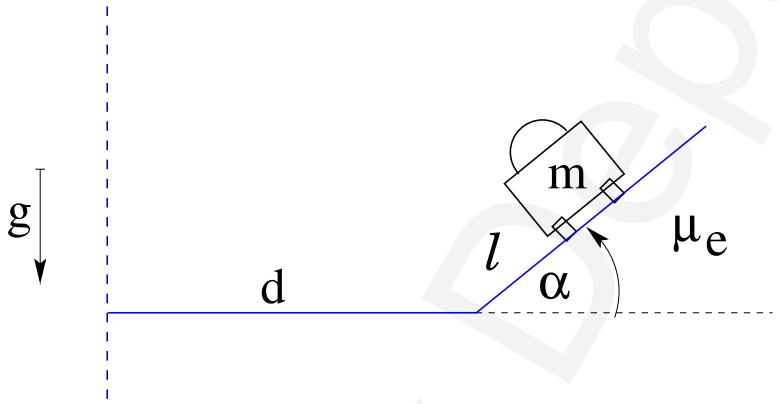
$$f_r = m\,R\,\omega^2 \leq \mu_e\,N = \mu_e\,m\,g. \tag{27}$$

De aquí tenemos que $\omega^2\,R \leq \mu_e\,g$, y como $v = \omega\,R$, finalmente tenemos que para que el auto no resbale

$$v \leq v_{\max} = \sqrt{\mu_e\,g\,R}. \tag{28}$$

Benguria y Depassier

Problema 6. [Movimiento de un auto en un camino con peralte y roce]. Ahora consideremos el movimiento de un auto de masa m que se desplaza en un camino circular con un peralte de ángulo α y con roce estático de coeficiente μ_e, como se indica en la figura. Determine los valores mínimos y máximos de la rapidez del auto para que se mantenga en su trayectoria circular.



Solución: Consideremos primero la situación sin roce. En ese caso las únicas fuerzas que actúan sobre el auto son su peso mg y la reacción del peralte sobre el auto, N. El auto describe una trayectoria circular, cuyo radio en términos de la geometría del problema está dado por,

$$R = d + \ell \cos\alpha, \tag{29}$$

en que α es el ángulo de inclinación del peralte. Como el auto describe una trayectoria circular de radio R a velocidad angular constante, imponiendo las ecuación de Newton para el auto, procediendo como en en los problemas anteriores, obtenemos,

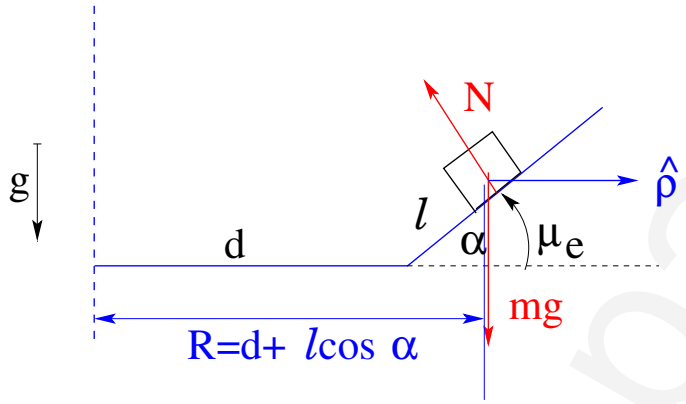
$$N\cos\alpha = mg,$$

y,

$$-N\,\mathrm{sen}\,\alpha = -m\omega^2\,R = -m\omega^2\,(d + \ell\cos\alpha).$$

Eliminando N entre estas dos ecuaciones vemos que el único valor de ω, llamémoslo ω_0,

Benguria y Depassier

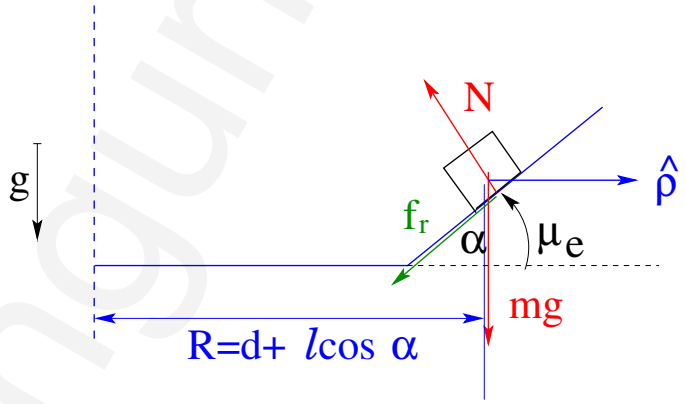


para el cual éste movimiento es posible es tal que

$$\omega_0^2 = \frac{g \tan\alpha}{d + \ell \cos\alpha}. \tag{30}$$

Entonces, si $\omega > \omega_0$, el auto va a tratar de salirse hacia afuera, en tanto que si $\omega < \omega_0$ el auto va a "caerse" hacia dentro. Si agregamos roce es posible mantener al auto en su trayectoria circular para otros valores de ω. Analicemos los dos casos posibles.

Caso 1 ($\omega > \omega_0$): En este caso, para que el auto no escape hacia afuera el roce va a actuar hacia dentro (como se indica en la figura). Si llamamos f_r a la magnitud de la fuerza de roce, las ecuaciones de Newton para el auto estarán dadas por,



$$-f_r \cos\alpha - N \operatorname{sen}\alpha = -mR\omega^2, \tag{31}$$

Benguria y Depassier

y

$$N\cos\alpha - f_r \operatorname{sen}\alpha - mg = 0. \tag{32}$$

Resolviendo (31) y (32) para las incógnitas N y f_r encontramos,

$$N = m(\omega^2 R \operatorname{sen}\alpha + g\cos\alpha) \tag{33}$$

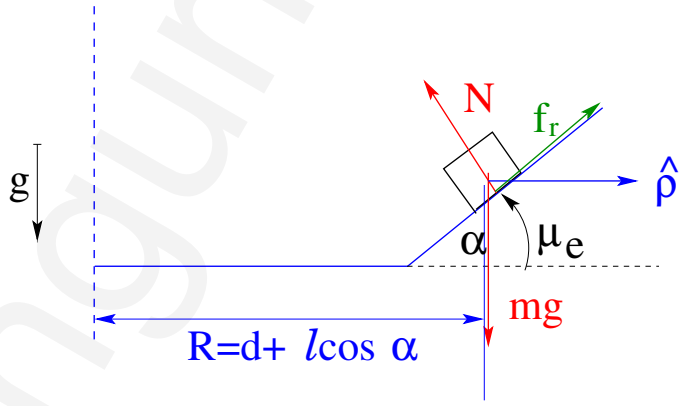
y

$$f_r = m(\omega^2 R\cos\alpha - g\operatorname{sen}\alpha). \tag{34}$$

respectivamente. Para encontrar la máxima velocidad angular que puede tener el automóvil sin salirse de la pista tenemos que imponer que f_r no sobrepase la fuerza umbral, i.e., que $f_r \leq \mu_e N$. Reemplazando als expresiones de N y f_r que encontramos en (33) y (34) en esta condición, obtenemos que

$$\omega^2 \leq \frac{g}{R}\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha + \mu_e\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu_e\operatorname{sen}\alpha}\right]. \tag{35}$$

Caso 2 ($\omega < \omega_0$): En este caso, para que el auto no escape hacia dentro el roce va a actuar hacia fuera (como se indica en la figura). Si llamamos f_r a la magnitud de la fuerza de roce, las ecuaciones de Newton para el auto estarán dadas por,



$$+f_r\cos\alpha - N\operatorname{sen}\alpha = -mR\omega^2, \tag{36}$$

Benguria y Depassier

y

$$N\cos\alpha + f_r \operatorname{sen}\alpha - mg = 0. \tag{37}$$

Resolviendo (36) y (37) para las incógnitas N y f_r encontramos,

$$N = m(\omega^2 R \operatorname{sen}\alpha + g\cos\alpha) \tag{38}$$

y

$$f_r = m(-\omega^2 R\cos\alpha + g\operatorname{sen}\alpha). \tag{39}$$

respectivamente. Para encontrar la mínima velocidad angular que puede tener el automóvil sin salirse de la pista tenemos que imponer (igual que arriba) que f_r no sobrepase la fuerza umbral, i.e., que $f_r \leq \mu_e N$. Reemplazando als expresiones de N y f_r que encontramos en (38) y (39) en esta condición, obtenemos que

$$\omega^2 \geq \frac{g}{R}\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha - \mu_e\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_e\operatorname{sen}\alpha}\right]. \tag{40}$$

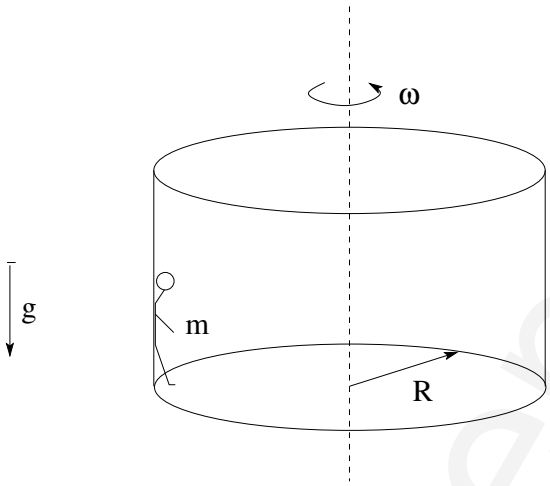
Comentario: Este problema está discutido en muchas referencias. Ver por ejemplo [5], Problema 2.28, p. 107.

Problema 7. Un juego típico en los parques de entretenciones es un cilindro de radio R con paredes rugosas (de coeficiente de roce estático μ_e) y en principio con un suelo. Las personas se ubican contra la pared del cilindro y éste se hace girar con velocidad angular ω suficientemente grande. Luego de retira el suelo y las personas no se caen porque la fuerza de roce entre ellas y la pared del cilindro puede compensar la gravedad. ¿Cuál es el valor mínimo de la velocidad angular ω para que las personas no caigan cuando se retira el suelo?

Solución: Las personas, solidarias con la pared del cilindro, describen un movimiento circular uniforme de radio R y velocidad angular ω. Usando coordenadas polares, la aceleración de la persona que está en el juego está dada por

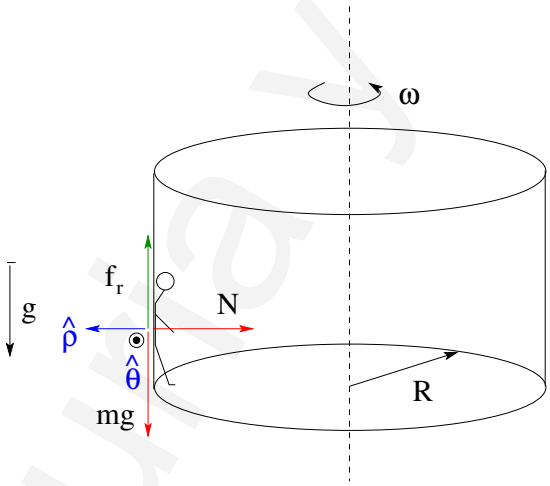
$$\vec{a} = -R\,\omega^2\,\hat{\rho}. \tag{41}$$

Benguria y Depassier



en tanto que la fuera total que actúa sobre la persona es,

$$\vec{F} = -m\,g\hat{k} - N\hat{\rho} + f_r\hat{k} \tag{42}$$



Aquí, $-N\hat{\rho}$ es la fuerza de reacción que hace la pared sobre la persona. Usando la segunda ley de Newton para la persona (de masa m) y las ecuaciones (41) y (42) encontramos los valores de N y f_r los que están dados por,

$$N = mR\omega^2, \tag{43}$$

y

$$f_r = m\,g, \tag{44}$$

Benguria y Depassier

respectivamente. Para que la persona no resbale con respecto a la pared del cilindro es necesario que f_r no supere la fuerza umbral, i.e., que

$$f_r \leq \mu_e N.$$

Reemplazando en esta última expresión los valorse de N y f_r encontrados en (43) y (44) obtenemos que

$$m\, g \leq \mu_e\, mR\, \omega^2,$$

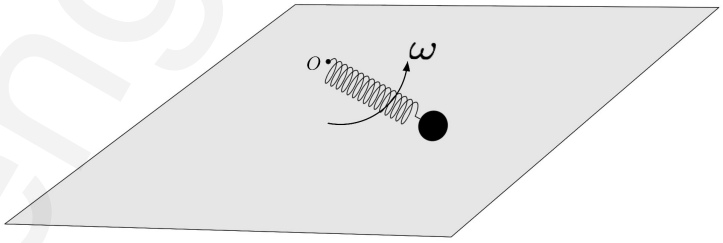
de modo que para que las personas no resbalen se debe tener que

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_e\, R}} \tag{45}$$

Comentario: Este problema está discutido en muchas referencias. Ver por ejemplo [2.15], p. 94 ("the spinning terror").

Concluimos esta lista de problemas con una variante del Problema 1, en la que, en vez de ligar la partícula a un punto fijo lo hacemos por un resorte ideal.

Problema 8. [Partícula realizando movimiento circular uniforme sobre una mesa horizaontal fija, ligada a un punto fijo por medio de un resorte ideal]. Consideremos la partícula de masa m que se mueve sobre una mesa horizontal lisa, sujeta a un punto fijo O mediante una resorte ideal de largo natural ℓ_0 y constante elástica k. Encuentre el estiramiento del resorte como función de la velocidad angular ω.



Benguria y Depassier

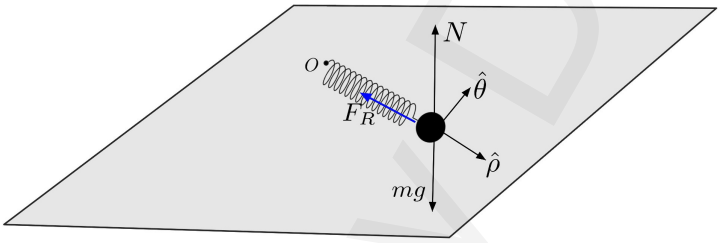
Solución: Usando la misma notación que en la solución del problema 1, la fuerzas que están actuando sobre la partícula son: i) la fuerza del resorte, la cual está dirigida en la dirección radial y en la base polar está dada por,

$$\vec{F}_{\text{res}} = -k(\rho - \ell_0)\,\hat{\rho}. \tag{46}$$

ii) el peso y la iii) normal como en el Problema 1. La fuerza total entonces es.

$$\vec{F} = -k(\rho - \ell_0)\,\hat{\rho} + (N - m\,g)\hat{k} \tag{47}$$

Por otra parte, tal como en la solución del Problema 1, la aceleración de la partícula está



dada por

$$\vec{a} = -\rho\,\omega^2\hat{\rho}. \tag{48}$$

De (47) y (48) usando la Ley de Newton, encontramos que $N = m\,g$, y

$$-k(\rho - \ell_0) = -m\rho\,\omega^2. \tag{49}$$

La ecuación (49) solo tiene solución positiva finita si $\omega^2 < k/m$. En este caso, el largo del resorte como función de la velocidad angular del resorte está dada por,

$$\rho(\omega) = \frac{1}{(1 - m\omega^2/k)}\,\ell_0. \tag{50}$$

Comentario: El hecho que $\rho(\omega)$ tiende a infinito cuando ω tiende a $\sqrt{k/m}$ es un fenómeno de resonancia. Hay dos frecuencias típicas en este problema: i) la frecuencia

Benguria y Depassier

angular de rotación y ii) la frecuencia asociada al movimiento periódico del sistema masa–resorte, $\sqrt{k/m}$. En principio no existe solución si $w \geq \sqrt{k/m}$. En la práctica si se hace girar el sistema con velocidad angular mayor el resorte entra en regimen no elástico (no lineal) y la solución es más compleja.

Referencias, y Notas Bibliográficas:

1. El tipo de problemas discutido en esta sección empezó a ser estudiado sistemáticamente en física por Christiaan Huygens en su artículo *De vi centrifuga* en 1659. La mayor parte del contenido de este artículo apareció por primera vez publicado en el libro de Huygens *Horologium Oscillatorium* (1673). Finalmente, el *De vi centrifuga* fue publicado en su "Opuscula Posthuma" en 1703. El *De vi centrifuga* se puede encontrar en las **Oeuvres Complètes**, vol. XVI, 255–301, editado por T. y M. S. Mahoney, Sociétè Hollandaise des Sciences, Martinus Nijhoff, La Haya, 1929. Una traducción al inglés, *On Centrifugal Force* se puede encontrar en el sitio WEB:

https://www.princeton.edu/∼hos/mike/texts/huygens/centriforce/huyforce.htm

2. Parte de la historia de la *Fuerza Centrífuga* en los origenes de la mecánica se puede encontrar en el artículo: Domenico Bertoloni Meli, *Inherent and Centrifugal Forces in Newton*, Arch. Hist. Exact Sci. **60** (2006) 319–335.

3. El lector interesado puede consultar R. Dugas, *Histoire de la Mècanique*, Jacques Gabay, Paris, 1998.

4. Otros problemas resueltos de este tipo en el libro de R. Benguria y M. C. Depassier, *Problemas Resueltos de Mecánica Clásica*, segunda edición, Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago Chile, 1999. En particular ver los problemas 8 y 10 del Capítulo 2, y los problemas 10 y 11 del Capítulo 7.

Benguria y Depassier

5. Daniel Kleppner, and Robert J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*, Mc Graw Hill, Boston, 1973.

©Rafael Benguria y M. Cristina Depassier, Agosto 2016

Benguria y Depassier