PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
**FIS1514 — Dinámica**
Segundo Semestre 2025
Profesores: Rafael Benguria, Jaime Clark, Pablo León, Iván Muñoz,
Rodrigo Soto, Diego Teca y Alejandro Varas

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

# Interrogación 2

21 de octubre 17:30-19:30 hrs

---

**Reglas generales**:

1. Escriba su nombre y RUT de manera clara y legible en cada hoja.
2. El tiempo para responder es 120 minutos.
3. Durante el desarrollo de la interrogación no hay consultas.
4. Está prohibido el uso de calculadoras, celulares, tablets, etc.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

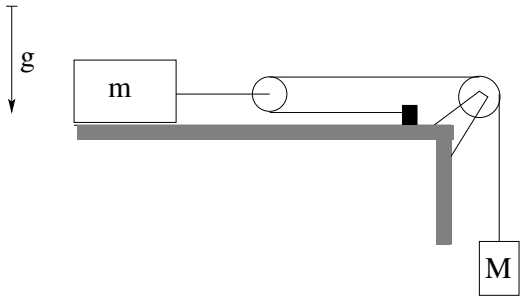
---

Nombre: _____

RUT: _____

# Problema 1 [6 puntos]

Dos bloques de masas $m$ y $M$ respectivamente están conectados mediante una cuerda ideal como se indica en la figura. La mesa es rugosa y los coeficientes de roce estático y dinámico entre $m$ y la mesa son $\mu_e$ y $\mu_d$ respectivamente.




(a) Determine el valor mínimo de $\mu_e$, en términos de $m$, $M$ y $g$ para que el sistema esté en equilibrio **(3 pts)**.

(b) Si $\mu_e$ es menor que el encontrado en el inciso (a), encuentre la aceleración del bloque $M$ y la tensión de la cuerda. **(3 pts)**.

Nombre: _____

RUT: _____

Desarrollo:

- (a) Sobre la masa $m$ actuan cuatro fuerzas: la normal ($\vec{N}$), el peso ($m\vec{g}$), una tensión ($\vec{T_1}$)y la fuerza de roce estática ($\vec{F_e}$). La segunda ley de Newton nos lleva a las siguientes ecuaciones en el equilibrio:

$$\begin{aligned} x: &\quad T_1 - F_e = 0 \\ y: &\quad N - mg = 0 \end{aligned}$$

donde se tiene que

$$\begin{aligned} F_e &= T_1 \\ N &= mg \end{aligned}$$

Por otra parte, sobre la masa $M$ solo actuan dos fuerzas, una tensión ($\vec{T_2}$) y su peso ($M\vec{g}$), lo cual lleva a la siguiente ecuación:

$$T_2 - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = Mg$$

(1 pts)

Luego, de la polea que esta conectada a $m$ podemos obenter la siguiente relación entre las tensiones

$$T_1 = 2T_2 = 2Mg$$

(0.5 pts)

La fuerza de roce estática satisface

$$F_e \leq \mu_e N$$

por lo que:

$$T_1 \leq \mu_e mg \quad \Rightarrow \quad 2Mg \leq \mu_e mg$$

$$\mu_e \geq 2M/m$$

El valor minimo se alcanza en la igualdad

$$\mu_e^{min} = 2M/m$$

(1.5 pts)

- (b) El sistema no se encuentra en equilibrio y por lo tanto para la masa $m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} x: \quad & T_1 - F_d = ma_m \\ y: \quad & N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \end{aligned}$$

Y para la masa $M$:

$$Mg - T_2 = Ma_M$$

junto con la definición de la fuerza de roce cinético

$$F_d = \mu_d N = \mu_d mg$$

Al igual que antes tenemos que

$$T_1 = 2T_2.$$

Juntando todo tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -\mu_d mg + 2T_2 &= ma_m \\ Mg - T_2 &= Ma_M \end{aligned}$$

(0.5 pts)

Denotemos como $L$ a longitud de la cuerda que conecta a la masa $M$ con la polea. De ahi tenemos que (ver figura)

$$L = \pi R_1 + \frac{\pi}{2} R_2 + x_1 + x_2 + (x_2 - A)$$

Derivando ambos lados dos veces podemos encontrar la siguiente relación entre la aceleracion de la polea 1 y la masa $M$

$$a_M = 2a_{p1}$$

La aceleración de la polea debe ser igual que la de la masa $m$, esto es, $a_{p_1} = a_m$. Por lo que el sitema de ecuaciones para $a_M$ y $T_2$ viene dada por

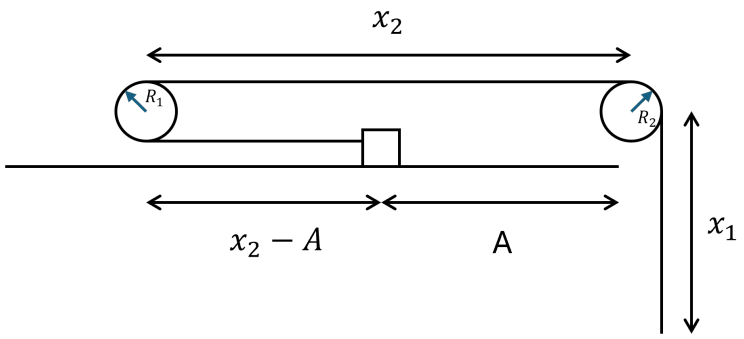
$$\begin{aligned} -\mu_d mg + 2T_2 &= m(a_M/2) \\ Mg - T_2 &= Ma_M \end{aligned}$$

(1.0 pts)

Ahora podemos resolver este sistema para encontrar:

$$a_M = \frac{2g\,(2M - \mu_d m)}{4M + m} \quad \text{(0.75 pts)}$$

$$T_2 = \frac{Mmg\,(1 + 2\mu_d)}{4M + m} \quad \text{(0.75 pts)}$$




Nombre: _____

RUT: _____N lista: _____

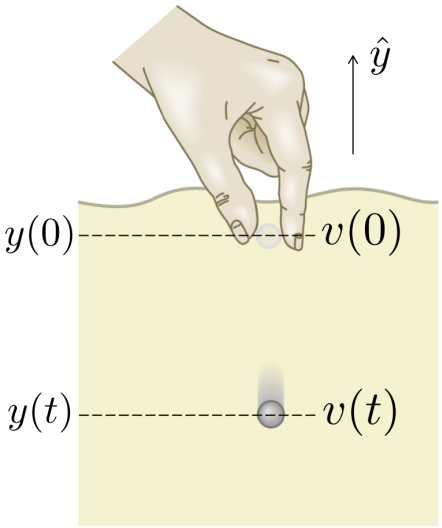
Desarrollo:

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

# Problema 2 [6 puntos]

Un pequeño objeto de masa $m$ se suelta desde el reposo en un fluido lubricante. La magnitud de la fuerza de fricción $\vec{F}_d$ que el lubricante ejerce sobre el objeto es directamente proporcional a su rapidez, es decir, $F_d = b\,v$, donde $b$ es una constante de proporcionalidad en kg/s. En esta situación, existe además una fuerza de empuje $\vec{F}_e$ sobre el objeto, pero que consideraremos despreciable ($F_e = 0$ en todo el ejercicio).




(a) Determine la rapidez términal (o límite) $v_\ell$ del objeto en el fluido. **(1.5 pts)**

(b) Determine la rapidez en función del tiempo $v(t)$, sabiendo que el objeto parte del reposo en $t = 0$, es decir, $v(0) = 0$. **(1.5 pts)**

(c) Suponiendo que $v(t) = A\,(1 - e^{-bt/m})$, donde $A$ es una constante en m/s, determine el tiempo necesario para que el objeto alcance la mitad de la rapidez límite $v_\ell$. **(1.5 pts)**

(d) Suponiendo que $v(t) = A\,(1 - e^{-bt/m})$, donde $A$ es una constante en m/s, determine la posición $y(t)$ del objeto en función del tiempo. **(1.5 pts)**

1. Al aplicar la segunda ley de Newton en el eje vertical se tiene:

$$bv - mg = ma. \quad \textbf{(0,6 pts)}$$

Cuando el objeto alcanza la rapidez terminal, $a = 0$ **(0.4 pts)** , por lo tanto:

$$bv_\ell - mg = 0 \iff \boxed{v_\ell = \frac{mg}{b}.} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

También podrían encontrar la rapidez en función del tiempo (parte b) y evaluar en $t \to \infty$. En ese caso, 1.0 pts por la expresión de $v(t)$ y 0.5 pts por evaluar en $t \to \infty$.

2. Reescribimos y la ecuación de movimiento considerando que $a = dv/dt$ **(0.2 pts)** y reordenamos los términos:

$$bv - mg = m\frac{dv}{dt} \iff \frac{dv}{\left(v - \frac{mg}{k}\right)} = -\frac{b}{m}\,dt \quad \textbf{(0,3 pts)}$$

Integrando:

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(v - \frac{mg}{b}\right)} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt \quad \textbf{(0,2 pts)}$$

Resolviendo las integrales:

$$\ln\left(\frac{v(t) - \frac{mb}{g}}{-\frac{mb}{g}}\right) = -\frac{bt}{m} \quad \textbf{(0,3 pts)}$$

Despejamos $v(t)$:

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

3. Se debe cumplir que $v(t_c) = v_\ell/2$ **(0.2 pts)**, es decir:

$$A\left(1 - e^{-bt_c/m}\right) = \frac{v_\ell}{2} \quad \textbf{(0,3 pts)} \iff \boxed{t_c = -\frac{m}{b}\ln\left(1 - \frac{v_\ell}{2A}\right).} \quad \textbf{(1,0 pts)}$$

4. Dado que $v(t) = dy/dt$ **(0.2 pts)**, se tiene que:

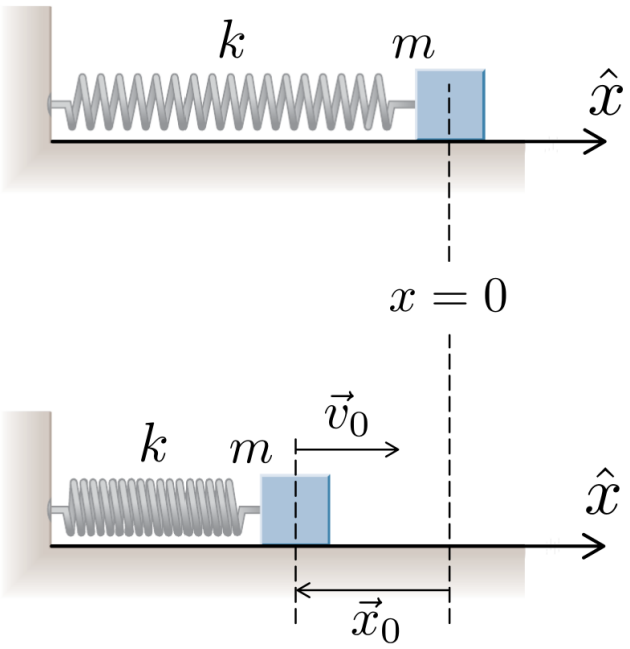
$$dy = A\left(1 - e^{-bt/m}\right)\,dt \quad \textbf{(0,2 pts)}$$

Integrando, se tiene que:

$$\int_0^y dy = A\int_0^t \left(1 - e^{-bt/m}\right)\,dt \quad \textbf{(0,1 pts)} \iff \boxed{y(t) = At - \frac{m}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right).} \quad \textbf{(1,0 pts)}$$

# Problema 3 [6 puntos]

Considere un resorte ideal con una constante elástica $k$. El resorte está unido a un objeto de masa $m$ que se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción. El sistema masa-resorte se comprime una distancia $x_0$ desde su posición de equilibrio y luego se suelta con una velocidad inicial $v_0$ dirigida hacia la posición de equilibrio.




(a) ¿Cuál es el periodo de oscilación del sistema? **(1.5 pts)**

(b) ¿Cuánto tiempo le tomará al objeto retornar por primera vez a la posición de equilibrio? **(1.5 pts)**

(c) Cuál es la magnitud de la velocidad cuando el objeto vuelve a la posición de equilibrio por primera vez **(1.5 pts)**.

(d) Haga un gráfico de la posición y la velocidad de la masa como función del tiempo **(1.5 pts)**.

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Desarrollo:

(a) Este es un caso de movimiento armonico simple por lo que la posición de la partícula viene dada por

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

El periodo $T$ se define como el tiempo en que da una oscilacion completa. Esto es

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t+T) + \phi)$$

dado que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$por lo que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(1.5 pts)

1. Podemos derivar $x(t)$ para obtener la velocidad

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = \omega(-\tilde{A}\sin(\omega t) + \tilde{B}\cos(\omega t))$$

Usando las condiciones iniciales tenemos que

$$\begin{aligned} x(0) = -x_0 &= A\cos(\phi) \\ v(0) = v_0 &= -A\omega\sin(\phi) \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan\left(\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) \\ A^2 &= x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k} \Rightarrow A = \pm\sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}} \end{aligned}$$

Elegimos el signo $-$ en este caso ya que la posición inicial es negativa. Otra manera, es que teniendo la fase, entonces:

$$x(0) = A\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)\right) = -x_0 \Rightarrow A = -\frac{x_0}{\cos\left(\arctan\left(\frac{v_0}{x_0\omega}\right)\right)}$$

De forma equivalente

$$\tilde{A} = -x_0, \quad \tilde{B} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(0.5 pts)

Si denotamos como $t_o$ al tiempo en que la masa vuelve a la posicion de equilibrio por primera vez, entonces tenemos que

$$x(t_o) = 0$$

por lo que se debe cumplir

$$\omega t_o + \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right) = \sqrt{\frac{m}{k}}\arctan\left(\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

**Este es el mismo resultado si usaran la version con seno y coseno**

(1.0 pts)

2. Ahora solo debemos sustituir el tiempo en la expresion para la velocidad

$$v(t_0) = -A\omega\sin(\omega t_0 + \phi) = -\omega A\sin(\pi/2) = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}x_0^2}$$

(1.5 pts)

Donde debemos recordad que $A$ es negativo.

De forma equivalente podemos usar conservación de la energía para esta parte

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \\ E_f &= \frac{1}{2}mv(t_0)^2 \end{aligned}$$

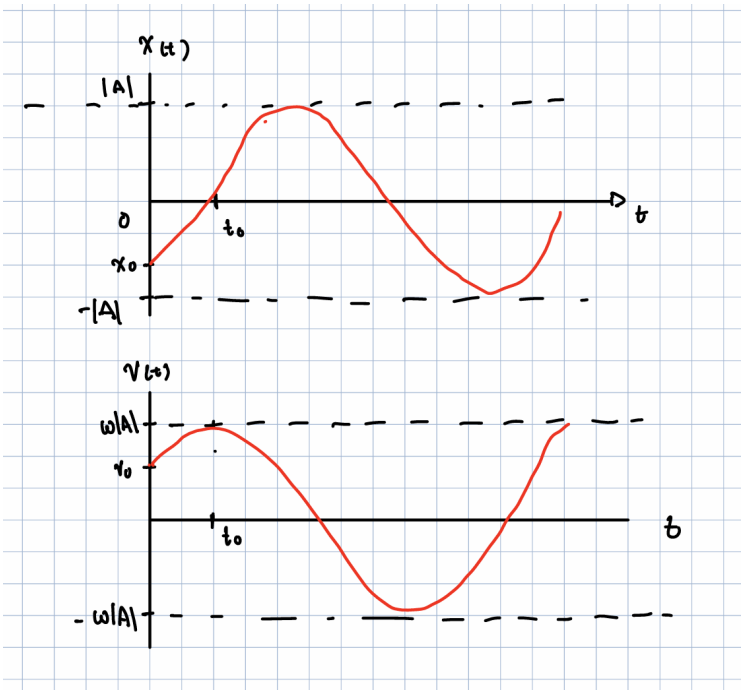
Usando $E_f - E_i = 0$ , tenemos que

$$mv(t_0)^2 = mv_0^2 + kx_0^2$$

$$v(t_0) = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}x_0^2}.$$

3. Para las graficas

(1.5 pts)




Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Desarrollo:

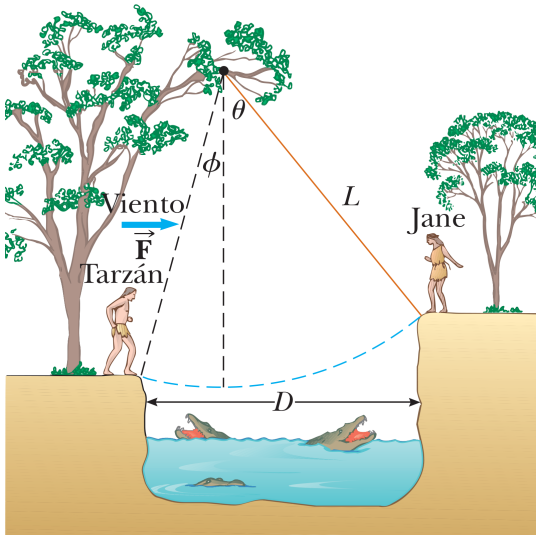
Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

# Problema 4 [6 puntos]

Jane, cuya masa es de 56.0 kg, necesita columpiarse a través de un río (de ancho $D$), lleno de cocodrilos, para salvar a Tarzán. Ella debe columpiarse contra un viento que ejerce fuerza horizontal constante $\vec{F}$, en una liana que tiene longitud $L$ e inicialmente forma un ángulo $\theta$ con la vertical. Considere $D = 63$ m, $F = 96$ N, $L = 45$ m y $\theta = 53{,}1^{\circ}$.

*Indicación:* Use $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.




(a) ¿Con qué rapidez mínima Jane debe comenzar su balanceo para apenas llegar al otro lado? Ayuda: va a necesitar determinar primero el valor del ángulo $\phi$ **(3 pts)**.

(b) Una vez que el rescate está completo, Tarzán y Jane deben columpiarse de vuelta a través del río. El viento cambia repentinamente y ahora la fuerza que ejerce el viento es de 116 N en el mismo sentido que antes ¿Con qué rapidez mínima deben comenzar su balanceo? Suponga que Tarzán tiene una masa de 70.0 kg. **(3 pts)**.

(a) De la figura tenemos que $D = L\sin\theta + L\sin\phi$. Usando ahora que $\sin(\theta = 53{,}1°) = 4/5$, tenemos que:

$$\begin{aligned} D &= L\sin\theta + L\sin\phi \\ 63 &= 45\cdot\frac{4}{5} + 45\cdot\sin\phi \\ \implies \sin\phi &= \frac{63-36}{45} = \frac{3}{5} \implies \boxed{\phi = 36{,}9°} \quad \textbf{(1pts)} \end{aligned}$$

Para calcular la rapidez de Jane, utilizamos el principio de trabajo y energía cinética entre el punto inicial (desde donde se balancea Jane) y el final, donde está tarzán:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ W_{\text{viento}} + W_{\text{gravedad}} &= K_f - K_i \quad \textbf{(0,3pts)} \\ W_{\text{viento}} - \Delta U_{\text{gravedad}} &= K_f - K_i \quad \textbf{(0,3pts)} \\ W_{\text{viento}} &= (K_f + U_f) - (K_i + U_i) \quad \textbf{(0,4pts)} \\ -F\cdot D &= (0 - m_{\text{Jane}}gL\cos\phi) - \left(\frac{1}{2}m_{\text{Jane}}v_i^2 - m_{\text{Jane}}gL\cos\theta\right) \quad \textbf{(0,5pts)} \\ -96\cdot 63 &= \left(0 - 56\cdot 10\cdot 45\cdot\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}56\cdot v_i^2 - 56\cdot 10\cdot 45\cdot\frac{3}{5}\right) \\ -\frac{96\cdot 63}{56} &= -360 - \frac{1}{2}\cdot v_i^2 + 270 \\ \implies \frac{1}{2}\cdot v_i^2 &= 108 - 90 \implies \boxed{v_i = 6\ \text{m/s}} \quad \textbf{(0,5pts)} \end{aligned}$$

(b) Ahora, para calcular la rapidez inicial de Jane y Tarzán cuando comienzan el balanceo de vuelta, utilizamos nuevamente el principio de trabajo y energía cinética entre el punto de rescate y el punto donde estaba inicialmente Jane, donde está tarzán:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ W_{\text{viento}} + W_{\text{gravedad}} &= K_f - K_i \quad \textbf{(0,3pts)} \\ W_{\text{viento}} - \Delta U_{\text{gravedad}} &= K_f - K_i \quad \textbf{(0,3pts)} \\ W_{\text{viento}} &= (K_f + U_f) - (K_i + U_i) \quad \textbf{(0,4pts)} \\ \textbf{(1pts)} \quad +F\cdot D &= (0 - (m_{\text{Jane}} + m_{\text{Tarzán}})gL\cos\theta) - \left(\frac{1}{2}(m_{\text{Jane}} + m_{\text{Tarzán}})v_i^2 - (m_{\text{Jane}} + m_{\text{Tarzán}})gL\cos\phi\right) \\ 116\cdot 63 &= \left(0 - 126\cdot 10\cdot 45\cdot\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}126\cdot v_i^2 - 126\cdot 10\cdot 45\cdot\frac{4}{5}\right) \\ +\frac{116\cdot 63}{126} &= -270 - \frac{1}{2}\cdot v_i^2 + 360 \\ \implies \frac{1}{2}\cdot v_i^2 &= 90 - 58 \implies \boxed{v_i = 8\ \text{m/s}} \quad \textbf{(1pts)} \end{aligned}$$