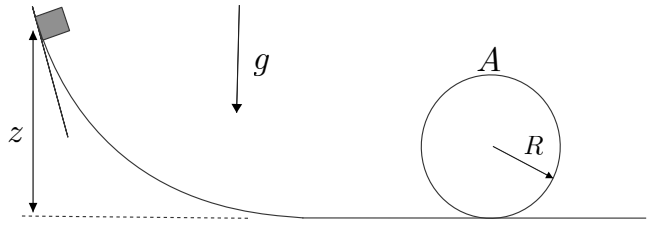
Energía y Trabajo

Rafael Benguria y M. Cristina Depassier

1. Se deja caer un bloque de masa m de una altura z sobre el riel de la figura. No hya roce entre el riel y la masa m. ¿De qué altura hay que dejarlo caer para que m empuje contra la parte superior (punto A) con una fuerza igual a su peso?

   Solución:



La energía inicial es potencial y vale

$$E_i = mgz \tag{1}$$

La energía de la masa una vez que llega al punto A es cinética y potencial y vale

$$E_A = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_A^2. \tag{2}$$

La fuerza normal que ejerce el riel sobre la masa no hace trabajo por lo que su energía se conserva, esto es

$$2mgR + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgz \tag{3}$$

En el punto A la ecuación de movimiento $F = ma$ es (usando el centro del círculo como origen de coordenadas),

$$-\frac{mv_A^2}{R}\hat{\rho} = -N\hat{\rho} - mg\hat{\rho}$$

de modo que

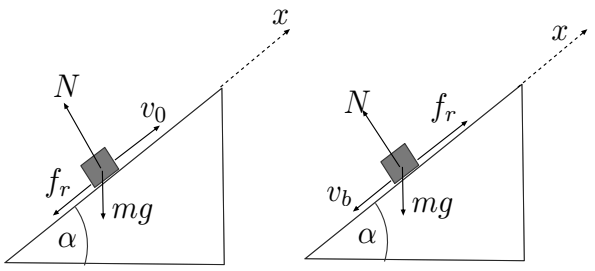
$$N = \frac{mv_A^2}{R} - mg.$$

Si pedimos $N = mg$ esto implica que $v_A^2 = 2gR$ lo que, al reemplazar en (3) resulta

$$z = 3R$$

2. Un auto sube una pendiente de ángulo α con rapidez v_0. El roce del auto con el suelo es de un 5 % del peso del auto. ¿Con qué velocidad bajará el auto si el motor entrega la misma potencia?

Solución:



Si la velocidad del auto es constante, la suma de las fuerzas sobre el auto es cero. Al subir el roce y el peso del auto ejercen una fuerza hacia abajo. El motor debe ejercer una fuerza igual en sentido opuesto. Si llamamos F_s esta fuerza,

$$\vec{F}_s = (f_r + mg\sin\alpha)\hat{x} = (\frac{5}{100}mg + mg\sin\alpha)\hat{x}$$

y la potencia que entrega el motor al subir es positiva ($\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$)

$$P_s = \vec{F}_s \cdot \vec{v}_0 = mg|v_0|(\frac{5}{100} + \sin\alpha).$$

Al bajar la fuerza de roce es en sentido opuesto por lo que la fuerza que ejerce el motor ahora vale $\vec{F}_b = -f_r\hat{x} + mg\sin\alpha\hat{x}$. La velocidad es $\vec{v}_b = -v_b\hat{x}$. La potencia al bajar

$$P_b = \vec{F}_b \cdot \vec{v}_b = mgv_b\left|\frac{5}{100} - mg\sin\alpha\right|.$$

Las potencias son iguales

$$P_s = P_b$$

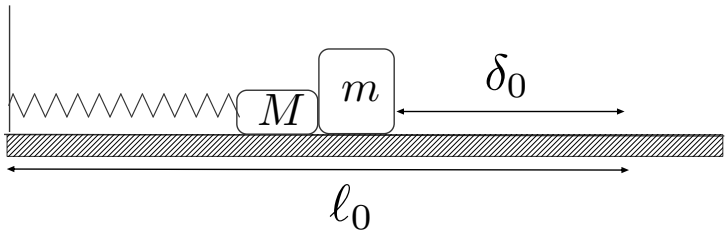
por lo que

$$v_b = \frac{\frac{5}{100} + \sin\alpha}{\left|\frac{5}{100} - \sin\alpha\right|}v_0$$

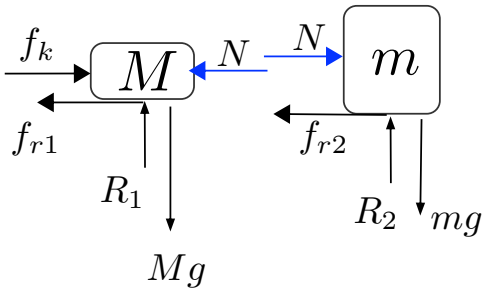
3. Un resorte de constante k y largo natural ℓ_0 esta unido a una masa M. Se empuja una masa m de modo tal que comprime el resorte una longitud δ_0. El coeficiente de roce entre las masas y la superficie sobre la cual reposan es μ. Se suelta m,

a) Demuestre explícitamente que la masa m se separa de M cuando el resorte tiene el largo natural ℓ_0.

b) ¿Cuánto avanza m antes de detenerse por primera vez?



Solución:



a) En la figura se muestran las fuerzas sobre cada una de las masas, R_1 y R_2 son las fuerzas que que ejerce la mesa sobre cada una de las masas. La fuerza de roce sobre cada masa es, en módulo,

$$f_{r1} = \mu R_1, \qquad f_{r2} = \mu R_2$$

y su dirección se muestra en la figura. El equilibrio de fuerzas verticales nos dice $R_1 = Mg$ y $R_2 = mg$.

Mientras las masa se encuentran unidas aceleran juntas por lo que las ecuaciones de movimiento son

$$M\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - N - f_{r1}, \qquad m\ddot{x} = N - f_{r2}.$$

Podemos resolver este sistema y encontrar $\ddot{x}$ y N. Nos interesa mostrar que la las masa se separan cuando $x = \ell_0$. Se encuentra

$$N = -\frac{m}{M+m}[k(x - \ell_0)] - \frac{m}{M+m} f_{r1} + \frac{M}{M+m} f_{r2}.$$

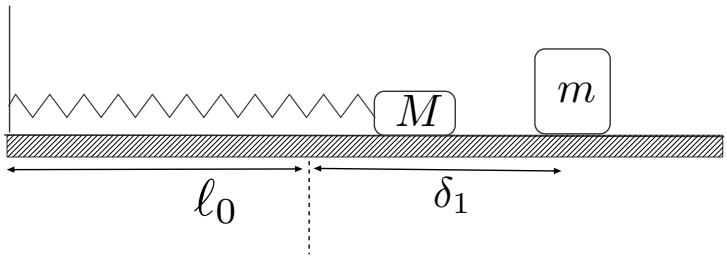
Reemplazando los valores de f_{r1} y f_{r2} vemos que

$$N = -\frac{m}{M+m}[k(x - \ell_0)],$$

que se anula cuando $x = \ell_0$. Este resultado es intuitivo, pero conviene verificarlo alguna vez.

b) Consideremos dos etapas, primero desde que el sistema esta comprimido hasta que las masas se separan: la relación trabajo energía es

$$\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\delta_0^2 = \int_{\ell_0-\delta_1}^{\ell_0} (\vec{f}_{r1} + \vec{f}_{r2}) \cdot d\vec{x} = -\mu(M+m)g\delta_0$$



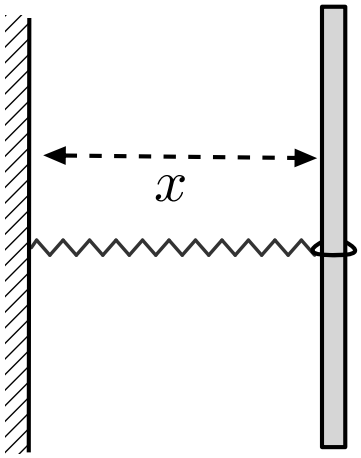
Esto nos dice la velocidad inicial $\dot{x}$ de m en el momento de separarse. Una vez separada de M la detiene el roce. La relación trabaj energía en esta segunda etapa es,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -\mu mg\delta_1$$

Combinando esta dos relaciones se obtiene, que $v_f = 0$ cuando

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\frac{k\delta_0^2}{(m+M)\mu g} - \delta_0.$$

4. Un resorte de constante elástica k y largo natural $\ell_0 = 0$ tiene un extremo atado a una pared y el otro a un anillo de masa m. El anillo está encajado en un poste ubicado a una distancia x de la pared. El anillo solamente se puede deslizar hacia arriba y abajo. Hay roce entre el anillo y el poste, los coeficientes de roce estático y cinético son iguales y valen μ. El anillo se coloca de modo que el resorte esté horizontal y se suelta.



   a) ¿Cuánto vale la fuerza normal que el poste ejerce sobre el anillo?

   b) ¿Cuánto baja el anillo antes de detenerse y volver a subir?

   c) ¿Cuáles son los valores máximos que puede tener μ para que efectivamente i) baje al ser soltado, ii) se devuelva cuando llegue abajo?

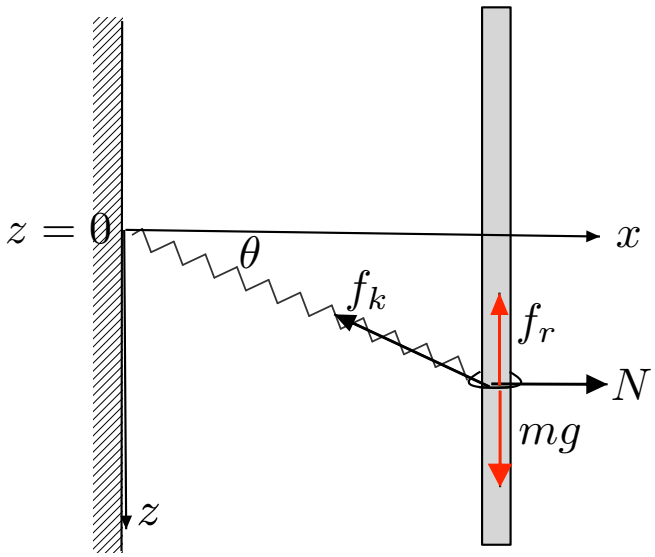
Solución:

a) El anillo no se puede mover en la dirección x por lo que la suma de fuerzas en esa dirección es cero. De la figura vemos que la normal debe ser igual a la componente horizontal de la fuerza f_k que ejerce el resorte, esto es

$$N = f_k \cos\theta.$$

El estiramiento del resorte es $s = \sqrt{z^2 + x^2}$, el módulo de la fuerza que ejerce el resorte es $f_k = ks$ y $\cos\theta = x/s$. Por lo tanto

$$N = kx$$



b) Para determinar hasta donde baja podemos usar la relación trabajo energía. Inicialmente la energía es debida al estiramiento del resorte. Cuando ha bajado una distancia z_f y se ha detenido tiene energía potencial del resorte $ks^2/2$ y energía potencial gravitacional $-mgz_f$ (el eje z es hacia abajo). La diferencia entre estas

dos energías es el trabajo hecho por la fuerza de roce.

$$E_f - E_i = \int_{z=0}^{z=z_f} \vec{f_r} \cdot dz\hat{z}.$$

La fuerza de roce $\vec{f_r} = -\mu N\hat{z} = -\mu kx\hat{z}$, por lo que tenemos

$$\frac{1}{2}k(x^2 + z_f^2) - mgz_f - \frac{1}{2}kx^2 = \int_{z=0}^{z=z_f} (-\mu kx)dz = -\mu kxz_f$$

La relación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{2}kz_f^2 = (mg - \mu kx)z_f$$

Si $mg > \mu kx$ tiene dos soluciones $z_f = 0$ y la distancia pedida

$$z_f = \frac{2}{k}(mg - \mu kx)$$

c)

i) De la solución anterior, vemos que no puede bajar (no existe una segunda solución positiva para z_f) si $\mu < mg/(kx)$.

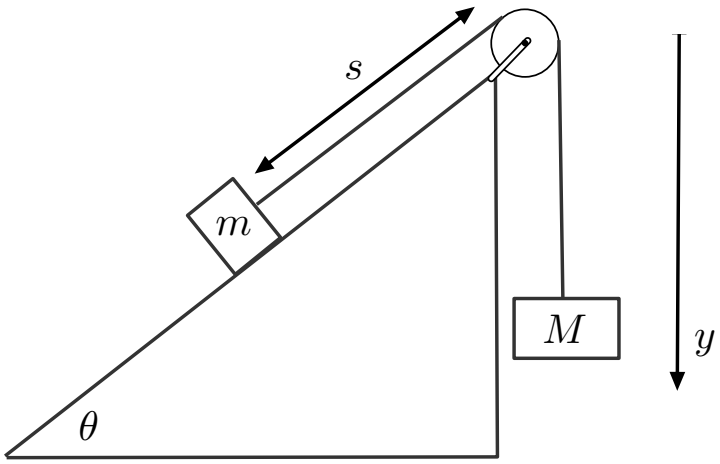
ii) Al subir la fuerza de roce apunta en la misma dirección que el peso, por lo tanto puede subir si la fuerza que ejerce el resorte hacia arriba es mayor que la suma del peso más el roce. Esta condición es

$$ks\sin\theta > mg + f_r$$

que es $kz_f > mg + \mu kx$. Reemplazando el valor de z_f se encuentra

$$\mu < \frac{mg}{3kx}.$$

5. Los dos bloques están conectados como en la figura. No hay roce entre m y el plan inclinado. Encuentre la aceleración de M usando la conservación de energía.



Solución

La normal y la tensión de la cuerda no hacen trabajo sobre el sistema por lo que se conserva la energía total. La energía del sistema es

$$E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgs\sin\theta + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - Mgy$$

El largo de la cuerda es constante por lo que

$$L = y + s$$

Usamos esta restricción para eliminar s de la expresión para la energía y queda

$$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{y}^2 + mg(y - L\sin\theta) - Mgy.$$

Como es constante, $dE/dt = 0$ de donde se obtiene

$$\ddot{y} = \frac{Mg - mg\sin\theta}{M+m}$$

resultado que ya se obtuvo antes con las ecuaciones de movimiento.

6. Una persona de masa m realiza un salto bungee con una cuerda elástica de largo L. Al tirarse la caida es libre hasta que la cuerda está estirada. Suponga que la cuerda se comporta como un resorte ideal. Se observa que la persona cae una distancia máxima $2L$ bajo el punto del salto.

   a) ¿Cuánto vale la constante del resorte?

   b) ¿Cuál es la aceleración de la persona en el punto mas bajo?

c) ¿A qué distancia bajo el punto de salto la velocidad de la persona es máxima? ¿Cuánto vale esta velocidad?

Solución:

a) Elijamos como eje de coordenadas el eje z dirigido hacia abajo, con el origen en el punto del salto. La energía inicial es solamente potencial , pero $z0 = 0$ y consideramos $V = 0$ en ese lugar. y la energía final cuandp se detiene y llega a $z = 0$ es elástica y potencial. Entonces, en el punto más bajo el resorte esta estirado en L y

$$0 = -mg(2L)\frac{1}{2}kL^2$$

(a energía potencial es negativa porque elegimos el eje z hacia abajo) y la constante del resorte es, entonces,

$$k = \frac{4mg}{L}.$$

b) La ecuación de movimiento para m es

$$m\ddot{z}\hat{z} = mg\hat{z} - k(z - L)\hat{z}$$

En el punto de estitramiento máximo $z = 2L$ y la aceleración es entonces

$$\ddot{z} = -3mg$$

El signo negativo nos dice que la aceleración en ese momento es hacia arriba.

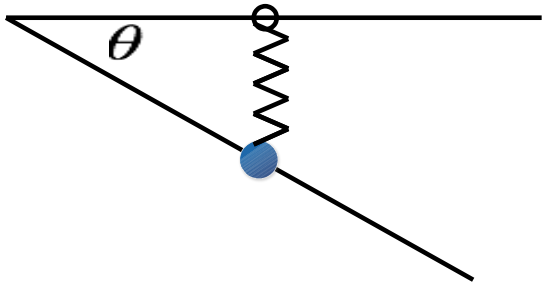
c) La velocidad máxima ocurre en $z = L$ cuando la energía almacenada en el resorte es nula. Por conservación de energía tenemos

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgL \implies v = \sqrt{2gL}.$$

7. Dos rieles rectos forman un ángulo θ. Una cuenta de masa m está constreñida a moverse sobre el riel diagonal. El coeficiente de roce cinético entre la cuenta y el riel es igual al coeficiente de roce estático y vale μ. La masa está conectada a un resorte que se puede deslizar sin fricción sobre el riel horizontal. El resorte está siempre vertical (porque no hay roce con el riel horizontal y el resorte no tiene masa). El resorte tiene largo natural $\ell_0 = 0$ y constante k. Estando la cuenta en el vértice se le da una velocidad inicial v_0 (en la figura se muestra una vez que ya ha avanzado por el riel).

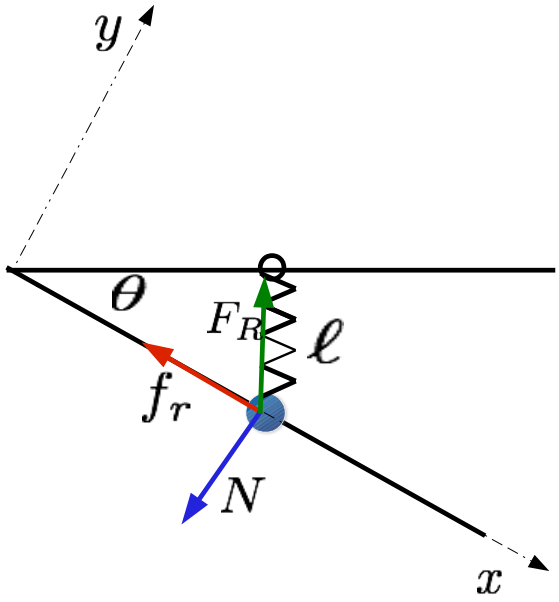
   - Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre la masa una vez que ya ha avanzado por el riel. Suponga que no hay fuerza de gravedad.
   - ¿Qué distancia recorre la cuenta por el riel antes de detenerse?

- ¿Bajo qué condiciones la cuenta se devuelve y viaja hacia el vértice después de haberse detenido?
- ¿Si se devuelve hasta el vértice, con qué velocidad llega a él?



Solución:

a) Las fuerzas que actúa sobre m son la normal que ejerce el riel, la fuerza del resorte F_R y la fuerza de roce f_r que apuntan en la dirección que se muestra en la siguiente figura:



La fuerza de roce está dibujada considerando que la masa se aleja del vértic, cuando sube la fuerz de roce apunta en la otra dirección.

Para las siguientes preguntas se necesita conocer las fuerzas y sus comonentes:

En el sistema coordenado de la figura, si la masa se encuentra en la posición x,

$$\ell = x\sin\theta, \vec{F}_R = |F_R|(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) \qquad \text{con} \qquad |F_R| = k\ell = kx\sin\theta$$

La partícula no se mueve en a dirección $\hat{y}$ por lo que

$$N = |F_R| \cos\theta = kx \sin\theta \cos\theta.$$

La fuerza de roce es

$$\vec{f_r} = -\mu N \hat{x} = -\mu k x \sin\theta \cos\theta \hat{x}.$$

b) La normal no hace trabajo por lo que la relación trabajo energía es, en este caso,

$$\frac{1}{2}k\ell^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^{x_f} \vec{f_r} \cdot dx\hat{x}.$$

Escribiendolo en términos de x esto es

$$\frac{1}{2}kx_f^2 \sin^2\theta - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu k \sin\theta\cos\theta \int_0^{x_f} x dx = -\frac{1}{2}\mu k \sin\theta\cos\theta x_f^2$$

Despejando x_f queda

$$\boxed{x_f = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{v_0}{\sqrt{\sin\theta(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}}$$

c) Al devolverse la fuerza de roce actúa en la dirección $\hat{x}$ y el resorte en la dirección opuesta. Se mueve si la componente $\hat{x}$ de la fuerza del resorte supera el roce estático.

Se devuelve si

$$F_R \sin\theta = kx_f \sin^2\theta > \mu N = \mu k x_f \sin\theta\cos\theta,$$

de donde se obtiene, que se desliza de vuelta si

$$\boxed{\mu < \tan\theta.}$$

d) Por conservación de energía nuevamente se obtiene

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \sin^2\theta = -\frac{1}{2}\mu k \sin\theta\cos\theta x_f^2$$

de donde resulta

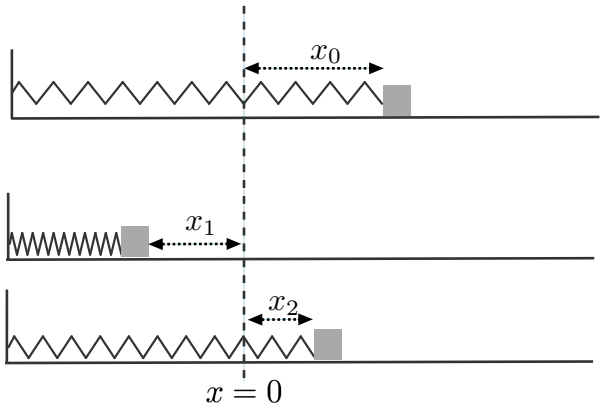
$$\boxed{v_f = v_0\sqrt{\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}}}$$

8. Un bloque de masa m está unido a un resorte de constante elástica k. Sobre la masa actúa una fuerza de roce constante de magnitud f. El bloque se tira una distancia x_0 de su posición de equilibrio y luego se suelta.

a) Muestre que la disminución de amplitud en cada ciclo es constante.

b) Calcule el número de ciclos que oscila antes de detenerse.

Solución:



La energía inicial disminuye por la fuerza de roce constante. Por lo tanto en el estiramiento (compresión) máximo, cunado se anula la energía cinética

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = -f(x_0 - x_1).$$

Usando $x_1^2 - x_0^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1)$ y simplicando se obtiene

$$|x_1| = |x_0| - \frac{2f}{k}$$

y luego de un ciclo completo (ida y vuelta $x_0 - x_1 - x_2$)

$$|x_{n=1}| = |x_0| - \frac{4f}{k}$$

y así sucesivamente, es decir

$$|x_{n+1}| = |x_n| - \frac{4f}{k} = |x_0| - (n+1)\frac{4f}{k}$$

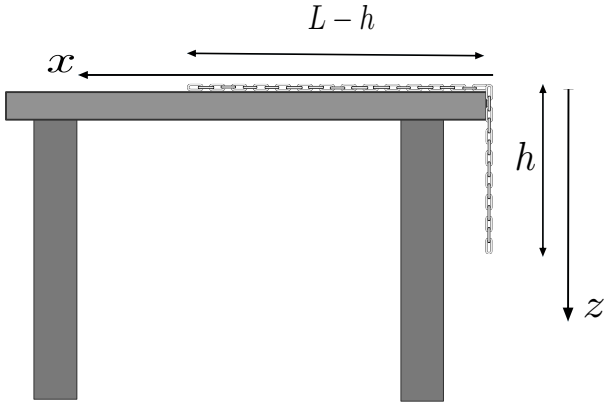
y se detiene ($|x_{n+1}| \to 0$) cuando

$$n + 1 \to \frac{kx_0}{4f}$$

9. Una cadena uniforme de largo L cuelga de una mesa de modo tal que h cuelga y $L-h$ descansa sobre la mesa.El coeficiente de roce estático entre la cadena y la mesa es μ_e y el coeficiente de roce cinético es μ_c.

   a) ¿Cuál es la longitud h que debe colgar para la cadena se empiece a deslizar?

   b) Si se desliza, cual es la velocidad del último eslabón que cae de la mesa?



Solución:

a) Si la cadena no se mueve la fuerza de roce estaático es igual a la fuerza de gravedad que la tira hacia abajo. Si llamamos λ la densidad de masa lineal de la cadena, el peso de la cadena que cuelga es λgh y es igual a la fuerza de roce:

$$f_r = \lambda gh$$

Pero sabemos que $f_r \leq \mu_e N$. En este problema la normal es el peso de la cuerda que está sobre la mesa, $N = \lambda g(L-h)$. Tenemos entonces que

$$\lambda gh \leq \mu_e \lambda g(L-h)$$

de donde se deduce que la cuerda no se mueve si

$$h \leq h_c = \frac{L}{1+\mu_e}.$$

Si $h > h_c$ la cuerda se desliza.

b) Supongamos que inicialmente se coloca de modo que una longitud $h > h_c$ cuelga. En este instante inicial está en reposo y empieza a moverse. La energía inicial es solamente potencial, y vale (consideramos un elemento de masa $dm = -\lambda dz$ ubicado en la posición z y luego integramos sobre el pedazo de cuerda colgante)

$$E_{in} = -\int_0^h (\lambda dz g)z = -\frac{\lambda g}{2}h^2$$

Cuando ha salido completamente de la mesa tiene energía cinética y energía potencial:

$$E_{fin} = \frac{1}{2}\lambda L v^2 - \frac{\lambda g}{2} L^2.$$

La diferencia entre ambas es el trabajo hecho por la fuerza de roce. La fuerza normal cuando hay una longitud x sobre la mesa es $N = \lambda g x$ y la fuerza de roce $f_r = \mu_c \lambda g x$. Esta longitud x varía entre 0 (cayó la cuerda) y la longitud inicial sobre la mesa $L - h$. Si cae dx el trabjao es $-dx f_r$. El trabajo total es entonces la suma de estos trabajos,

$$W = -\mu\lambda g \int_0^{L-h} x dx = -\mu_c \frac{\lambda g}{2}(L-h)^2$$

y como $E_{fin} - E_{in} = W$ la velocidad resulta

$$v^2 = \frac{g}{L}((L-h)^2 - \mu_c(L-h)^2)$$