Examen: FIS1514 - Dinámica

Instituto de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs: A. Edward, B. Loewe, D. Teca

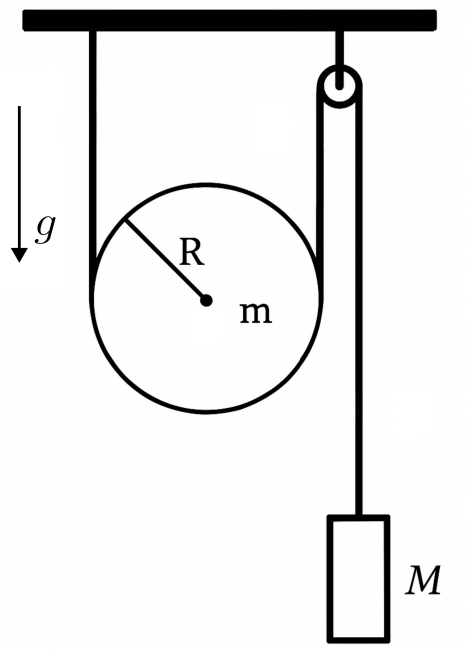
Primer Semestre 2025

Tiempo para responder: 150 minutos.

- Debe poner su nombre, rut y sección en cada hoja de respuesta.
- Consultas sólo de enunciado y en voz alta
- No puede usar celular ni calculadora.
- No puede prestar nada.
- Cada problema debe ser resuelto en un cuadernillo de hojas blancas independiente.
- El orden y las explicaciones son requisitos para obtener el puntaje máximo en cada problema.
- Cualquier acto que vaya en contra del código de honor se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Cuerpo Rígido	**Posición del eje de rotación**	**Momento de Inercia (I)**
Varilla delgada de longitud L y masa M	CM	$\frac{1}{12}ML^2$
Cono sólido de radio R (de la base) y masa M	CM	$\frac{3}{10}MR^2$
Cono sólido de radio R, altura H y masa M	Diámetro de la base	$\frac{1}{10}M\left(\frac{3}{2}R^2+H^2\right)$
Varilla delgada de longitud L y masa M	Extremo de la varilla	$\frac{1}{3}ML^2$
Aro delgado de radio R y masa M	CM	MR^2
Cilindro sólido de radio R y masa M	CM	$\frac{1}{2}MR^2$
Disco de radio R y masa M	CM	$\frac{1}{2}MR^2$
Placa rectangular de lados a y b asentada con masa M	CM	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
Placa rectangular con lado perpendicular al eje de rotación L, masa M	CM	$\frac{1}{12}ML^2$
Placa rectangular con lado perpendicular al eje de rotación L, masa M	Extremo de la placa	$\frac{1}{3}ML^2$
Esfera sólida de radio R y masa M	CM	$\frac{2}{5}MR^2$
Cascarón esférico de radio R y masa M	CM	$\frac{2}{3}MR^2$
Corona esférica de radio interno R_1, radio externo R_2 y masa M	CM	$\frac{2}{5}M\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^3}$
Cilindro hueco de radios R_1 y R_2 con masa M	CM	$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$
Partícula de masa M a una distancia R del eje de rotación	Distancia R de la partícula	MR^2

1. Considere un disco macizo circular de masa m y radio R el cual se encuentra acoplado a una masa M a través de una polea ideal (i.e., sin masa) fija como se muestra en la siguiente figura



Considere que no hay deslizamiento entre la cuerda y el disco, que la aceleración de gravedad es g y esta apunta hacia abajo, y desprecie el roce con el aire.

a) **(1.0 pts)** Determine todas las fuerzas que actúan tanto en el disco como en la masa y dibuje sus respectivos diagramas de cuerpo libre. En particular, destaque en que punto del cilindro actúa cada fuerza.

b) **(1.5 pts)** Escriba las ecuaciones de movimiento traslacional (i.e., relacionadas a las fuerzas) para el cilindro y la masa. Explicite las coordenadas que va a ocupar para describir cada cuerpo en un dibujo.

c) **(1.5 pts)** Escriba las ecuaciones de movimiento rotacional (i.e., relacionadas a los torques). Explicite que dirección considera como giro positivo en un dibujo.

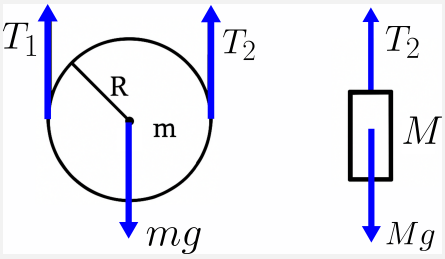
d) **(1.0 pts)** Escriba las ecuaciones de ligadura del problema. Note que el extremo izquierdo de la cuerda y la polea de la derecha están fijos.

e) **(1.0 pts)** Determine la aceleración del centro de masa del disco.

a) Diagrama cuerpo libre:

Sobre el cilindro actúan el peso mg (actuando en el centro de masa apuntando hacia abajo) y dos tensiones (actuando en los puntos de contacto apuntando hacia arriba), la del lado izquierdo de la cuerda (T_1) y la del lado derecho (T_2). Como el cilindro tiene masa (y por ende, inercia), estas son distintas. Sobre la masa M actúan el peso Mg (actuando en el centro de masa apuntando hacia abajo), y la tensión de la cuerda T_2 (actuando en el punto de contacto apuntando hacia arriba). Como la polea que acopla el cilindro con la masa M es ideal (sin masa), esta tensión es igual a la de la cuerda del lado derecho del cilindro.

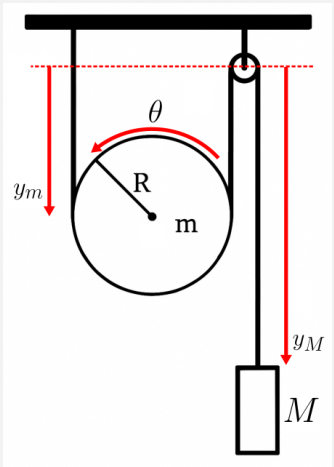
Los diagramas de cuerpo libre son los siguientes:



Puntaje: 0.2 pts. por cada fuerza correcta (i.e., dirección y punto de aplicación,excepto por las fuerzas actuando en M que no requieren especificar punto de aplicación). De faltar algo se asigna 0.1 puntos. ■

b) Ecuaciones de movimiento traslacionales:

Usaremos las coordenadas descritas en la siguiente figura:



Puntaje: 0.5 puntos por identificar coordenadas traslacionales.

En este problema solamente el movimiento vertical es relevante. Para el cilindro tenemos

$$mg - T_1 - T_2 = m\ddot{y}_m \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

Para la masa M tenemos

$$Mg - T_2 = M\ddot{y}_M \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

■

c) Ecuaciones de movimiento rotacionales:

Asumiremos como dirección de giro positivo la dirección anti-horaria, como aparece en la figura anterior (0.5 pts. por identificar dirección de giro en un diagrama).

Calculamos el torque respecto al centro de masa del cilindro. Con esto, los torques son $\tau_1 = -RT_1$ (0.25 pts.) y $\tau_2 = RT_2$ (0.25 pts.).

Ocupando que el momento de inercia de un cilindro de radio R y masa m respecto a un eje perpendicular que pasa por el centro de masa es $I = mR^2/2$ (0.25 pts.), tenemos entonces que

$$R\,T_2 - R\,T_1 = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Importante: No es necesario especificar el momento de inercia cada torque por separado. Es suficiente con escribir la ecuación anterior directamente. En dicho caso, se asigna (1 pts.) directamente.

■

d) Condiciones de ligadura:

La condición de ligadura de la cuerda es

$$y_m + y_m + y_M = 2y_m + y_M = \text{constante}.$$

Tomando dos derivadas vemos que

$$\ddot{y}_M = -2\ddot{y}_m \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

La segunda condición es que la cuerda no desliza sobre el cilindro

$$\ddot{y}_m = -R\ddot{\theta},$$

y por lo tanto

$$\ddot{\theta} = -\ddot{y}_m/R. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

e) Aceleración del centro de masa del cilindro:

Escribiendo nuestras ecuaciones de movimiento sólo en términos de $\ddot{y}_m$ obtenemos (0.5 pts.)

$$mg - T_1 - T_2 = m\ddot{y}_m, \qquad (1)$$
$$T_2 - Mg = 2M\ddot{y}_m, \qquad (2)$$
$$T_1 - T_2 = \frac{m}{2}\ddot{y}_m \qquad (3)$$

Haciendo (1)+(3)+2(2), obtenemos que

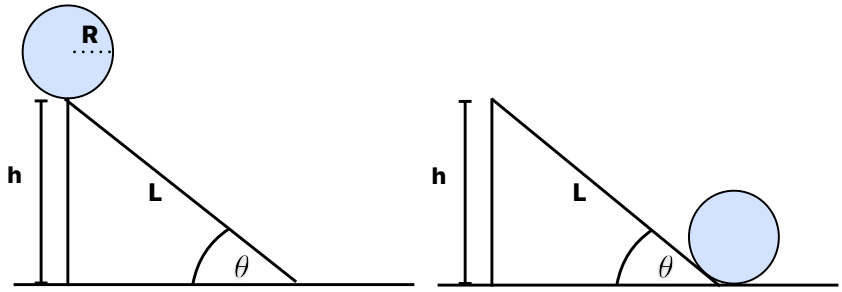
$$(m - 2M)g = \left(\frac{3}{2}m + 4M\right)\ddot{y}_m, \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

y por ende

$$\ddot{y}_m = \frac{2(m-2M)g}{3m+8M}. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

■

2.



Una moneda de masa m, radio R y momento de inercia respecto a su centro de masa dado por $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}mR^2$, se deja caer desde el reposo sobre un plano inclinado de longitud L y ángulo de inclinación θ. El plano está perfectamente rugoso, de modo que la moneda rueda sin deslizar. La moneda parte desde una altura h medida verticalmente desde la base del plano.

a) **(2.0 pts)** Determine la rapidez del centro de masa de la moneda al llegar al final del plano inclinado.

b) **(2.0 pts)** Calcule el tiempo que tarda en llegar abajo.

c) **(2.0 pts)** ¿Qué fracción de la energía potencial se convierte en energía rotacional?

a) Velocidad del centro de masa al llegar al pie del plano

Usamos conservación de la energía mecánica. La moneda parte desde el reposo a una altura $h = L\sin\theta$, por lo que su energía inicial es totalmente potencial. Al llegar abajo, tiene energía cinética traslacional y rotacional:

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

Para una moneda uniforme que rueda sin deslizar:

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}mR^2, \qquad \omega = \frac{v_{\text{CM}}}{R} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituimos:

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\left(\frac{v_{\text{CM}}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{4}mv_{\text{CM}}^2 = \frac{3}{4}mv_{\text{CM}}^2$$

Despejamos la velocidad del centro de masa:

$$\boxed{v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{4}{3}gL\sin\theta}} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

b) Tiempo que tarda en llegar abajo:

Usamos la cinemática escalar con aceleración constante:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2aL \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

La moneda parte del reposo, por tanto

$$v_i = 0. \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

Nótese que

$$v_f = v_{\text{CM}}. \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

Entonces:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{3}gL\sin\theta}\right)^2 = 2aL \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}gL\sin\theta = 2aL$$

Despejando la aceleración:

$$a = \frac{2g\sin\theta}{3} \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

Ahora aplicamos:

$$L = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2L}{a} = \frac{2L}{\frac{2g\sin\theta}{3}} = \frac{3L}{g\sin\theta}$$

Por lo tanto, el tiempo que demora en llegar abajo es:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{3L}{g\sin\theta}}} \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

■

c) Fracción de energía potencial que se convierte en energía rotacional:

La energía total de la moneda en el fondo del plano inclinado es el resultado de la suma de la energía cinética traslacional y la rotacional. Nótese que $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$ y $\omega = \frac{v_{CM}}{R}$.

La energía rotacional tiene la forma

$$E_{\text{Rotacional}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_{CM}^2 \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

y la traslacional

$$E_{\text{Traslacional}} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2. \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

La energía total final es puramente cinética y toma la forma

$$E_{\text{final}} = E_{\text{Traslacional}} + E_{\text{Rotacional}} \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

es decir

$$E_{\text{final}} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{4}mv_{CM}^2 = \frac{3}{4}mv_{CM}^2 \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

Entonces, el porcentaje de energía rotacional es:

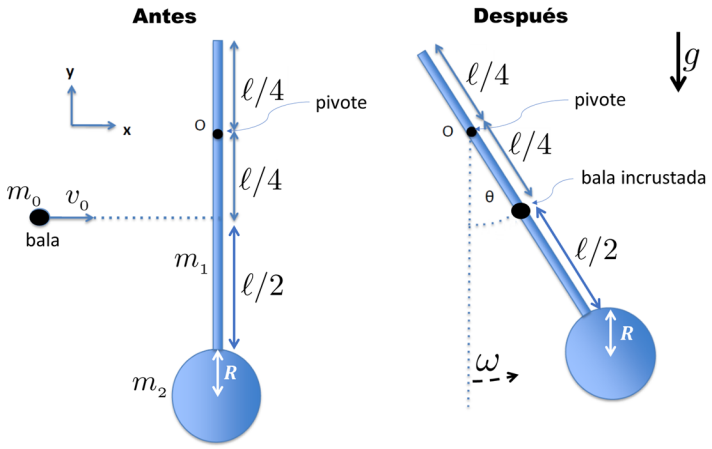
$$\frac{E_{\text{Rotacional}}}{E_{\text{final}}} = \frac{\frac{1}{4}mv_{CM}^2}{\frac{3}{4}mv_{CM}^2} = \frac{1}{3} = 0.3\overline{3} = 33.\overline{3}\,\% \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

por lo tanto

el 33.3 % de la energía potencial se convirtió en energía rotacional

■

3.



Descripción del sistema: El sistema representado en la figura consiste en un péndulo físico compuesto por una barra delgada y un disco, ambos homogéneos, que se encuentran en un mismo plano vertical y están sometidos a la aceleración de gravedad g. La barra tiene masa m_1, longitud ℓ, y está unida rígidamente en su extremo inferior a un disco de masa m_2 y radio R, conectado por su diámetro, de modo que el disco cuelga alineado con la barra. El conjunto está suspendido desde un pivote fijo en el punto O, ubicado a una distancia $\ell/4$ por debajo del extremo superior de la barra. Suponga conocido es el momento de inercia I_p del péndulo físico respecto al eje de rotación que pasa por el pivote.

Descripción de la colisión: Inicialmente, el sistema cuelga en reposo en posición vertical. Una bala de masa m_0 se aproxima horizontalmente con velocidad constante $\vec{v} = v_0\hat{\imath}$ y colisiona con la barra a una distancia $\ell/2$ desde el extremo superior. La bala queda incrustada en la barra tras el impacto. Como resultado, el sistema compuesto por la barra, el disco y la bala comienza a oscilar, alcanzando un ángulo máximo θ con respecto a la vertical.

Asuma que todos los parámetros mencionados son conocidos.

(a) **(1.5 pts)** Determine el momentum angular total antes de la colisión.

(b) **(1.5 pts)** Después de la colisión, determine el momento de inercia total I_T del sistema respecto al eje de rotación que pasa por el pivote (punto O).

(c) **(1.5 pts)** Considere conocido el momento de inercia total I_T de la pregunta **(b)**. Calcule la velocidad angular ω con la que comienza a girar el sistema inmediatamente después del impacto.

(d) **(1.5 pts)** Acá considere conocido el momento de inercia total I_T de la pregunta **(b)** y la velocidad angular ω de la pregunta **(c)**. Determine el ángulo máximo θ que alcanza el sistema durante su oscilación, en función de I_T y otros parámetros conocidos.

Ayuda: Para solucionar este problema no es necesario conocer los momentos de inercia de la barra ni del disco.

(a) Momentum angular total antes de la colisión.

El punto fijo del sistema es el pivote, por tanto resulta natural definir el origen del sistema coordenado en este punto. En este caso el vector posición de la bala queda dado por la expresión

$$\vec{r}_{\text{bala}} = x\hat{\imath} - (\ell/4)\hat{\jmath}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por tanto,

$$\vec{L}_{\text{inicial}} = \vec{r}_{\text{bala}} \times m_0 v_0 \hat{\imath}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo la definición del vector posición se obtiene

$$\vec{L}_{\text{inicial}} = \left(x\hat{\imath} - (\ell/4)\hat{\jmath}\right) \times m_0 v_0 \hat{\imath} = \frac{1}{4} m_0 v_0 \ell \hat{k}.$$

Si se definie

$$\vec{L}_{\text{inicial}} = L_{\text{inicial}}\,\hat{k}$$

entonces

$$L_{\text{inicial}} = m_0 v_0 \ell/4. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

(b) Momento de inercia total I_T del sistema respecto al pivote

La bala queda incrustada a una distancia $\ell/2 - \ell/4 = \ell/4$ del pivote:

$$I_{\text{bala}} = m_0 \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} m_0 \ell^2. \qquad \text{(0.75 pts.)}$$

El momento de inercia total es

$$I_T = I_p + I_{\text{bala}} \qquad \text{(0.75 pts.)}$$

es decir

$$I_T = I_p + \frac{1}{16} m_0 \ell^2.$$

■

(c) Velocidad angular ω justo después de la colisión

Aplicando conservación del momento angular

$$L_{\text{inicial}} = L_{\text{final}}, \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde

$$L_{\text{final}} = I_T \omega, \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

se obtiene que

$$I_T \omega = \frac{m_0 v_0 \ell}{4}$$

donde el término $I_T\omega$ es el momentum angular inmediatamente después del choque. Por tanto la velocidad angular toma la forma

$$\omega = \frac{m_0 v_0 \ell}{4 I_T}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

En este item no es necesario sustituir explícitamente la expresión del momento de inercia I_T ■

(d) ángulo máximo θ

Luego del choque, se conserva la energía mecánica. Energía cinética inicial después del impacto toma la forma

$$K_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} I_T \omega^2. \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

En este item no es necesario sustituir explícitamente las expresiones del momento de inercia I_T ni de la velocidad angular ω

■

La energía potencial inicial depende de donde se considere el nivel de referencia. Pueden aparecer sumando términos constantes que dependen de donde se haya localizado el nivel de referencia. Para facilitar los calculos, acá consideramos que ese nivel de referencia coincide con la posición del pivote. Por tanto la energía potencial inicial (después del choque) toma la forma

$$U_{\text{inicial}} = -g\left[m_0\left(\frac{\ell}{4}\right) + m_1\left(\frac{\ell}{4}\right) + m_2\left(\frac{3}{4}\ell + R\right)\right].$$

Para simplificar la notación de la energía cinética podemos definir la posición del centro de masa de todo el sistema como

$$\ell_{\text{CM}} = \frac{m_0\left(\frac{\ell}{4}\right) + m_1\left(\frac{\ell}{4}\right) + m_2\left(\frac{3}{4}\ell + R\right)}{m_0 + m_1 + m_2}$$

y la masa total como

$$M = m_0 + m_1 + m_2.$$

Usando estas dos definiciones se ve fácilmente que la energía potencial toma la forma

$$U_{\text{inicial}} = -Mg\ell_{\text{CM}} \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

La energía potencial puede quedar escrita explícitamente en términos de los parametros ℓ, R, m_0, m_1 y m_2, o también en términos de la masa total M y la distancia ℓ_{CM}. ■

Entonces la energía total inicial es

$$E_{\text{inicial}} = K_{\text{inicial}} + U_{\text{inicial}}$$

es decir

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} I_T \omega^2 - Mg\ell_{\text{CM}}. \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

Los comentarios anteriores siguen siendo válidos para el resto del ejercicio. ■

Cuando el sistema alcanza el ángulo máximo la velocidad angular es cero, es decir

$$K_{\text{final}} = 0. \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

■

Por tanto, solo se tiene energía potencial:

$$U_{\text{final}} = -Mg\ell_{\text{CM}}\cos\theta. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

■

Esto implica que

$$E_{\text{final}} = -Mg\ell_{\text{CM}}\cos\theta. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

■

Igualando las energías inicial y final

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

se obtiene

$$\frac{1}{2}I_T\omega^2 = Mg\ell_{\text{CM}}(1-\cos\theta).$$

Despejando se obtiene

$$\cos\theta = \frac{Mg\ell_{\text{CM}} - \frac{1}{2}I_T\omega^2}{Mg\ell_{\text{CM}}}.$$

(0.3 pts.)

■