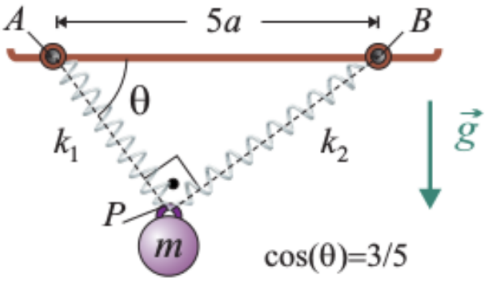
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
FIS1423 — Dinámica
2025-1
Prof. Edward Arévalo

Ejercicios

1. Problema

Los resortes AP y BP, de masas despreciables, tienen longitudes naturales $\ell_{1_0} = 2a$ y $\ell_{2_0} = 2a$, respectivamente. Sus constantes elásticas de Hooke, k_1 y k_2, son conocidas. Cada resorte está fijo por un extremo a los puntos A y B, respectivamente, ubicados sobre un plano horizontal y separados una distancia de $5a$. Los extremos libres de ambos resortes se unen en un punto común P, al cual se encuentra conectada una partícula de masa m.
Se considera que el sistema está en equilibrio estático. En esta configuración, se verifica que los segmentos AP y BP son perpendiculares entre sí, y que AP forma un ángulo θ con la horizontal, tal que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.



a) ¿Cuál es el trabajo realizado por cada resorte al sostener la masa m en equilibrio, suponiendo que ambos se encuentran estirados respecto a su longitud natural? **2 pts**

b) Suponga ahora que la masa m se elimina del sistema (es decir, $m = 0$). Si los extremos libres de ambos resortes permanecen conectados entre sí, ¿cómo será la nueva configuración de equilibrio? Realice un esquema claro que represente esta situación. **2 pts**

c) En la nueva configuración de equilibrio del sistema (sin la masa m), determine la posición del punto de contacto entre los extremos libres de los dos resortes. **2 pts**

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por cada resorte al sostener la masa m en equilibrio, suponiendo que ambos se encuentran estirados respecto a su longitud natural?

Solución

En la figura, sea ℓ_1 la distancia entre los puntos AP y ℓ_2 la distancia entre BP. Sea, además, $H = 5\,a$, la distancia entre AB. Entonces

$$\cos\theta = \frac{3}{5} = \frac{\ell_1}{H}.$$

Por tanto

$$\ell_1 = 3\,a.$$ **0.5 pts**

Nótese que

$$\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} = H$$

por tanto

$$\ell_2 = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4\,a$$ **0.5 pts**

La relación entre el trabajo hecho por una fuerza conservativa y el potencial es $W_C = -\Delta U$. Entonces el trabajo hecho por el resorte AP es:

$$W_{C_1} = -\frac{1}{2}k_1(\ell_1 - \ell_{1_0})^2 \;=\; -\frac{1}{2}k_1(3a - 2a)^2 \;=\; -\frac{1}{2}k_1 a^2.$$ **0.5 pts**

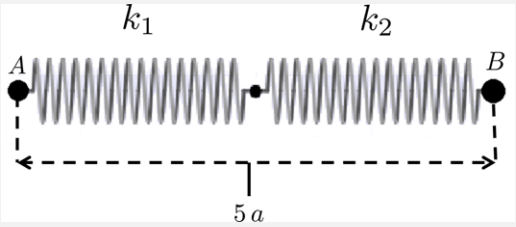
De igual manera, el trabajo hecho por el resorte BP es:

$$W_{C_2} = -\frac{1}{2}k_2(\ell_2 - \ell_{2_0})^2 \;=\; -\frac{1}{2}k_2(4a - 2a)^2 \;=\; -2k_2 a^2.$$ **0.5 pts**

b) Suponga ahora que la masa m se elimina del sistema (es decir, $m = 0$). Si los extremos libres de ambos resortes permanecen conectados entre sí, ¿cómo será la nueva configuración de equilibrio? Realice un esquema claro que represente esta situación.

Solución

Dado que la longitud natural de cada resorte es $2a$ y la distancia entre los puntos A y B es $5a$, se concluye que ambos resortes estarán necesariamente estirados, incluso si se encuentran dispuestos de forma horizontal. Por tanto, la configuración de equilibrio en este caso corresponde a la que se muestra en la figura a continuación.



2 pts

c) En la nueva configuración de equilibrio del sistema (sin la masa m), determine la posición del punto de contacto entre los extremos libres de los dos resortes.

Solución

Supongamos que el origen del sistema de coordenadas se encuentra en el punto A, y que el eje horizontal coincide con el segmento que une los puntos A y B. Denotemos por x_0 la posición de equilibrio, sobre dicho eje, del punto de contacto entre los extremos libres de los dos resortes (ahora conectados entre sí y sin la masa m).
En esta configuración, la segunda ley de Newton se reduce a la condición de equilibrio estático de fuerzas elásticas:

$$-k_1(x_0 - \ell_{1_0}) - k_2\,(x_0 - (H - \ell_{2_0})) = 0,$$ **1.5 pts**

donde $H = AB = 5a$ representa la distancia entre los puntos fijos A y B.

Resolviendo para x_0, se obtiene:

$$x_0 = \frac{k_1 \ell_{1_0} + k_2 (H - \ell_{2_0})}{k_1 + k_2}.$$

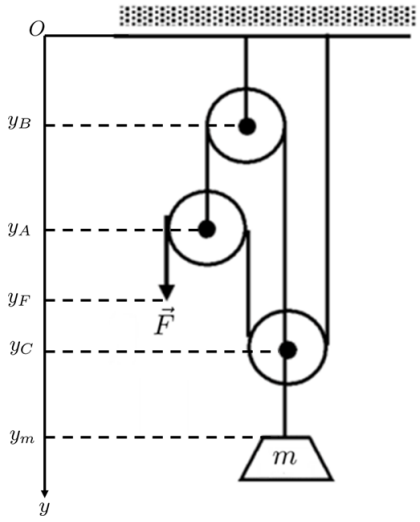
Sustituyendo los valores dados para las longitudes naturales, $\ell_{1_0} = 2a$ y $\ell_{2_0} = 2a$, se llega a:

$$x_0 = \frac{2a\, k_1 + 3a\, k_2}{k_1 + k_2} = 2a + a\, \frac{k_2}{k_1 + k_2}.$$

0.5 pts

2. Problema

Considere el sistema de poleas mostrado en la figura. Se asume que no hay fricción, que las poleas tienen masa y radio despreciables, y que las cuerdas son inextensibles.



Responda a las siguientes preguntas:

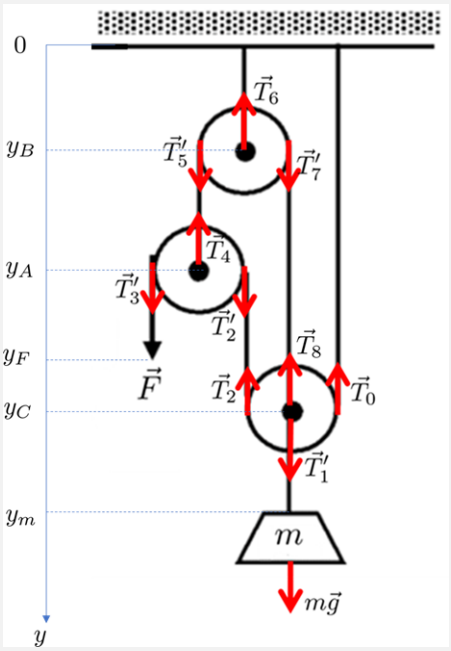
a) En estado estacionario (equilibrio), ¿cuál es el valor de la fuerza $F = |\vec{F}|$ en función del peso mg? **2 pts**

b) Determine las condiciones de ligadura del sistema (relaciones impuestas por la inextensibilidad de las cuerdas). **2 pts**

c) En el caso dinámico, ¿cuál es la relación entre la aceleración del extremo de la cuerda donde se aplica la fuerza $\vec{F}$ y la aceleración de la masa m? **2 pts**

a) En estado estacionario, ¿cual es el valor de la fuerza $F = |\vec{F}|$ en términos del peso mg?

Solución



Ya que las cuerdas transmiten la tensión, de la figura observamos que

$$|\vec{F}| = |\vec{T}_3'| = |\vec{T}_2'| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_0| = F \qquad \textbf{0.5 pts}$$

y

$$|\vec{T}_4| = |\vec{T}_5'| = |\vec{T}_7'| = |\vec{T}_8|. \qquad \textbf{0.5 pts}$$

Por otro lado de los diagramas de cuerpo libre de las poleas vemos que

$$|\vec{T}_3'| + |\vec{T}_2'| = |\vec{T}_4| = 2F,$$

$$|\vec{T}_2| + |\vec{T}_8| + |\vec{T}_0| = |\vec{T}_1'| = 2F + 2F = 4F,$$

y

$$|\vec{T}_1'| = mg. \qquad \textbf{0.5 pts}$$

Por tanto

$$F = \frac{mg}{4}. \qquad \textbf{0.5 pts}$$

donde $g = |\vec{g}|$.

b) Determine las condiciones de ligadura del sistema.

Solución

Las condiciones de ligadura en terminos de las coordenadas mostradas en la figura son:

$$(y_F - y_A) + (y_C - y_A) + y_C = \text{constante} \qquad \textbf{0.5 pts}$$

$$(y_A - y_B) + (y_C - y_B) = \text{constante}$$ **0.5 pts**

$$y_m - y_C = \text{constante}$$ **0.5 pts**

$$y_B = \text{constante}$$ **0.5 pts**

La forma diferencial de estas condiciones es

$$dy_F + 2dy_C - 2dy_A = 0$$
$$dy_A + dy_C = 0$$
$$dy_m - dy_C = 0$$

Combinando las relaciones diferenciales se obtiene que

$$dy_F = -4dy_m.$$

c) En el caso dinámico, ¿cuál es la relación entre la aceleración del extremo de la cuerda donde se aplica la fuerza $\vec{F}$ y la aceleración de la masa m?

Solución

Del punto anterior se ve que

$$\frac{d^2y_F}{dt^2} = -4\frac{d^2y_m}{dt^2}.$$

es decir

$$a_F = -4\,a_m.$$ **2.0 pts**