# Cinemática

En este apítulo introduciremos las nociones necesarias para describir el movimiento de *partículas puntuales*. Un objeto es *puntual* si las dimensiones físicas de él son pequeñas comparadas con las distancias características de su movimiento, o son pequeñas comparadas con la distancia al observador. Por ejemplo si lanzamos una silla por el aire, y la estamos observando de cerca veremos sus volteretas y evoluciones que hacen parecer su movimiento muy complicado. Sin embargo, si observamos la silla desde suficiente distancia parecerá un punto y su movimiento será muy simple de describir.

Con el objeto de describir el movimiento de una partícula en el espacio basta especificar su posición en cada instante de tiempo. Llamaremos *vector posición* de la partícula en el instante $t$ al vector que va desde un origen (arbitrario pero fijo) hasta la posición de la partícula en el instante $t$. Este vector, que usualmente denotaremos por $\vec{r}(t)$ es una función del tiempo. A la curva que describe la posición de la partícula a medida que el tiempo transcurre la llamaremos la *trayectoria de la partícula*. Es el lugar geométrico descrito por el extremo del vector $\vec{r}(t)$. En la figura 1, la curva $\mathcal{C}$ es la trayectoria descrita por una partícula. Si la partícula se encuentra en el punto $A$ de la trayectoria en el instante $t_1$, su vector posición es $\vec{r}(t_1)$. Si en un instante posterior, digamos $t_2$, la partícula se encuentra en el punto $B$ de la trayectoria, su vector posición es $\vec{r}(t_2)$.

Ciertamente la evolución de la partícula en el tiempo no queda determinada completamente por su trayectoria $\mathcal{C}$. La partícula en cuestión puede haber recorrido la trayectoria de muchas maneras. Si nos referimos a la figura 1, podría haber tardado en ir de $A$ a $B$ diez segundos, o quizás una hora, o podría haberse movido lentamente al pasar por $A$, o quizás muy rápido, y estos hechos no quedan para nada descritos con sólo especificar la *traza* (i.e., la trayectoria) que fue dejando la partícula en su movimiento. Por otra parte, la función $\vec{r}(t)$ sí contiene toda la información sobre el movimiento de ella. A partir de $\vec{r}(t)$ podemos conocer todos los detalles asociados al movimiento de la partícula (e.g., que

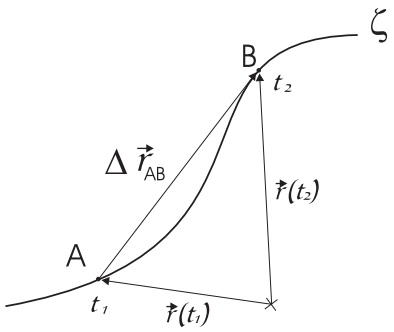



Fig. 1: Trayectoria, vector posición

distancia recorrió en un intervalo de tiempo $\Delta t$, que tan rápido pasó por $A$, cuánto tiempo tardó en ir de $A$ a $B$, etc.). Por ejemplo, el *desplazamiento* efectuado por la partícula al ir de $A$ a $B$ está dado por

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \tag{1}$$

Como el *intervalo de tiempo* que tarda la partícula al ir desde la posición $A$ a la posición $B$ es $\Delta t_{AB} = t_2 - t_1$, es natural definir la *velocidad media* de la partícula entre $A$ y $B$ como el cuociente entre $\Delta\vec{r}_{AB}$ y $\Delta t_{AB}$, es decir

$$\vec{v}_{AB} \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2}$$

Nótese que la velocidad media, tal como la hemos definido, es un vector y su dirección es paralela a la del vector desplazamiento. En la vida cotidiana, sin embargo, casi nunca se usa la velocidad media, tal como la hemos definido en (2). En nuestro lenguaje común, al referirnos a una velocidad promedio siempre pensamos en el cuociente entre la distancia recorrida, a lo largo de la trayectoria, y el tiempo que tardamos en recorrer esa distancia. A este cuociente, que es un escalar y no un vector, lo llamaremos la *rapidez media*. Para ser más precisos, fijemos un punto sobre la trayectoria, digamos $P$ (ver la figura 2). Ahora podemos medir la longitud del arco (medido sobre la trayectoria) desde el punto $P$ y cualquier punto sobre la trayectoria. En particular llamaremos $s(t_1)$ a la longitud del arco $PA$, $s(t_2)$ la longitud del arco $PB$, y en general $s(t)$ la longitud del arco desde el punto $P$ hasta la posición de la partícula en el instante $t$.

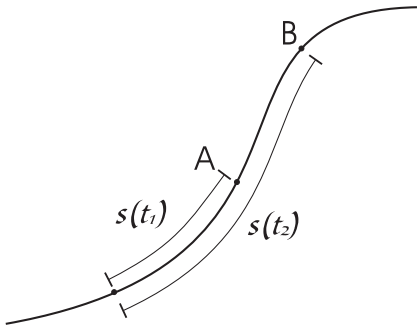



Fig. 2: Rapidez

Entonces, de acuerdo al lenguaje común, definiremos la *rapidez media* de la partícula entre los puntos $A$ y $B$ como el cuociente

$$v_{AB} \equiv \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{3}$$

En general, no hay ninguna relación entre la velocidad media y la rapidez media entre $A$ y $B$, salvo que siempre la magnitud del vector $\vec{v}_{AB}$ es mayor que el módulo de la rapidez media $v_{AB}$ (pues la longitud de un arco entre dos puntos es mayor que la longitud de la cuerda entre los mismos puntos). En general, el conocimiento de la velocidad media entre $A$ y $B$ no nos da una información detallada del movimiento de la partícula entre $A$ y $B$ como mencionamos anteriormente. Por ejemplo no sabemos que velocidad tenía la partícula al pasar por $A$ o cual era su velocidad al pasar por $B$. Sin embargo, si el punto $B$ es suficientemente cercano al punto $A$, $v_{AB}$ nos da una muy buena idea de la rapidez con que la partícula pasa por $A$. Así, conviene definir la *rapidez instantánea* (o simplemente rapidez a secas) en el instante $t$ (i.e., cuando la partícula pasa por $A$) a

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left( \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \right). \tag{4}$$

El lado derecho de (4) es justamente la derivada de $s$ con repecto al tiempo en $t_1$. De este modo, la *rapidez* en $A$ (i.e., en el instante $t_1$) está dada por

$$v(t_1) = \frac{ds}{dt}(t_1). \tag{5}$$

Usando el mismo procedimiento podemos definir la *velocidad instantánea* (o **velocidad**, a secas), como

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left( \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \right), \tag{6}$$

es decir,

$$\vec{v}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_1). \tag{7}$$

Cuando hacemos tender $t_2$ a $t_1$ (en otras palabras, cuando llevamos al punto $B$ junto al

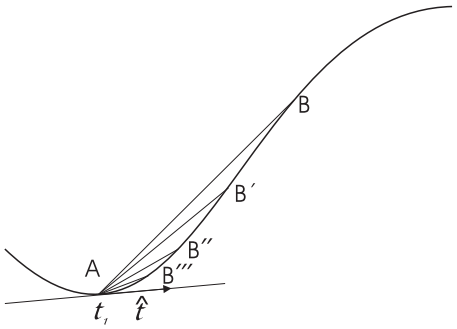



Fig.3: Proceso de límite

punto $A$), la distancia medida sobre el arco $AB$ y sobre la cuerda $AB$ se asemejan cada vez mas (i.e., $|\Delta r_{AB}| \approx \Delta s_{AB}$ cuando $B \to A$), de modo que la magnitud del vector $\vec{v}_{t_1}$ coincide con el módulo de $v(t_1)$. De este modo, la rapidez (instantánea) es simplemente la magnitud del vector velocidad (intantánea). Por otra parte, es evidente de este proceso de límite (si la trayectoria es una curva suave) que la dirección del vector velocidad $\vec{v}(t_1)$ es la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto $A$. Siguiendo un uso habitual, llamaremos $\hat{t}$ a la tangente unitaria a la curva. En realidad $\hat{t}$ es una función del arco $s$ (i.e., de la distancia $PA$ medida sobre la trayectoria). En resumen, el vector velocidad de la partícula al pasar por el punto $A$ de la trayectoria está dado por

$$\vec{v}(t_1) = v(t_1)\hat{t}. \tag{8}$$

La ecuación (8) es una consecuencia directa de la regla de la cadena. En efecto,

$$\vec{v}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t}(s(t_1))v(t_1), \tag{9}$$

pues $d\vec{r}/ds$ es precisamente la tangente unitaria a la curva en el punto $A$.

Además de la posición y de la velocidad, otra cantidad relevante en la descripción del movimiento es la aceleración. De hecho la aceleración juega un papel crucial en las leyes de Newton que rigen el movimiento de las partículas. Definiremos *aceleración media* entre dos puntos $A$ y $B$ de la trayectoria al cuociente

$$\vec{a}_{AB} \equiv \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{10}$$

Finalemente, definiremos la *aceleración instantánea* (o *aceleración*, a secas) en el instante $t$ como

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}(t). \tag{11}$$

Hasta ahora hemos visto como, a partir del conocimiento de la función $\vec{r}(t)$, podemos obtener distintas propiedades del movimiento de la partícula tales como su velocidad, rapidez, aceleración, velocidades y aceleraciones medias. El problema central de mecánica como veremos en el capítulo siguiente es el problema inverso. En efecto, lo que nos interesará más adelante es cómo, a partir de la aceleración (i.e., de la función $\vec{a}(t)$ para $t \geq 0$) y del estado inicial de la partícula (i.e., de su posición $\vec{r}$ y velocidad $\vec{v}$ en $t = 0$) podemos determinar totalmente la evolución de la partícula, i.e., su vector posición $\vec{r}$ como función del tiempo. Este camino inverso es simple de llevar a cabo, a partir de las ecuaciones (11) y (7), utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Si integramos la ecuación (11) entre $t = 0$ y $t = T$, y usamos el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos,

$$\vec{v}(T) - \vec{v}(0) = \int_0^T \vec{a}(t)\, dt. \tag{12}$$

Llamando a la variable de integración $\tau$ y luego cambiando $T$ por $t$, podemos arreglar (12) de modo que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Por lo tanto, si conocemos la velocidad inicial $\vec{v}(0)$ de la partícula y su aceleración $\vec{a}(\tau)$ entre 0 y $t$, por medio de (13) podemos determinar su velocidad entre 0 y $t$. Ahora podemos hacer un proceso similar, usando (7), para determinar $\vec{r}(t)$ a partir de $\vec{r}(0)$ y de $\vec{v}(\tau)$ entre 0 y $t$. Así obtendremos

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Las ecuaciones (13) y (14) representan justamente la solución del problema inverso buscado.

Quizás la aplicación más simple de las ecuaciones (13) y (14) consiste en encontrar la trayectoria de una partícula sometida a aceleración constante, digamos $\vec{a} = \vec{g}$ (esta situación corresponde precisamente a la de una partícula moviéndose en el campo gravitatorio uniforme, cerca de la superficie de la tierra; en este caso $\vec{g}$ está dirigido a lo largo de la vertical hacia abajo y su magnitud está dada aproximadamente por $g = |\vec{g}| \approx 9,81$ m/seg$^2$; $g$ se conoce habitualmente como *aceleración de gravedad*). Haciendo pues $\vec{a} = \vec{g}$ (constante) en (13) obtenemos de inmediato

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{g}\, t. \tag{15}$$

Reemplazando esta expresión para $\vec{v}(t)$ en (14) e integrando, obtenemos

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)\, t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \tag{16}$$

(aquí hemos usado que $\int_0^t \tau\, d\tau = t^2/2$). La ecuación (16) determina entonces la posición de una partícula que se mueve bajo la acción del campo gravitatorio uniforme $\vec{g}$ una vez conocido su *estado inicial* $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$. Si elegimos el origen $O$ justo en el punto inicial de la trayectoria $\vec{r}(0)$ tendremos

$$\vec{r}(t) = \vec{v}(0)\, t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \tag{17}$$

y observamos que $\vec{r}(t)$ es una combinación lineal de dos vectores constantes $\vec{v}(0)$ y $\vec{g}$. Si estos dos vectores son linealmente independientes, generan un plano. Así pues la trayectoria de la partícula, determinada a partir de (17), está contenida en el plano generado

por $\vec{v}(0)$ y $\vec{g}$. Por otra parte, si $\vec{v}(0)$ y $\vec{g}$ son colineales, entonces la partícula se mueve a lo largo de la línea generada por $\vec{g}$, que pasa por el origen. Retornaremos a este problema más adelante en este capítulo, cuando veamos el *Lanzamiento de Proyectiles*).

# Sistemas de Coordenadas

Con el objeto de representar los vectores discutidos en la sección precedente, en partícular el vector posición de la partícula, es conveniente utilizar algunos sistemas de coordenadas. Los mas usuales son los sistemas de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas, sistemas que discutiremos en detalle a continuación.

## Coordenadas Cartesianas

Este es el sistema más simple de coordenadas. Para representar al vector $\vec{r}$ utilizamos su proyección a lo largo de tres ejes ortogonales, fijos, los que denotaremos como $OX$, $OY$ y $OZ$, respectivamente, tal como se indica en la figura 4. Llamaremos $\hat{\imath}$ al vector unitario a lo largo de $OX$, $\hat{\jmath}$ al vector unitario a lo largo de $OY$ y $\hat{k}$ al vector unitario a lo largo de $OZ$. A la proyección de $\vec{r}$ a lo largo de $OX$ (i.e., a $\vec{r}\cdot\hat{\imath}$) la denotaremos por $x$. A las proyecciones de $\vec{r}$ a lo largo de $OY$ y $OZ$ las llamaremos $y$ y $z$ respectivamente.

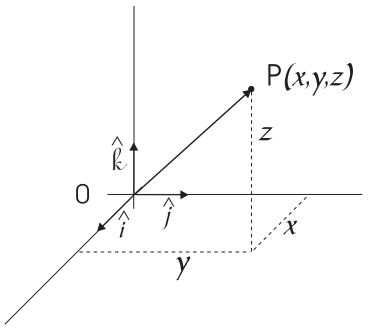



Fig. 4: Coordenadas Cartesianas

De este modo, podemos representar al vector $\vec{r}$ (en la base de vectores ortonormales $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$) por

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}. \tag{18}$$

Puesto que el vector $\vec{r}$ es una función del tiempo, también lo son sus *coordenadas* $x$, $y$, $z$. Por otra parte los vectores de la base, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, son constantes. Derivando con respecto al tiempo la expresión (18) para $\vec{r}$, obtenemos la correspondiente expresión para la velocidad en cartesianas. Como los vectores de la base son constantes, al derivar (18) obtenemos

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}. \tag{19}$$

Derivando a su vez (19) con respecto al tiempo, obtenemos la expresión para la aceleración en cartesianas,

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}. \tag{20}$$

De ahora en adelante utilizaremos una notación introducida por Newton para escribir las diferentes derivadas con respecto al tiempo. Así pues, denotaremos por

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}, \qquad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{etc.}, \tag{21}$$

Con esta notación podemos escribir

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}, \tag{22}$$

y

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}, \tag{23}$$

repectivamente. Para ilustrar el uso de coordenadas cartesianas volvamos al ejemplo de una partícula moviéndose en un campo gravitatorio uniforme que discutimos en la sección anterior. Elijamos el origen de coordenadas de modo que coincida con $\vec{r}(0)$; entonces, la posición de la partícula queda determinada por (17). Ahora elegimos el eje $OZ$ de modo que coincida con la dirección del campo gravitatorio. De este modo

$$\vec{g} = -g\,\hat{k}, \tag{24}$$

en que $g$ denota la aceleración de gravedad. Consideremos luego el vector $\vec{v}(0)$. Como hemos dicho antes, si $\vec{v}(0)$ es colineal con $\vec{g}$, el movimiento de la partícula es rectilíneo. En cambio, si $\vec{v}(0)$ no es colineal con $\vec{g}$, siempre podemos escoger como eje $OY$ a la dirección paralela al vector $\vec{v}(0) - v_z(0)\hat{k}$ (aquí $v_z(0)$ denota la proyección de $\vec{v}(0)$ sobre el eje $OZ$). Con esta elección tenemos

$$\vec{v}(0) = v_y(0)\hat{\jmath} + v_z(0)\hat{k}, \tag{25}$$

y, reemplazando (24) y (25) en (17) obtenemos

$$\vec{r}(t) = y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \tag{26}$$

en que

$$y(t) = v_y(0)\, t \tag{27}$$

y

$$z(t) = v_z(0)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2, \tag{28}$$

respectivamente.

## Coordenadas Polares

En diversas circunstancias, el sistema de coordenadas cartesianos no resulta el mas apropiado. Por ejemplo, al discutir el movimiento de un péndulo simple, o al describir la órbita de un satélite bajo la acción del campo gravitatorio terrestre, las ecuaciones de movimiento en cartesianas son mas bien complicadas. En esos casos resulta mucho más adecuado usar *coordenadas polares*, las que introducimos a continuación.

Consideremos una partícula en movimiento en un plano. Por supuesto podemos representar el movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas $(x, y)$ como se indica en la figura 4. Sin embargo, también podemos usar otros parámetros para representar la posición $P$ de la partícula. En efecto, podemos determinar completamente la posición $P$ especificando la distancia de $P$ al origen $O$ y el ángulo que forma $OP$ con un eje fijo (por

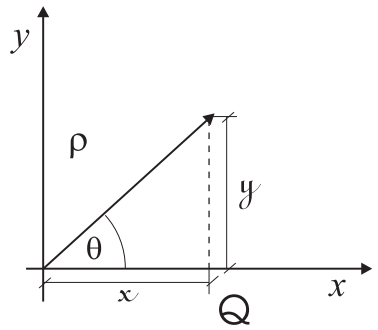



Fig. 5: Coordenadas Polares

ejemplo el eje $OX$). Llamemos pues $\rho$ a la distancia de $O$ a $P$ y $\theta$ al ángulo entre $OX$ y $OP$. Entonces la posición de $P$ queda especificada completamente por los valores de $\rho$ y $\theta$. Al par $(\rho, \theta)$ los llamaremos *coordenadas polares*. Aquí $\rho$ es una longitud y es siempre positiva o cero, en cambio $\theta$ es un ángulo que usualmente tomaremos entre 0 y $2\pi$. Usando la geometría del triángulo $OQP$ de la figura, resulta elemental encontrar la relación entre el par $(x, y)$ de coordenadas cartesianas y el par $(\rho, \theta)$ de coordenadas polares. De la figura tenemos

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta. \tag{29}$$

Usando el Teorema de Pitágoras también tenemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{30}$$

y, por último, de la geometría del triángulo $OQP$ tenemos,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \tag{31}$$

de modo que

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}. \tag{32}$$

Con el objeto de representar los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en este sistema de coordenadas, elegiremos una base apropiada. Llamaremos $\hat{\rho}$ al vector unitario a lo largo de $\vec{r}$ (i.e., a la

dirección $\theta$ = constante, ó, en otras palabras, la dirección de máximo crecimiento de la variable $\rho$). Por otra parte, llamaremos $\hat{\theta}$ al vector unitario ortogonal a $\rho$, dirigido en la dirección de crecimiento del ángulo $\theta$ (ver figura 6).

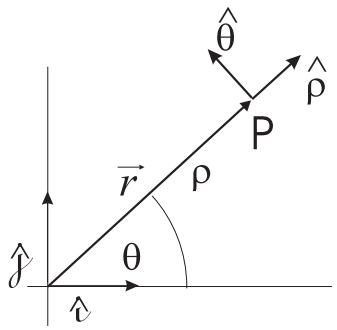



Fig. 6: Base del sistema de coordenadas polares

La base de vectores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ varía en el tiempo, junto con el movimiento del punto $P$. En cambio la base de vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ está fija. Con el objeto de calcular la dependencia temporal de $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ en el tiempo, conviene representar los vectores móviles $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ en la base $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$. De la figura 6 tenemos

$$\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} \tag{33}$$

y

$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}. \tag{34}$$

Es evidente de la figura 6, así como también de las ecuaciones (33) y (34), que los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ solamente varían si varía el ángulo $\theta$. Derivando (33) con repecto a $\theta$ vemos que

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} = \hat{\theta}. \tag{35}$$

Por otra parte, diferenciando (34) con respecto a $\theta$ obtenemos

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath} = -\hat{\rho}. \tag{36}$$

Que la derivada de $\hat{\rho}$ sea proporcional a $\hat{\theta}$ es una consecuencia del hecho que $\hat{\rho}$ es unitario. En efecto, derivando la igualdad $\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = 1$ con respecto a $\theta$, obtenemos de inmediato

que $\hat{\rho} \cdot d\hat{\rho}/d\theta = 0$, es decir $d\hat{\rho}/d\theta$ es ortogonal a $\hat{\rho}$. Como estamos en un espacio de dos dimensiones, ésto a su vez implica que $d\hat{\rho}/d\theta$ debe ser paralelo a $\hat{\theta}$.

Con estos preliminares podemos ahora obtener las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares. De la figura 6, obtenemos de inmediato

$$OP \equiv \vec{r} = \rho\hat{\rho}. \tag{37}$$

Para obtener la velocidad derivamos (37) con respecto al tiempo. De este modo, usando la regla de Leibniz, tenemos

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}. \tag{38}$$

Hemos visto anteriormente que $\hat{\rho}$ varía solo si $\theta$ varía. Así pues, usando la regla de la cadena y (35) obtenemos

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}. \tag{39}$$

Para referencia futura es conveniente calcular $d\hat{\theta}/dt$. Procediendo en forma análoga a la maera que obtuvimos (39), se tiene

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{\rho}. \tag{40}$$

Reemplazando (39) en (38) y utilizando la notación de Newton para denotar las derivadas temporales, finalmente obtenemos,

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}. \tag{41}$$

Una vez obtenida la velocidad es simple obtener la aceleración iterando el procedimiento anterior. De hecho, derivando (41) con respecto al tiempo, y utilizando la regla de Leibniz, se tiene

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\hat{\rho} + \dot{\rho}\,\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\,\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\theta}}{dt}. \tag{42}$$

Finalmente, reemplazando las expresiones para $d\hat{\rho}/dt$ y $d\hat{\theta}/dt$ obtenidas en (39) y (40) respectivamente, obtenemos finalmente la expresión para la aceleración en coordenadas

polares

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\,\hat{\rho} + \left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\,\hat{\theta}. \tag{43}$$

Para ilustrar el uso de las coordenadas polares, consideremos el movimiento de una partícula en un circunferencia con rapidez constante, i.e., *el movimiento circular uniforme*. Consideremos pues una circunferencia de radio $R$ sobre la cual se mueve una partícula con rapidez constante $v_0$. Con el objeto de describir el movimiento de la partícula elijamos un sistema de coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia (ver figura 7).

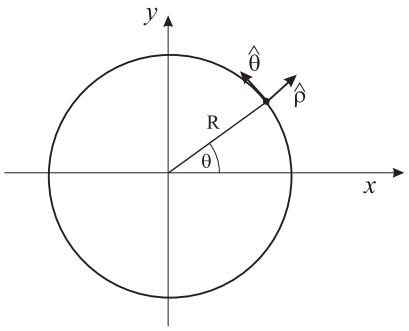



Fig. 7: Movimiento Circular Uniforme

Dada esta elección de coordenadas, $\rho = R$ es constante y por lo tanto $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Reemplazando estos valores en (41) tenemos

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}. \tag{44}$$

Como la partícula está obligada a moverse en la circunferencia, sólo tiene componente tangencial de la velocidad (i.e., sólo la componente a lo largo de $\hat{\theta}$ de su velocidad es no nula). Además, de (44) tenemos

$$v_0 = \dot{\theta} R, \tag{45}$$

de modo que la *velocidad angular* $\omega \equiv \dot{\theta}$ de la partícula es constante y está dada por $\omega = v_0/R$. Ya que $\omega = \dot{\theta}$ es constante para este movimiento, entonces $\ddot{\theta} = 0$. Reemplazando $\rho = R$, $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, y $\dot{\theta} = 0$ en (43) se tiene,

$$\vec{a} = -R\,\omega^2\,\hat{\rho} = -\frac{v_0^2}{R}\,\hat{\rho}. \tag{46}$$

Entonces, para el *movimiento circular uniforme* la aceleración de la partícula es centrípeta (i.e., es radial y dirigida hacia el centro de la circunferencia). Nota: La expresión (46) para la aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme fue obtenida por primera vez por Christian Huygens (1629–1695) (ver por ejemplo la referencia [2], que es una excelente referencia para distintos temas de la historia de la mecánica; ver también [4]).

## Coordenadas Cilíndricas

Consideremos una partícula $P$ que se mueve en el espacio. En lugar de representar la posición de $P$ en coordenadas cartesianas como lo hicimos mas arriba, podemos proyectar su movimiento a lo largo de un eje (llamemos $OZ$ a este eje) y sobre el plano perpendicular a $OZ$, digamos el plano $XY$, y utilizar coordenadas polares sobre este plano.

En la figura 8 el punto $P$ se mueve en el espacio, $Q$ representa su proyección en el plano $XY$, $z$ mide la altura de $P$ sobre el plano (i.e., la coordenada a lo largo del eje $OZ$). Para describir la posición de $Q$ sobre el plano $XY$ utilizamos coordenadas polares. Elegimos como eje polar a un eje fijo sobre el plano, que llamaremos $OX$. A la distancia del origen de coordenadas $O$ al punto $Q$ la llamremos $\rho$, en tanto que al ángulo entre $OQ$ y $OX$ lo llamaremos $\theta$. La posición de $P$ queda completamente determinada al especificar los valores de $\rho$, $\theta$ y $z$. A este conjunto de parámetros los llamaremos *coordenadas cilíndricas*. La coordenada $z$ varía entre $-\infty$ y $+\infty$, la coordenada $\rho$ entre 0 e $\infty$ y $\theta$ entre 0 y $2\pi$. En la figura 8 también hemos representado la base de vectores ortonormales $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{k}$, dirigidos a lo largo de las direcciones de crecimiento de $\rho$, $\theta$ y $z$ respectivamente. Los vectores $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ yacen sobre el plano $XY$ en tanto que $\hat{k}$ es perpendicular al plano.

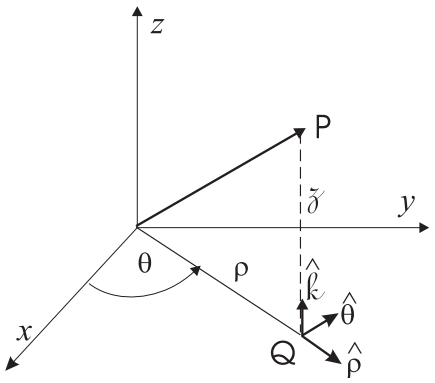



Fig. 8: Coordenadas Cilíndricas

Una vez introducidas las coordenadas cilíndricas procedemos como en los casos anteriores a encontrar las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de $P$ en estas coordenadas. Del triángulo $OQP$ de la figura 8 tenemos de inmediato

$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{k}. \tag{47}$$

Derivando $\vec{r}$ con respecto al tiempo, utilizando (39), (40) (o mejor aún directamente (41) para expresar la derivada de $OQ$ con respecto al tiempo) obtenemos

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{k}. \tag{48}$$

Aquí hemos usado que el vector $\hat{k}$, como en el caso de las coordenadas cartesianas, es constante.

Finalmente, derivando (48) con respecto al tiempo y utilizando (43), obtenemos

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{k}. \tag{49}$$

**Ejemplo:** Como aplicación del uso de las coordenadas cilíndricas encontraremos la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con rapidez uniforme, $v_0$, a lo largo de una *hélice*. La hélice es la curva que se obtiene al trazar una recta sobre el plano y luego enrollar el plano alrededor de un cilindro, tal como se indica en la figura 9. Alternativamente es la curva que describe la punta de la hélice de un avión que se mueve a velocidad constante.

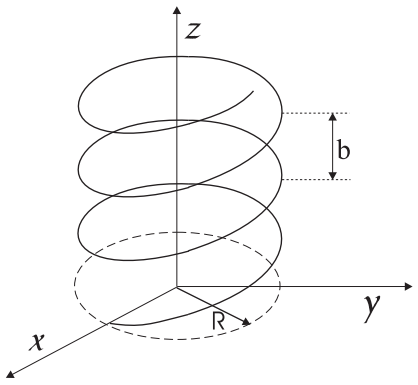



Fig. 9: Movimiento a lo largo de una hélice

De esta definición la ecuación de la hélice en coordenadas cilíndricas queda dada por

$$\rho = R \qquad z = \frac{b}{2\pi}\,\theta, \tag{50}$$

en que $R$ es el radio de la hélice y $b$ el *paso de la hélice*, es decir cuando aumenta $z$ al girar una vuelta (i.e., al avanzar $\theta$ en $2\pi$). Nótese para la hélice $z$ es multivaluada, y por lo tanto tenemos que tomar $\theta$ variando entre $-\infty$ y $+\infty$ para especificar completamente la posición de un punto sobre la hélice.

Derivando (50) con respecto al tiempo obtenemos de inmediato

$$\dot\rho = \ddot\rho = 0, \qquad \dot z = \frac{b}{2\pi}\,\dot\theta, \qquad \text{y} \qquad \ddot z = \frac{b}{2\pi}\,\ddot\theta. \tag{51}$$

Substituyendo los valores dados por (50) y (51) en (47) y (48) encontramos

$$\vec r = R\,\hat\rho + \frac{b}{2\pi}\theta\,\hat k, \tag{52}$$

$$\vec v = \left(R\,\hat\theta + \frac{b}{2\pi}\,\hat k\right)\,\dot\theta, \tag{53}$$

respectivamente. Nótese que la componente radial de la velocidad es nula como era de esperar pues la partícula se mueve sobre la superficie del cilindro de radio $R$ (la velocidad es tangencial a la superficie del cilindro).

Como la magnitud de $\vec v$ es constante, e igual a $v_0$, en este ejemplo, de (53) obtenemos

$$\dot\theta = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (b/(2\pi))^2}}. \tag{54}$$

Nótese que en este caso la velocidad angular, $\dot{\theta}$, es constante y por lo tanto $\ddot{\theta} = 0$. Finalmente usando (50), (51), y (54) en (49) obtenemos

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{\rho} = -\frac{v_0^2\,R}{R^2 + (b/(2\pi))^2}\,\hat{\rho}. \tag{55}$$

Nótese que si hacemos $b = 0$ en (53), (54), y (55), reobtenemos las expresiones correspondientes del movimiento circular uniforme que habíamos obtenido en la sección anterior. Esto era de esperarse, pues si el paso de la hélice es nulo, el movimiento sobre la hélice se reduce al movimiento sobre un círculo.

## Coordenadas Esféricas

Consideremos una partícula $P$ que se mueve en el espacio. En lugar de representar la posición de $P$ en coordenadas cartesianas como lo hicimos mas arriba, podemos usar coordenadas esféricas. En la figura 10 el punto $P$ se mueve en el espacio, $Q$ representa su proyección en el plano $XY$, $R$ representa su proyección en el plano $XZ$. Llamaremos $r$ a la distancia $OP$, i.e., al largo del vector $\vec{r}$. Así mismo llamaremos $\theta$ al ángulo entre OP (vector posición) y el eje $z$. Finalmente llamaremos $\varphi$ al ángulo entre $OQ$ y el eje $x$. A este conjunto de parḿetros $(r, \theta, \varphi)$ lo llamaremos *coordenadas esféricas*. Aquí, la coordenada $r$ es no negativa (i.e., $r \geq 0$), en tanto que $0 \leq \theta \leq \pi$, y $0 \leq \varphi \leq 2\,\pi$. En la figura 10 también hemos representado la base de vectores ortonormales $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{v}arphi$, dirigidos a lo largo de las direcciones de crecimiento de $r$, $\theta$ y $\varphi$ respectivamente. Los vectores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ yacen en el plano (vertical) que contiene al eje $z$ y a la recta $PQ$, en tanto que $\varphi$ yace en el plano $XY$.

Usando la figura 10 podemos descomponer $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ en la base cartesiana $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$. Así obtenemos, las relaciones siguientes:

$$\hat{r} = \operatorname{sen}\theta\,(\cos\varphi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath}) + \cos\theta\,\hat{k}, \tag{56}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,(\cos\varphi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{\jmath}) - \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}, \tag{57}$$

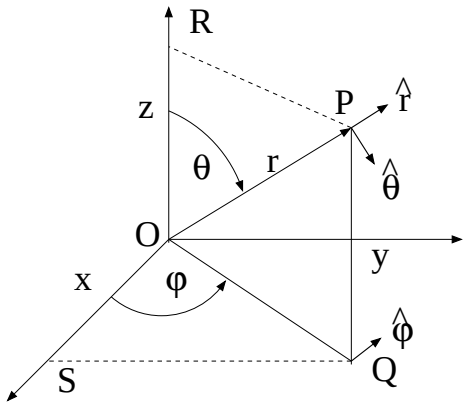



Fig. 10: Coordenadas Esféricas

y,

$$\hat{\varphi} = -\operatorname{sen}\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath}. \tag{58}$$

Derivando estas expresiones es simple obtener,

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \qquad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{\varphi}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \qquad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}, \tag{60}$$

y

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}. \tag{61}$$

Tal como lo hicimos en el caso de las coordenadas polares, ahora encontraremos las expresiones para el vector posición, la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas, usando las expresiones (59), (60), y (61). De la definición de $r$ y de $\hat{r}$ (ver también la figura 10) tenemos que,

$$\vec{r} = r\,\hat{r}. \tag{62}$$

Derivando (62) con respecto al tiempo y usando la regla de la cadena tenemos,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,(\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\varphi}). \tag{63}$$

Para obtener el término entre paréntesis en la última ecuación usamos la regla de la cadena para obtener,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi},$$

y luego (59) para obtener finalmente

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} + \operatorname{sen}\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}.$$

Derivando luego (63) y procediendo de un modo análogo, uno finalmente encuentra,

$$\begin{aligned}\vec{a} = \quad & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\,\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\,\hat{\theta} \\ & + \left(2\dot{r}\operatorname{sen}\theta\dot{\varphi} + r\operatorname{sen}\theta\ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\,\hat{\varphi}. \qquad (64)\end{aligned}$$

*Comentario:* Una aplicación histórica de las coordenadas esféricas son las *curvas de rumbo fijo* en navegación. Estas curvas se conocen como *loxodromos*. Ver discusión en los tópicos especiales al final de éste capítulo.

# Lanzamiento de Proyectiles

El lanzamiento de proyectiles fue analizado correctamente por primera vez por Galileo Galilei (1564–1642). El problema, por supuesto, es encontrar la trayectoria de una partícula que es arrojada con rapidez inicial $v_0$ formando un ángulo $\theta$ con la horizontal, en presencia de un campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ dirigido a lo largo de la vertical, hacia abajo (ver figura 11).

Como hemos visto anteriormente, la ecuación que gobierna el movimiento del proyectil es la ecuación (17). Hemos visto que el movimiento de tal proyectil ocurre en un plano. Si elegimos las coordenadas cartesianas $(y, z)$ para describir el movimiento del proyectil en el plano, entonces la evolución de las coordenadas $y(t)$ y $z(t)$ del proyectil está dada por (25) y (26) respectivamente. En términos de la rapidez inicial $v_0$ y del ángulo de tiro $\theta$, tenemos $v_y(0) = v_0\cos\theta$ y $v_z(0) = v_0\operatorname{sen}\theta$. Reemplazando estas expresiones en (25) y

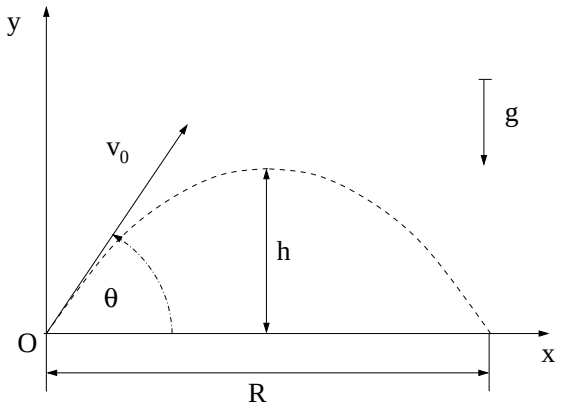



Fig. 11: Lanzamiento de Proyectiles

(26) respectivamente, el movimiento del proyectil está dado en forma paramétrica (i.e., en la forma $y = y(t)$, $z = z(t)$ con el tiempo como parámetro) por

$$y(t) = v_0 \cos\theta\, t, \tag{65}$$

y

$$z(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2. \tag{66}$$

Recordemos que hemos elegido el origen de coordenadas de modo que coincide justo con el punto de lanzamiento y hemos establecido $t = 0$ como el instante en que se arroja el proyectil.

Si despejamos el tiempo $t$ de (65) en términos de $y$, y lo reemplazamos en (66) obtenemos

$$z = \tan\theta\, y - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos\theta^2}\, y^2. \tag{67}$$

La ecuación (67) corresponde a la ecuación de una parábola en el plano $(y, z)$, invertida, y con eje de simetría paralelo al eje $z$. Completando el cuadrado en (67) podemos escribir la ecuación de la parábola como

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos\theta^2} \left( y - \frac{v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sin}^2\theta. \tag{68}$$

De (68) vemos que la altura máxima que alcanza el proyectil es

$$h = h(v_0, \theta) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}^2\theta, \tag{69}$$

altura que ocurre cuando el proyectil se encuentra a una distancia horizontal $d = d(v_0, \theta) = v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta/g$ desde el punto de lanzamiento. En otras palabras, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $(d, h)$ del plano. Quizás la propiedad más importante en el lanzamiento de proyectiles es el *rango*, i.e., a que distancia desde el punto de lanzamiento se encuentra el proyectil cuando toca tierra (cuando $z = 0$ nuevamente). El rango $R = R(v_0, \theta)$ es fácil de obtener a partir de (67). Haciendo $z = 0$ en (67) obtenemos dos soluciones para $y$, digamos $y = 0$ e $y = R$ en que

$$R(v_0, \theta) = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{70}$$

Nótese que $R = 2\,d$, lo que era de esperar pues el eje de simetría de la parábola es la recta $z = d$. Tanto el rango, $R$, como la altura máxima que alcanza el proyectil, $h$, son funciones de los datos del lanzamiento $v_0$ y $\theta$. En particular, ambos son proporcionales a $v_0^2/g$ que es la única expresión con dimensiones de longitud que podemos construir a partir de $v_0$ y $g$.

Para una rapidez inicial $v_0$ dada, si consideramos el *rango* como función del ángulo de lanzamiento, $\theta$, este es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es $\pi/4$ (i.e., $45°$). Además, como la función *seno* satisface $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, el *rango* correspondiente a un ángulo $\theta$ es igual al *rango* correspondiente a $\pi/2 - \theta$ (en otras palabras, la función $R(v_0, \theta)$ es simétrica con respecto a $45°$).

# Tópicos Especiales

## I. Problemas de Persecución: La Dama y el Perrito.

Los problemas de *persecución* son un tema clásico de la cinemática. Tradicionalmente llevaban el rótulo del *mercante y el pirata* (ver [3]) pero aquí elegimos el título de *La Dama y el Perrito* parafraseando el clásico cuento de Anton Chejov (1899). Las herramientas de cálculo que se usan en este tipo de problemas son un poco mas sofisticadas que la del resto del capítulo, de modo que esta sección se puede saltar en una primera lectura y retornar a ella más adelante.

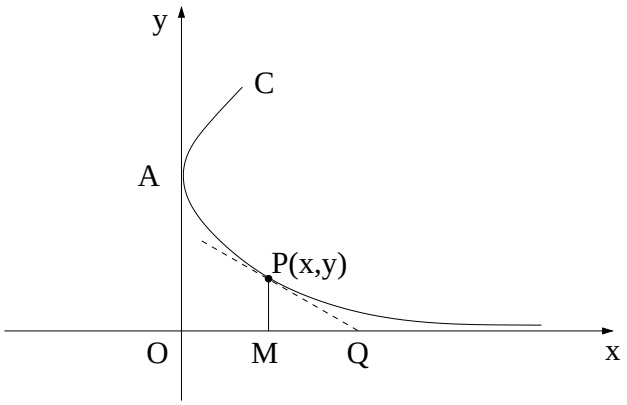



Fig. 12: Problema de Persecución

Considere dos puntos (la dama y su perrito); el primero, $Q$ (la dama), se mueve en línea recta con velocidad constante $v$ y el segundo, $P$ (el perrito), describe una curva con rapidez constante $u$ de modo que en todo instante se dirige hacia su amo (la dama). El objeto es determinar la ecuación de la trayectoria de $P$, en los distintos casos ($u < v$, $u = v$, y $u > v$). Existen muchas variantes de este tipo de problemas. El lector interesado puede consultar [3].

Con el objeto de encontrar la trayectoria del perrito, elegiremos coordenadas cartesianas. Elegimos el eje $OX$ de modo que coincida con la trayectoria de la dama. Denotaremos por $\mathcal{C}$ a la trayectoria del perrito. El perrito recorre $\mathcal{C}$ con rapidez constante $u$, de modo que en todo instante $t$, la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $P$ intersecat al eje $OX$ justo en $Q$, i.e., en la posición de la dama en el instante $t$. Si consideramos la trayectoria de la dama como todo el eje $OX$, eds claro que sobre la curva $\mathcal{C}$ debe haber un punto $A$ tal que la tangente a $\mathcal{C}$ en $A$ es perpendicular al eje $OX$. Elegiremos justamente la tangente a $\mathcal{C}$ en $A$ como el eje $OY$. Llamemos $x$ e $y$ a las coordenadas del perrito $P$ en un instante dado (i.e., $P = (x, y)$. Como $P$ y $Q$ recorren sus respectivas trayectorias con rapidez constante, debemos tener

$$\frac{AP}{u} = \frac{OQ}{v}, \tag{71}$$

ya que $A$, $O$ y $P$, $Q$ son dos pares de posiciones simultáneas del perrito y de la dama. Por definición de la tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $P$ tenemos que

$$\frac{MQ}{MP} = -\frac{dx}{dy}, \tag{72}$$

en que el punto $M$ es la proyección de $P$ sobre el eje $OX$. El signo menos se ha introducido en (72) para tomar en cuenta que la curva $\mathcal{C}$ tiene pendiente negativa en $P$. Ahora, $AP = s$ es el arco descrito por el perrito sobre $\mathcal{C}$ (medido a partir del punto $A$), en tanto que $OQ = OM + MQ$. Pero, por construcción, $OM = x$ y $MP = y$, de modo que podemos reescribir (71, usando (72, como

$$\frac{v}{u}\, s = e\, s = x - y\, \frac{dx}{dy}, \tag{73}$$

en que hemos definido $e \equiv v/u$.

Por otra parte, a lo largo de la curva $\mathcal{C}$, el elemento de arco

está dado (usando el Teorema de Pitágoras) por

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{74}$$

de donde sigue

$$\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \tag{75}$$

en que el signo menos proviene del hecho que $s$ aumenta cuando $y$ disminuye. Derivando la ecuación (73) con repecto a $y$, usando (75), obtenemos

$$e\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\frac{d^2x}{dy^2}, \tag{76}$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden para $f = dx/dy$ que se puede resolver mediante separación de variables. En efecto, la ecuación (76) se puede escribir como

$$\frac{df}{\sqrt{1+f^2}} = e\,\frac{dy}{y}, \tag{77}$$

cuya integral es

$$\sinh^{-1} f = \log y^e + c, \tag{78}$$

en que $c$ es una constante de integración. Sin embargo, $f = dx/dy = 0$ para $y = OA \equiv a$, lo cual determina la constante de integración. Tenemos entonces

$$\sinh^{-1} f = \log(\frac{y}{a})^e \tag{79}$$

de modo que, usando la definición de la funcion senh$(x)$, (i.e., $\sinh x = (\exp x - \exp(-x))/2$), obtenemos

$$f = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[(\left(\frac{y}{a}\right)^e - \left(\frac{a}{y}\right)^e\right]. \tag{80}$$

Integrando esta expresión obtenemos la forma paramétrica, $x(y)$, de la curva que sigue el perrito. Si $e \neq 1$ obtenemos,

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{e+1}}{a^e(e+1)} - \frac{y^{1-e}\,a^e}{(1-e)}\right] - \frac{a\,e}{e^2-1}, \tag{81}$$

en que el último término es la constante de integración que se fija por la condición $x = 0$ en $y = a$. De la misma manera, cuando $e = 1$ la integración de (80) nos da,

$$x = \frac{1}{4}\frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}\,a\,\log\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{a}{4}. \tag{82}$$

Recordamos que $e = v/u$ es el cuociente entre la velocidad del amo y del perrito. Por el significado de $e$, esperamos que el perrito pueda alcanzar a su amo solo si $e < 1$, i.e., solo si la rapidez del perrito es mayor que la rapidez del amo. Para comprobar ésto, analizaremos los tres casos posibles, i.e., $e = 1$, $e > 1$, y $e < 1$. Para determinar si el perrito alcanza a su amo debemos ver si la curva $C$ intercepta al eje $x$. En el caso $e = 1$, de (82) vemos que para $y = 0$, $x = \infty$, es decir el perrito no alcanza a su amo. Por otra parte, en el caso $e > 1$, de (81) vemos también que para $y = 0$ tenemos $x = \infty$, y así en este caso el perrito tampoco alcanza a su amo. Finalmente, si $e < 1$, obtenemos de (81) que cuando $y = 0$,

$$x = \frac{a\,e}{(1 - e^2)},$$

y el perrito se encuentra con su amo justo en esa posición.

# II. Curva de rumbo constante: "El Loxodromo".

Durante el siglo XVI hubo una rápida expansión de la navegación en Europa debida tanto a los viajes de exploración al Nuevo Mundo como a los extensos viajes a Asia relacionados con el comercio de las especies. Esta expansión, a su vez, motivó la introducción de numerosos avances en matemáticas que facilitaron el arte de la navegación. Uno de los países que mas contribuyó a estos avances a principios del siglo XVI fue Portugal. Un papel central en el desarrollo de los avances en navegación en Portugal fue jugado por el matemático **Pedro Nunes Salaciense** (n. 1502 en Alcácer do Sal; m. 1578 en Coimbra). Pedro Nunes ingresó en 1517 a la Universidad de Salamanca, por entonces uno de los mas importantes centros universitarios de Europa, graduándose en 1523. Ese mismo año contrajo matrimonio con Guiomar de Aires. Regresó a Portugal en 1527, y en 1537 fue nombrado "Cosmógrafo del Reino de Portugal" por el rey João III, siendo su obligación más importante el dar clases a los futuros navegantes. Ese mismo año publicó su libro "Tratado de Sphera", en el que desarrolló diversos resultados sobre la geometría de la esfera. Es en este libro que, entre otras cosas, introdujo las trayectorias de rumbo constante (i.e., el "loxodromo"). En 1542, Nunes publicó el libro "De Crepusculis", en el que calcula

el día de atardecer más corto como función de la posición geográfica (i.e., como función de la longitud y latitud de un lugar). En 1544 fue nombrado Profesor de Matemáticas en la Universidad de Coimbra. En 1566 fueron publicadas sus obras completas en Basilea, Suiza. Nunes es uno de los matemáticos más destacados de la historia de Portugal. Los trabajos de Nunes, en particular la introducción del "loxodromo", tuvieron importantes consecuencias en cartografía, en particular en la introducción de la proyección de Mercator, en la cual los loxodromos se representan como líneas rectas. Es interesante destacar el desarrollo acelerado de aplicaciones de las matemáticas en esa época. Por ejemplo, recién a fines del siglo XVI (1591) F. Vieta introdujo la notación moderna (que usamos hoy) de álgebra. También durante ese siglo se popularizó en Europa el uso de la notación decimal en aritmética (bajo la influencia de Simon Stevin). Recién a principios del siglo XVII fueron introducidos los logaritmos por Napier. Muchos de estos avances fueron impulsados por la necesidades que surgieron para mejorar el Arte de la Navegación.

## Ecuación de las curvas de rumbo constante sobre la esfera: "el loxodromo".

Dos de las trayectorias más importantes usadas en navegación para viajar entre dos puntos sobre la esfera terrestre son: i) segmentos de círculos máximos, que son las trayectorias de menor distancia entre dos puntos, y ii) los "loxodromos" (del griego **loxos**: oblícuo, y **dromos**: camino), que son las curvas de igual rumbo, es decir las trayectorias que cortan a los paralelos con la misma inclinación. Fueron estas últimas curvas las que fueron introducidas por Nunes en su "Tratado de Sphera" [1]. Vimos en clases que en coordenadas esféricas la velocidad de una partícula que se mueve en el espacio está dada por

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \rho\,\operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}. \tag{83}$$

Para trayectorias contenidas en una esfera de radio $R$, $\rho = R$, y $\dot{\rho} = 0$, y así, de (83) obtenemos,

$$\vec{v} = R\left(\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}\right). \tag{84}$$

Como la dirección de la velocidad es tangente a la trayectoria, podemos escribir la tangente a la trayectoria como $\hat{t} = \vec{v}/\|\vec{v}\|$. Así, de (84) obtenemos,

$$\hat{t} = \frac{\left(\dot{\theta}\hat{\theta} + \operatorname{sen}\theta\dot{\phi}\hat{\phi}\right)}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + (\operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi})^2}}. \tag{85}$$

Usando (85), podemos calcular el ángulo $\alpha$ entre la trayectoria y el meridiano, i.e., $\cos\alpha = \hat{t}\cdot\hat{\theta}$. De este modo obtenemos

$$\dot{\theta} = \cos\alpha\sqrt{\dot{\theta}^2 + (\operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi})^2}. \tag{86}$$

Elevando al cuadrado esta expresión y rearreglando los términos, finalmente obtenemos,

$$\tan\alpha\,\dot{\theta} = \operatorname{sen}\theta\,\dot{\phi}. \tag{87}$$

En la ecuación (87), $b = \tan\alpha$ es una constante, que depende del rumbo fijo que se sigue a lo largo del loxodromo. A partir de (87) podemos encontrar la ecuación del loxodromo, $\phi(\theta)$. Separando variables, dividiendo (87) por $\operatorname{sen}\theta$, encontramos

$$\dot{\phi} = b\frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{88}$$

e, integrando esta ecuación entre $t = 0$ y $t = T$ , obtenemos,

$$\int_0^T \dot{\phi}\,dt = b\int_0^T \frac{\dot{\theta}}{\operatorname{sen}\theta}\,dt. \tag{89}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, el lado izquierdo de (89) es igual a $\phi(T)-\phi(0)$. En tanto usando $\theta$ como variable en el lado derecho, obtenemos,

$$\phi(T) - \phi(0) = b\int_{\theta(0)}^{\theta(T)} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = -\log(\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotan}\theta)\,\Big|_{\theta(0)}^{\theta(\mathrm{T})}\ . \tag{90}$$

Es más simple expresar el argumento del logaritmo usando $\theta/2$. De hecho,

$$\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cotan}\theta = \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)}$$

Remplazando este resultado en (90) y éste a su vez en (89) al final encontramos la expresión del loxodromo como

$$\phi(T) = b\log\tan(\theta(T)/2) + a, \tag{91}$$

en que $a = \phi(0) - b \log \tan(\theta(0)/2)$ es una constante de integración.

**Comentario:** Para encontrar el loxodromo que une dos puntos sobre la tierra, basta poner la latitud y longitud del punto inicial y del punto final y exigir que ambos estén sobre la misma curva. Así, usando (91) para ambos puntos encontramos las constantes $a$ y $b$, y el loxodromo queda totalmente determinado.

**Ejemplo:** Para encontrar los parámetros $a$ y $b$ del loxodromo que une Nueva York (latitud $40,71°$ N, longitud $74,01°$ W), y Londres, (latitud $51,52°$ N, longitud $0,13°$ W), usamos (91) con

$$\theta_{NY} = (90 - 40,71)° = 0,860\,\text{rads}, \qquad \phi_{NY} = -1,292\,\text{rads}, \qquad \tan(\theta_{NY}/2) = 0,459.$$

y

$$\theta_L = (90 - 51,52)° = 0,672\,\text{rads}, \qquad \phi_L = -0,002\,\text{rads}, \qquad \tan(\theta_L/2) = 0,349.$$

(recordemos que el ángulo $\theta$ en esféricas se mide a partir del Polo Norte, en cambio la latitud está medida desde el Ecuador). Usando este par de puntos en 91) encontramos,

$$-1,292 = -0,779\,b + a,$$

y

$$-0,002 = -1,053\,b + a,$$

respectivamente, de donde obtenemos en particular que

$$\tan\alpha = b = -4,717,$$

y luego $\alpha = -1,362\,\text{rads} = -78,03°$. De modo que hay que mantener el curso formando un ángulo de $\approx 78°$ con el meridiano. (Pueden visitar el calculador náutico en el sitio WEB: http://koti.mbnet.fi/jukaukor/loxodrom.html).

**Referencias, Comentarios y Notas Bibliográficas sobre el loxodromo:**

[1] P. Nunes, **Tratado da Sphera**, Lisboa, 1537.

[2] El sitio WEB, http://www.erikdeman.de/html/sail022d.htm, contiene información interesante sobre la relación entre los loxodromos y la proyección de Mercator. Contiene también una calculadora para calcular distancias a lo largo de un loxodromo y a lo largo de un círculo máximo.

[3] Para más información sobre las curvas de rumbo constante ver la página WEB: http://en.wikipedia.org/wiki/Rhumb_line.

[4] En el plano ($\mathbb{R}^2$) y sobre el manto del cilindro las curvas de rumbo constante coinciden con las curvas de mínima distancia (geodésicas), pero sobre la superficie de la esfera ($\mathbb{S}^2$) las geodésicas (círculos máximos) y las curvas de igual rumbo no coinciden.

## Referencias


[1] Benguria, R.D. y Depassier, M.C., **Problemas Resueltos de Mecánica Clásica**, Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile, 1995.

[2] Dugas, René, **A history of mechanics**, Dover, NY, 1988.

[3] William Thomson (Lord Kelvin) y Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy, Part I and II*. Cambridge University Press, Cambridge, 1903/1923

[4] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Huygens.html