Momentum Lineal

1. SISTEMA DE N PARTICULAS

Consideremos ahora un sistema de n partículas. Cada una de las partículas del sistema está rotulada por su masa y por su vector posición. Llamaremos m_i a la masa de la partícula i y $\vec{r}_i$ a su posición. Las partículas del sistema interactúan entre sí y también interactúan con el medio externo. Si llamamos $\vec{F}_{i,j}$ a la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i, y $\vec{F}_{i,ext}$ a la fuerza que ejerce el medio externo sobre la partícula i, tendremos que la fuerza total sobre la partícula i está dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{i,ext}. \tag{1}$$

Si llamamos $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ a la velocidad de la partícula i, su momentum está dado por $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, y de acuerdo a la segunda Ley de Newton, su ecuación de movimiento está dada por

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i. \tag{2}$$

Si sumamos (2) en i, desde $i = 1$ hasta $i = n$, y recordamos la Ley de Acción y Reacción en forma débil (i.e., $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,ext} \equiv \vec{F}_{ext}. \tag{3}$$

Dada la estructura de la ecuación (3), conviene definir el **Centro de Masa** del sistema, a traves de su vector posición

$$\vec{R}_{\rm CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \tag{4}$$

en que $M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i$ representa la masa total del sistema. Consistentemente llamaremos

$$\vec{P}_{\rm cm} \equiv M \frac{d}{dt} \vec{R}_{\rm CM}. \tag{5}$$

Con estas definiciones la ecuación (3) toma la forma simple

$$\frac{d\vec{P}_{\rm cm}}{dt} = \vec{F}_{\rm ext}. \tag{6}$$

La interpretación de esta ecuación es muy simple: el centro de masa del sistema se mueve como si fuera una partícula sometida a una fuerza equivalente a la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sistema. Así pues, si lanzamos una silla por el aire, a pesar que la silla realizará un movimiento de rotación relativamente complicado, su centro de masa describirá una simple parábola.

2. Sistemas de dos partículas

En esta sección consideraremos varios sistemas de dos partículas en los que la conservación del momentum lineal juega un papel importante.

"Explosión" de un sistema de dos resortes: El primer sistema que consideraremos es el de dos bloques de masa m_1 y m_2 que inicialmente están en reposo, unidos por un resorte de constante elástica k descansando sobre una mesa horizontal lisa (i.e., sin roce). Inicialmente el resorte está comprimido en δ. Las masas no está adherido a las masas, asi es que cuando el resorte pasa por su largo natural las masas se sueltan del resorte. Queremos determinar con que velocidad salen las masas disparadas una vez que se suelta el sistema. Este es un sistema unidimensional. Como no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, se conserva el momentum total del sistema, el cual era originalmente cero, pues el sistema estaba en reposo. Llamemos v_1 y v_2 las velocidades finales de cada uno de los bloques respectivamente (consideradas positivas hacia la derecha). Después de soltar el sistema, su momentum final está dado por

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \tag{7}$$

por conservación del momentum lineal. Como no hay roce se conserva la energía del sistema. Originalmente la energía total del sistema es solo la energía potencial del resorte, i.e.,

$$E_i = \frac{1}{2} k \delta^2, \tag{8}$$

pues inicialmente los bloques están en reposo. En el estado final, la energía potencial del resorte es nula, así que la energía final es la suma de las energías cinéticas de los dos bloques, i.e.,

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \tag{9}$$

Usando entonces conservación de energía, i.e., que $E_i = E_f$, de (8) y (9) obtenemos,

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = k \delta^2. \tag{10}$$

Finalmente de las ecuaciones (7) y (10) obtenemos,

$$v_1 = \pm \sqrt{k\mu} \frac{\delta}{m_1} \tag{11}$$

y

$$v_2 = \mp \sqrt{k\mu} \frac{\delta}{m_2} \tag{12}$$

respectivamente. Aquí, introdujimos el parámetro μ que está dado por

$$\mu = \frac{m_1 \, m_2}{m_1 + m_2} \tag{13}$$

o, equivalentemente por

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

El parámetro μ tiene unidades de masa, se conoce como la "masa reducida", y es muy útil en problemas que involucran a dos partículas.

Niño caminando en un bote, inicialmente adosado al borde de una laguna: Consideremos el sistema de la figura, en que un bote de largo L está adosado al borde de un muelle, como se indica en la figura. Un niño se encuentra en el extremo opuesto del bote (i.e., a distancia L del muelle). El niño se pone a caminar sobre el bote desde un extremo al otro. ¿Cuando el niño llega justo al otro extremo (al extremo más cerca del muelle), cuán separado del muelle se encuentra el sistema bote–niño?

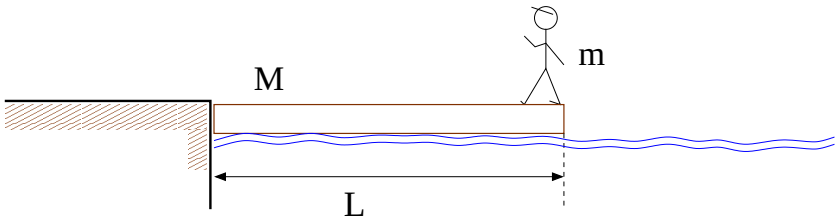


Figura 1: Sistema Balsa–Niño adosado al muelle

Suponiendo que no hay fuerza horizontal sobre el Sistema Balsa–Niño, y que el sistema está detenido inicialmente, la posición del centro de masa del Sistema se mantiene. Si medimos las posiciones del Centro de Masa de la Balsa (digamos x_B) y del niño (digamos x_n) a partir del borde del muelle (hacia la derecha en la figura), tenemos que inicialmente

$$x_B = \frac{L}{2},$$

y

$$X_n = L,$$

de modo que la posición (horizontal) inicial del centro de masa del Sistema Balsa–Niño estará dada por,

$$X_{\rm CM} = \frac{ML/2 + mL}{M + m}. \tag{14}$$

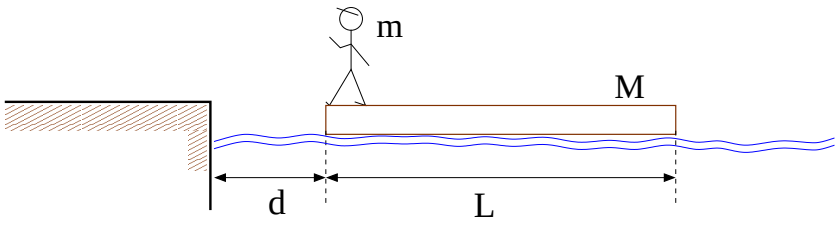


Figura 2: Sistema Balsa–Niño luego del movimiento del niño

Por otra parte, cuando el niño ha caminado y se detiene al otro lado del bote, tendremos (ver figura)

$$x_B = d + \frac{L}{2},$$

y

$$X_n = d.$$

Entonces, la posición del centro de masa del Sistema estará dada por,

$$X_{\rm CM} = \frac{M(d + L/2) + md}{M + m}. \tag{15}$$

Igualando los lados derechos de (14) y (15) obtenemos,

$$ML/2 + mL = M(d + L/2) + md,$$

de donde finalmente despejamos,

$$d = \frac{m}{m + M} L.$$

3. Choque entre dos partículas

En esta sección consideraremos la colisión entre dos partículas. Para empezar consideraremos el choque de dos cuerpos en una dimensión, y luego veremos colisiones en el plano. Consideremos pues dos cuerpos que se desplazan a lo largo de una misma línea recta. Llamemos m_1 y m_2 a las masas de los cuerpos. En el caso de un choque, las fuerzas internas entre los cuerpos que chocan (fuerzas normales o de reacción entre los cuerpos) son muy grandes comparadas con las posibles fuerzas (e.g., el peso) que actúan sobre ellas. Además el choque ocurre en un tiempo muy breve. Así pues podemos despreciar la acción de cualquier fuerza externa sobre las partículas. Como solo consideraremos las fuerzas de reacción interna entre los cuerpos que chocan, el momentum lineal total del sistema se conserva durante el choque, i.e., el momentum lineal total justo antes del choque es igual al momentum lineal total del sistema justo después del choque.

Como discutiremos primero choques unidimensionales, todas las cantidades como velocidades y momenta que consideraremos son escalares.

Llamemos v_1 y v_2 a las velocidades de las partículas de masa m_1 y m_2 respectivamente, justo antes del choque. Por su parte, llamemos v_1' y v_2' a las velocidades de las mismas partículas justo después del choque. Como hemos argumentado, el momentum lineal del sistema de dos partículas se conserva, de modo que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{16}$$

A partir de ete punto distinguiremos dos tipos de colisiones *elásticas* e *inelásticas*. Diremos que un choque es elástico si se conserva la energía cinética del sistema durante el choque. De lo contrario diremos que la colisión es inelástica.

Veamos primero las colisiones elásticas.

En términos de las variables que introdujimos más arriba, la conservación de energía cinética durante el choque se expresa como

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2. \tag{17}$$

El sistema (16), (17) es un sistema de dos ecuaciones algebraicas para las incógnitas v_1', v_2' que son las velocidades de los cuerpos justo después del choque. La forma más simple de resolver este sistema consiste en reescribir las dos ecuaciones anteriores, de modo que todas las cantidades que involucran a una misma partícula se encuentren al mismo lado de cada ecuación, es decir

$$m_1(v_1 - v_1') = -m_2(v_2 - v_2'), \tag{18}$$

y

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = -m_2(v_2^2 - v'^2_2), \tag{19}$$

respectivamente. Nótese que hemos simplificado el factor $1/2$ en la última ecuación. Ahora podemos dividir la ecuación (19) por la ecuación (18). Al dividir debemos tener en consideración dos posibilidades. O el factor $v_1 - v_1' = 0$ (y por lo tanto lo mismo ocurre con el término análogo que atañe a la partícula 2), ó es diferente de cero. Dicho factor es cero cuando las dos partículas en efecto no colisionan (porque una no alcanza a la otra), y por lo tanto las velocidades de cada una de ellas no cambia. Por lo tanto, si efectivamente ocurre la colisión, el factor en cuestión es no nulo, y lo podemos simplificar al dividir, de modo que obtenemos

$$v_1 + v_1' = +(v_2 + v_2'). \tag{20}$$

Podemos reescribir esta última ecuación como

$$v_2 - v_1 = -(v_2' - v_1'). \tag{21}$$

La cantidad $|v_2 - v_1|$ representa la rapidez relativa de la partícula 2 con respecto a la partícula 1. Podemos interpretar entonces (21) como la conservación de la rapidez relativa entre las partículas durante el choque. Finalemente resolvemos (18) y (19) para v_1' y v_2' (estas son ahora dos ecuaciones lineales). Resolviendo obtenemos,

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{22}$$

y

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \tag{23}$$

respectivamente.

Comentarios:

i) Uno puede concluir de inmediato a partir de estas dos expresiones que si las masas de las partículas son iguales (i.e., si $m_1 = m_2$), entonces las partículas durante el choque intercambian sus velocidades, i.e., $v_2' = v_1$ y $v_1' = v_2$ respectivamente.

ii) También uno puede comprobar de (22) y (23), que de acuerdo a la intuición, si 2 está en reposo originalmente y es mucho mas masiva que 1 (i.e., $m_2 \gg m_1$), entonces 2 sigue en reposo después del choque y m_1 invierte su velocidad, i.e., $v_1' = -v_1$. Esto es lo que ocurre, por ejemplo cuando una partícula choca contra una pared.

3.1. Choque plástico en una dimensión

En la sección anterior hemos resuelto completamente el choque elástico en una dimensión. Antes de analizar los choques inelásticos en general conviene discutir otro caso extremo, que se conoce como *choque plástico*. En el choque plástico ambas partículas quedan pegadas (i.e., siguen juntas) después del choque. En este tipo de choques no se conserva la energía. De hecho es muy simple calcular la perdida de energía.

Como en la sección anterior, consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 respectivamente que se mueven a lo largo de la misma línea, con velocidades v_1 y v_2 respectivamente. Llamemos v_f a la velocidad común de las partículas justo después del choque. Aplicando conservación del momentum lineal, del sistema tenemos

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f. \tag{24}$$

Entonces, la velocidad v_f está dada por

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{25}$$

La energía cinética inicial es

$$K_i = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right), \tag{26}$$

en tanto que la energía cinética después del choque está dada por

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right)^2}{m_1 + m_2}. \tag{27}$$

La pérdida de energía cinética durante el choque, $\Delta K = K_i - K_f$, queda dada por

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2. \tag{28}$$

La cantidad $\mu \equiv m_1 m_2/(m_1+m_2)$ aparece a menudo en sistemas de dos partículas y se conoce como la *masa reducida* del sistema. Por otra parte $v_r \equiv v_2 - v_1$ es la velocidad relativa entre las partículas antes del choque. En términos μ y v_r, la pérdida de energía se expresa simplemente como

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu v_r^2. \tag{29}$$

Esta pérdida de energía se transforma en un cambio de la energía interna del sistema (e.g., deformaciones de los cuerpos) o simplemente se disipa en forma de calor.

3.2. Choque inelástico en una dimensión: coeficiente de restitución

En un choque inelástico se conserva el momentum lineal pero hay pérdida de energía. Llamemos Q a la pérdida de energía cinética durante el choque.

Usaremos la misma notación que al principio del capítulo. Entonces, la conservación del momentum lineal queda expresada por (16) en tanto que el balance de energía toma ahora la forma

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2=\frac{1}{2}m_1{v_1'}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2'}^2+Q, \tag{30}$$

donde, como hemos dicho, Q representa la energía cinética perdida en el choque. Si $Q=0$, el choque es elástico, si $Q>0$, como suele suceder, parte de la energía cinética se pierde en el choque, en forma de calor o en un aumento de la energía interna del sistema. El momentum se conserva debido a que durante el choque no actúan fuerzas externas, ésto implica que el momentum del centro de masa de las partículas se conserva. Por esto conviene introducir como variables la velocidad del centro de masa (CM) y la velocidad relativa de las partículas. La velocidad del centro de masas es

$$V_{CM}\equiv\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_1'+m_2v_2'}{m_1+m_2}, \tag{31}$$

en que la última igualdad sigue de la conservación del momentum lineal. Por otra parte las velocidades relativas de las partículas, antes y despues del choque son,

$$v_r\equiv v_1-v_2 \tag{32}$$

y

$$v_r'=v_1'-v_2', \tag{33}$$

respectivamente.

Mediante álgebra elemental encontramos que,

$$v_1=V_{CM}+\frac{m_2}{m_1+m_2}v_r,$$

y

$$v_2=V_{CM}-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_r.$$

De la misma forma, después del choque,

$$v_1'=V_{CM}+\frac{m_2}{m_1+m_2}v_r',$$

y

$$v_2'=V_{CM}-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_r'.$$

Utilizaremos estas expresiones para las velocidades de las partículas en la ecuación (2) para el balance de enrgía cinética. Un cálculo directo nos muestra que

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2=\frac{1}{2}MV_{CM}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}v_r^2,$$

donde $M=m_1+m_2$, y una expresión análoga vale después del choque. Entonces la ecuación (2) se escribe como

$$\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}v_r^2=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}{v'}_r^2+Q$$

o, lo que es lo mismo,

$$v_r^2 = {v'}_r^{\,2} + \frac{2MQ}{m_1 + m_2}$$

que es la expresión que buscábamos. Si el choque es elástico, $Q = 0$ y las velocidades relativas de las partículas son iguales antes y después del choque. Si el choque es inelástico y se pierde energía cinética, $Q > 0$ y

$$|v'_r| < |v_r|. \tag{34}$$

El *coeficiente de restitución*, e, se define como el cuociente

$$e \equiv \frac{|v'_r|}{|v_r|}. \tag{35}$$

De acuerdo a (34) y a la definición del coeficiente de restitución, $0 \leq\leq 1$. El caso $e = 1$ corresponde al choque elástico, en tanto que el caso $e = 0$ corresponde al choque plástico.

4. Choque elástico en dos dimensiones.

En esta sección vamos a considerar una caso especial de choque elástico en dos dimensiones. Vamos a estudiar el choque de una partícula móvil, que llamaremos proyectil, contra un blanco fijo.

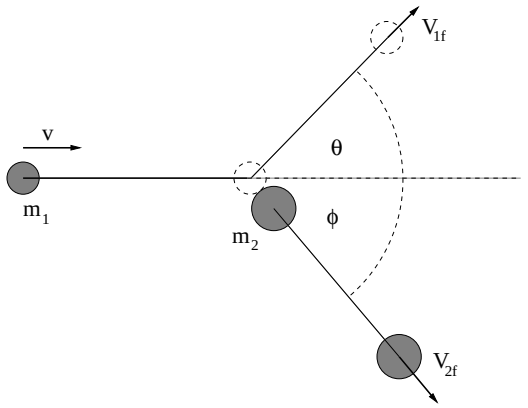


Figura 3: Choque elástico en dos dimensiones

Consideremos entonces el sistema de la figura, en que el proyectil, de masa m_1 y velocidad v incide sobre un blanco fijo de masa m_2. Llamemos, v_{1f} y v_{2f} las magnitudes de las velocidades del proyectil y del blanco, respectivamente, después del choque. Llamemos también θ al angulo, medido con respecto a la dirección inicial del movimiento del proyectil, con que emerge el proyectil luego del choque. Finalmente llamemos ϕ al ángulo con que emerge el blanco, medido también con respecto a la línea de incidencia del proyectil. Tenemos entonces

cuatro variables que determinar, i.e., las dos velocidades y los dos ángulos. Tres de estas cantidades quedan determinadas por consideraciones cinemáticas: la conservación de momentum lineal y la conservación de la energía cinética. La cuarta incógnita quedará determinada por las características específicas de la interacción entre las partículas en el momento del choque. Empecemos por imponer las leyes de conservación. Si elegimos ejes coordenados cartesianos en el plano, con el eje x coincidiendo con la dirección incidente del proyectil, y el origen coincidiendo con la posición inicial del blanco fijo (ver figura)

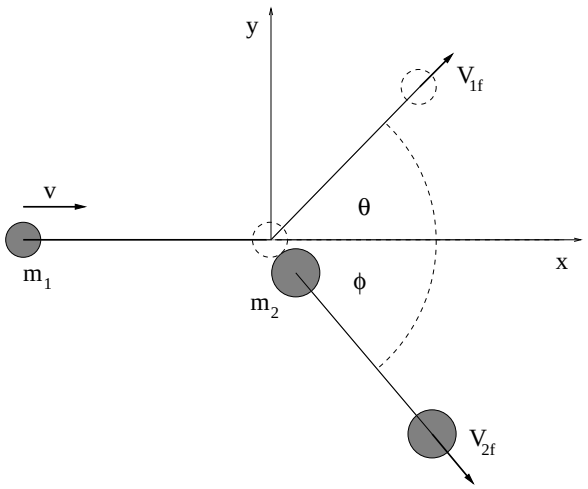


Figura 4: Choque elástico en dos dimensiones

Usando estas coordenadas, las leyes de conservación del momentum lineal se pueden expresar del modo siguiente: i) la conservación del momentum lineal a lo largo del eje x queda dada por

$$m_1 v = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi. \tag{36}$$

ii) La conservación del momentum a lo largo del eje y se expresa como

$$0 = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{2f} \operatorname{sen}\phi. \tag{37}$$

Como el choque es elástico, se conserva la energía cinética y así tenemos,

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \tag{38}$$

Antes de proseguir, es conveniente usar parámetros adimensionales, que permiten simplificar un poco los cálculos. Usaremos la velocidad del proyectil como unidad de velocidad y la masa del proyectil como unidad de masa. Así, definiremos

$$u = \frac{v_{1f}}{v}, \tag{39}$$

$$w = \frac{v_{2f}}{v}, \tag{40}$$

y

$$r = \frac{m_2}{m_1}. \tag{41}$$

Comentario: Este proceso de expresar las variables del problema en unidades que son propias del sistema que uno está considerando es usado frecuentemente en física e ingeniería.

En términos de las nuevas variables las tres leyes de conservación discutidas más arriba toman la forma, un poco rearreglada,

$$u\,\cos\theta = 1 - r\,w\,\cos\phi, \tag{42}$$

$$u\,\operatorname{sen}\theta = r\,w\,\operatorname{sen}\phi, \tag{43}$$

y

$$1 = u^2 + r\,w^2, \tag{44}$$

respectivamente.

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones para encontrar las cuatro incógnitas del problema, u, w, θ y ϕ. La cuarta ecuación, como hemos dicho anteriormente, proviene de la dinámica misma del choque. Nuestra estrategia aquí será resolver (42), (43) y (44) para las variables u, w, y θ en términos de ϕ. Dividiendo (43) por (42) obtenemos

$$\tan\theta = \frac{r\,w\,\operatorname{sen}\phi}{1 - r\,w\,\cos\phi} \tag{45}$$

y así hemos despejado θ en términos de w y de ϕ. Por otra parte, si tomamos el cuadrado de (42), luego el cuadrado de (43) y los sumamos, obtenemos

$$u^2 = 1 + r^2\,w^2 - 2\,r\,w\,\cos\phi. \tag{46}$$

Ahora podemos combinar (44) y (46) para deshacernos de u y, de este modo, obtener una ecuación que solo contiene a w:

$$r(1+r)w^2 - 2\,r\,w\cos\phi = 0. \tag{47}$$

Esta última ecuación es una ecuación cuadrática para la variable w en términos de ϕ. Admite dos soluciones, $w = 0$ (que corresponde en realidad al caso en que el proyectil no impacta al blanco, i.e., que no hay choque), y

$$w = \frac{2\,\cos\phi}{(1+r)}. \tag{48}$$

Una vez determinado w, por medio de (48), podemos determinar facilmente u y θ, por medio de (44) y (45) respectivamente. En efecto, reemplazando w dado por (48) en (44), obtenemos,

$$u = \frac{1}{1+r}\sqrt{(1+r)^2 - 4r\cos^2\phi}. \tag{49}$$

Luego, reemplazando w en (45), obtenemos,

$$\tan\theta = \frac{2\,r\,\cos\phi\,\operatorname{sen}\phi}{1 + r - 2r\cos^2\phi}. \tag{50}$$

Comentarios:

i) Si las masas del proyectil y del blanco son iguales, i.e., si $r = 1$, las soluciones posibles dadas por (48) son: a) $w = 0$, y b) $w = \cos\phi$. La primera solución corresponde a la ausencia de choque. La solución $w = \cos\phi$ es la solución general en este caso. Reemplazando este valor de w en (44), determina $u = \operatorname{sen}\phi$. Finalmente, de (45) obtenemos $\tan\theta = \cot\phi$, lo que a su vez implica

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}, \tag{51}$$

es decir, si las dos partículas tienen la misma masa y el choque es elástico, las trayectorias de las partículas que emergen del choque forman un ángulo recto.

ii) Usando que $0 \leq \cos^2\phi \leq 1$, sigue de (49) que

$$\left|\frac{1-r}{1+r}\right| \leq u \leq 1.$$

iii) En el caso que $r < 1$, i.e., que el proyectil es más masivo que el blanco, maximizando el lado derecho de (50) con respecto a ϕ se puede demostrar que

$$\tan\theta \leq \tan\theta_{\max} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

5. Choque de esferas, o de discos duros

Como discutimos en la sección anterior, las leyes de conservación solo permiten determinar tres de las cuatro variables que caracterizan un choque en dos dimensiones. Para determinar completamente el resultado de un choque es necesario considerar el detalle de la interacción entre los cuerpos que chocan. Eso haremos en esta sección, para un caso muy especial de choques que son los choques entre discos duros o entre esferas duras (los típicos choques importantes en el billar).

En la figura hemos dibujado dos discos duros, el proyectil de radio R_1 y el blanco de radio R_2. Llamemos *línea de impacto* a la recta paralela a la velocidad incidente del proyectil, que pasa por el centro del dico "blanco". Se llama *parámetro de impacto* a la distancia entre la trayectoria actual del proyectil y la línea de impacto. En la figura hemos designado por b al parámetro de impacto.

Nuestro propósito es determinar el ángulo ϕ con que emerge el blanco luego del choque, en términos del parámetro de impacto. Dada la discusión de la sección anterior, una vez determinado ϕ, tenemos determinadas todas las demás cantidades después del choque.

En el instante en que se produce el choque, los discos interactúan entre ellos por medio de la normal N, que es perpendicular al plano de contacto. En la figura siguiente hemos dibujado en detalle el instante en que se produce el choque. Como la única fuerza que experimenta el "blanco" es la normal N, y como antes del choque éste se encontraba en reposo, el momentum final del blanco estará dirigido a lo largo de la normal. Entonces podemos calcular el ángulo ϕ a partir de simple trigonometría del triángulo OPQ de la figura.

Así obtenemos,

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{b}{R_1 + R_2}. \tag{52}$$

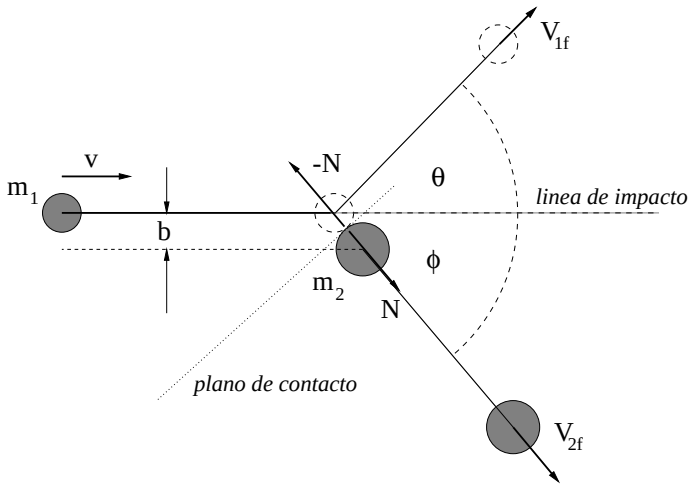


Figura 5: Choque de discos duros en dos dimensiones

Comentario: Para una descripción mas general de los choques en dos dimensiones, incluyendo la descripción de los choques en los sistemas *de Laboratorio* y de *Centro de Masa* se puede encontrar en [2], Capítulo 4, Secciones 16 y 17 (pp. 49–57).

6. Sistemas de Masa Variable

Consideremos un vagón de masa M que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal lisa (i.e., no hay roce entre el vagón y el suelo). Sobre el vagón se encuentra un niño de masa m. El sistema (vagón más niño) se encuentra originalmente en reposo. Supongamos ahora que el niño se pone a correr sobre el vagón hacia la izquierda con valocidad u (relativa al vagón) y salta de éste. ¿con qué velocidad se mueve finalmente el carro?

Como sobre el sistema carro–niño no actúan fuerzas externas a lo largo de la horizontal (aquí las únicas fuerzas externas sobre el sistema son el peso del carro y del niño, y la reacción de la superficie horizontal sobre el carro, y todas estas fuerzas externas están dirigidas a lo largo de la vertical), se conserva el momentum total del sistema a lo largo de la horizontal.

El momentum total del sistema, digamos P, es la suma del momentum del carro, digamos p_c, más el momentum del niño, digamos p_n, y como el sistema estaba inicialmente en reposo y el momentum se conserva,

$$P = p_c + p_n = 0. \tag{53}$$

Ahora,

$$p_c = M\, v. \tag{54}$$

Para calcular el momentum del niño es necesario calcular la velocidad del niño respecto al suelo. Por composición de velocidades,

$$v_{\mathrm{n/s}} = v_{\mathrm{n/c}} + v_{\mathrm{c/s}}, \tag{55}$$

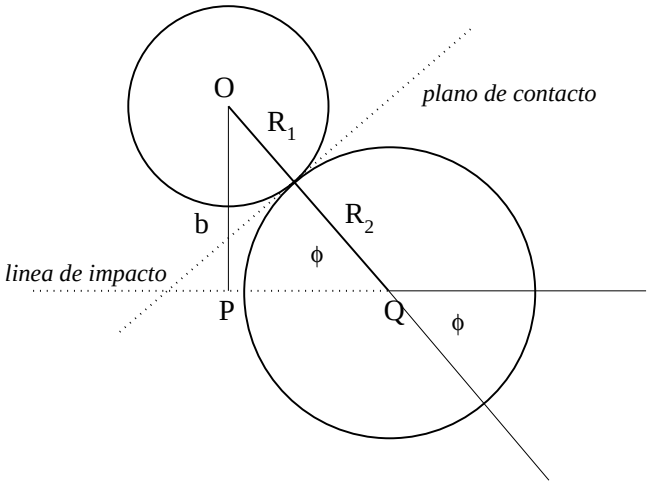


Figura 6: Choque de discos duros en dos dimensiones (detalle).

i.e., la velocidad del niño con respecto al suelo (que hemos denominado por $v_{\mathrm{n/s}}$) es igual a la suma de la velocidad del niño con respecto al carro ($v_{\mathrm{n/c}}$) más la velocidad del carro con respecto al suelo (i.e., $v_{\mathrm{c/s}}$). Aquí, $v_{\mathrm{n/c}} = -u$, y $v_{\mathrm{c/s}} = v$. Reemplazando en (55) tenemos entonces,

$$v_{\mathrm{n/s}} = -u + v, \tag{56}$$

y por lo tanto $p_n = m(v - u)$. Usando este resultado y la ecuación (54) en (53) tenemos,

$$M, v + m\,(v - u) = 0, \tag{57}$$

de donde finalmente obtenemos,

$$v = \frac{m}{m + M}\, u. \tag{58}$$

Ahora podemos complicar el problema y estudiar el movimiento de una carro que es impulsado por N niños de la misma masa m que saltan del carro. Vamos a estudiar dos situaciones diferentes, la primera en que todos los niños saltan (con rapidez u relativa al carro) a la vez, y la segunda en que van saltando uno por uno.

La primera situación es idéntica a la que acabamos de discutir, pero reemplazando en todas las ecuaciones anteriores m por $N\,m$. Así, si los N niños saltan juntos, la velocidad final del carro, digamos $\tilde{v}$, será,

$$\tilde{v} = \frac{N\,m}{N\,m + M}\, u. \tag{59}$$

Ahora hagamos el caso secuencial, i.e., en que los niños van saltando uno a la vez. De nuevo, es simple calcular la velocidad del carro después que salta el primer niño, pues este caso corresponde al resultado obtenido en (58), pero con la masa del carro igual a $M + (N-1)\,m$ (i.e., lo que queda después del salto del

primer niño es el carro más los otro $N-1$ niños. Así, usando (58), la velocidad v_1 del carro depués del primer salto será,

$$v_1 = \frac{m}{N\,m + M}\,u. \tag{60}$$

Después de este primer salto, el momentum del sistema restante (i.e., el carro más los otro $N-1$ niños) está dado por,

$$P = ((N-1)m + M)v_1, \tag{61}$$

y, por el mismo razonamiento hecho al principio, este momentum debe conservarse en el proceso en que salta el segundo niño. Procediendo exactamente como hicimos al comienzo, tendremos.

$$((N-1)m + M)v_1 = P = m(v_2 - u) + (M + (N-2)\,m)v_2, \tag{62}$$

en que ahora v_2 es la velocidad del carro más los restantes $N-2$ niños luego del salto del segundo niño. Despejando v_2 de (62) obtenemos,

$$v_2 = v_1 + \frac{m}{M + (N-1)\,m}u = \left(\frac{m}{M + N\,m} + \frac{m}{M + (N-1)\,m}\right)\,u. \tag{63}$$

Podemos seguir procediendo de la misma manera luego de cada uno de los saltos de los niños, y luego que salte el último, la velocidad final del carro será,

$$v_f = \left(\frac{m}{M + N\,m} + \frac{m}{M + (N-1)\,m} + \frac{m}{M + (N-2)\,m}\ldots + \frac{m}{m + M}\right)\,u. \tag{64}$$

Es simple mostrar que la velocidad final que adquiere el carro cuando los niños saltan en forma secuencial, i.e., v_f, es mayor que la velocidad cuando todos saltan al mismo tiempo, i.e., $\tilde{v}$. Esto sigue de inmediato al comparar (59) y (64). De hecho, cada uno de los N términos de (64) satisface,

$$\frac{m}{M + (N-k)\,m} > \frac{m}{M + N\,m},$$

en que $k = 0, \ldots, N-1$.

6.1. La ecuación del cohete

Uno de los sistemas de masa variable más típicos es el cohete, que es una versión continua del sistema discreto del carro propusaldo por los niños de la sección anterior. Consideremos un cohete de masa M que es impulsado por combustible líquido que es expelido con una velocidad relativa u con repsecto al cohete. Para efecto de esta discusión suponemos que el movimiento ocurre en una dimensión en ausencia de fuerzas externas. En la figura ilustramos la situación del cohete en el instante t. En ese instante tiene masa M, velocidad v y está a punto de expeler una cantidad Δm de combustible.

El momentum del sistema *cohete–combustible* en ese instante está dado entonces por

$$P(t) = (M + \Delta m)v. \tag{65}$$

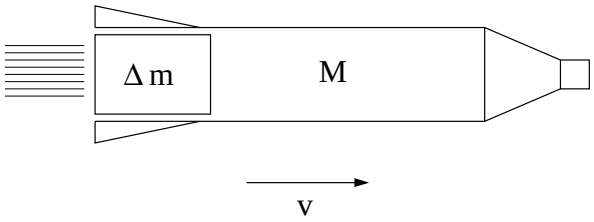


Figura 7: Diagrama del cohete en el instante t, justo antes de desprenderse del combustible Δm

En la segunda figura, ilustramos el sistema *cohete–combustible* justo después (en el instante $t + \Delta t$) en que el cohete se ha desprenido de una cantidad de combustible Δm, la cual ha sido expelida con velocidad u relativa al cohete (por convención hemos tomado todas las velocidades como positivas hacia la derecha; en la práctica como el combustible es expelido hacia atrás, la velocidad relativa u es negativa).

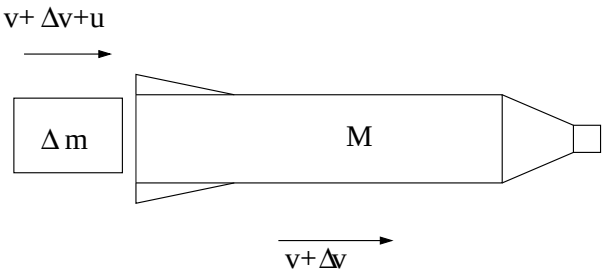


Figura 8: Diagrama del cohete en el instante $t + \Delta t$, justo después de desprenderse del combustible Δm

El momentum del sistema *cohete–combustible* en el instante $t+\Delta t$ está dado entonces por

$$P(t+\Delta t) = M(v+\Delta v)+\Delta m(v+\Delta v+u) \approx M\,v+M\Delta v+\Delta m\,v+\Delta m\,u \quad (66)$$

(en que hemos descartado el término de segundo orden $\Delta m\,\Delta v$). Si sobre el sistema *cohete–combustible* no actúan fuerzas externas su momentum se conserva, de modo que $P(t) = P(t + \Delta t)$, y así, igualando los lados derechos de (65) y (66) obtenemos,

$$(M + \Delta m)v. = M\,v + M\Delta v + \Delta m\,v + \Delta m\,u, \quad (67)$$

de donde obtenemos que

$$M\Delta v + \Delta m\,u \approx 0. \quad (68)$$

Dividiendo esta expresión por Δt y tomado el límite $\Delta t \to 0$ (el término de segundo orden se cancela) y obtenemos a partit de (69) que

$$M\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}\,u = 0. \quad (69)$$

Por conservación de masa del sistema, tenemos que

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{dm}{dt}.$$

Reemplazando ésta relación en (69), y dividiendo el resultado por M, obtenemos finalmente que,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\,u = \frac{d\log M}{dt}u. \tag{70}$$

Integrando ambos lados de (70) en el tiempo, entre $t = 0$ y t, usando el Teorema Fundamental del Cáculo, obtenemos

$$v(t) - v(0) = u(\log M(t) - \log M(0)) = -u\log\frac{M(0)}{M(t)}. \tag{71}$$

Si la condición inicial para la velocidad del cohete es $v(0) = 0$, entonces en t el cohete va a tener la valocidad

$$v(t) = -u\log\frac{M(0)}{M(t)}. \tag{72}$$

Nótese que la masa inicial del cohete, $M(0)$ es mayor que la masa del cohete mas tarde, i.e., $M(0) > M(t)$. Entonces de (72) vemos que, como era de esperar la velocidad del cohete, tiene signo opuesto a la velocidad relativa de escape de los gases.

Podemos utilizar (72) para encontrar la velocidad del cohete una vez agotado todo el combustible. Llamemos M_a a la masa del armazón (estructura) del cohete, y M_1 a la masa de combustible inicial. Si el cohete tiene velocidad inicial $v(0) = 0$, su velocidad final, después de haber quemado todo el combustible será,

$$v_f = -u\log\frac{M_a + M_1}{M_a} = -u\log\left(1 + \frac{M_1}{M_a}\right). \tag{73}$$

Esta ecuación se conoce usualmente como *Ecuación de Tsiolkovsky.*

6.2. El cohete de dos etapas

Con el objeto de alcanzar mayores velocidades finales de un cohete es conveniente utilizar cohetes de varias etapas. En la figura ilustramos el caso de un cohete de dos etapas. Al inicio del vuelo del cohete suponemos que tiene velocidad 0, y dos cuerpos, de masas de estructura M_a y M_b y de combustible M_1 y M_2 respectivamente. La masa inicial de todo el cohete es $M_a + M_b + M_1 + M_2$.

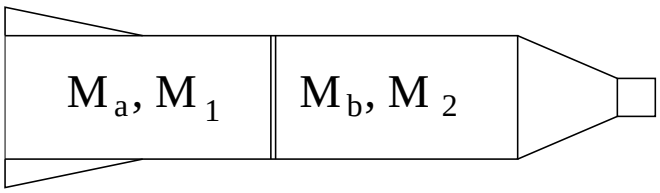


Figura 9: Diagrama de un cohete de dos etapas

Después de quemar todo el combustible, M_1 de la primera etapa, el cohete tiene una masa $M_a + M_b + M_2$, y usando la ecuación (71), su velocidad (digamos v_1) después de esta etapa está dada por

$$v_1 = -u \log \left(1 + \frac{M_1}{M_a + M_b + M_2} \right). \tag{74}$$

Luego el cohete bota la armadura M_a (simplemente la suelta), e inicia la segunda etapa. La velocidad inicial de la segunda etapa es precisamente v_1 (i.e., la velocidad final alcanzada en la primera etapa). En tanto que la masa inicial de esta segunda etapa es $M_b + M_2$ y su masa final (luego de haber quemado todo el combustible M_2) es simplemente M_b. Usando (71), la velocidad final del cohete luego de la segunda etapa (digamos v_2) estará dada por,

$$v_2 = v_1 - u \log \left(1 + \frac{M_2}{M_b} \right), \tag{75}$$

y, finalmente, reemplazando la expresión para v_1 obtenida en (74) en la ecuación (75) finalmente obtenemos,

$$v_2 = -u \log \left[\left(1 + \frac{M_1}{M_a + M_b + M_2} \right) \left(1 + \frac{M_2}{M_b} \right) \right]. \tag{76}$$

Esta es la velocidad final que alcanza el cohete después de las dos etapas.

Un ejemplo de un sistema de dos partículas

Una aplicación interesante de conservación de momentum de un sistema de partículas es el ejemplo siguiente que consiste de un bloque deslizándose por una cuña móvil, sin roce.

Consideremos una cuña de ángulo α y masa M que se puede deslizar sin roce sobre una mesa horizontal. Si inicialmente la cuña está en reposo y se pone en su extremo superior un bloque de masa m que se puede deslizar sin roce sobre ella, calculemos la velocidad de la cuña cuando el bloque ha descendido completamente por la cuña.

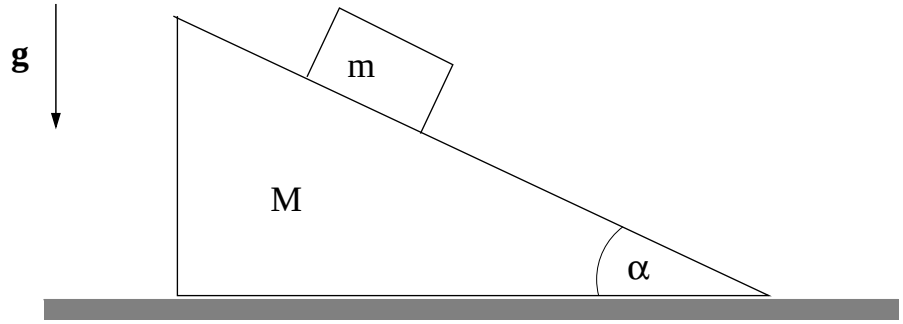


Figura 10: bloque deslizándose por una cuña móvil

Nota: Este ejemplo está tomado del libro: Rafael Benguria y María Cristina Depassier, **Problemas Resueltos de de Mecánica Clásica**, Ediciones UC, Santiago de Chile, 1995, pp. 99–101).

7. Problemas

67. Se arroja un ladrillo de 0,6$[kg]$ al interior de un carrito de 25$[kg]$ como se indica en la figura. Si al entrar al carro, el ladrillo tiene una rapidez de 10$[m/s]$ como se muestra en la figura, determine la velocidad final del carro.

68. Una niñita de $m = 20[kg]$ se deliza por un resbalín hacia la superficie de un carro de $M = 10[kg]$. Determine la velocidad del carro en el instante en que la niña para de deslizarse sobre el. Desprecie el roce y suponga que la niña parte desde el reposo en A.

69. Dos hombres A y B, cada uno de masa 75$[kg]$, están parados sobre una balsa de 250$[kg]$. Determine la velocidad que se da a la balsa si estos hombre corren sobre la balsa con una velocidad relativa de 1$[m/s]$ y saltan desde ella: a) uno a la vez y b) los dos al mismo tiempo. Desprecie el roce y suponga que la balsa no se da vuelta.

70. Suponga dos masas iguales m, unidas mediante un resorte de constante elástica k. Si inicialmente el sistema se encuentra adosado a una pared de tal modo que el resorte se encuentra comprimido en d con respecto a su largo natural, describa (cuantitativamente) el movimiento del sistema una vez que éste se deja evolucionar desde el reposo.

71. Suponga que el sistema del problema original viaja con velocidad $\vec{v}$ hacia la pared, de modo que el resorte que une las dos masas se encuentra en su largo natural. Describa el movimiento del sistema desde el instante que la masa de la izquierda choca contra la pared. ¿ Qué sucede finalmente con el sistema?

En los problemas siguientes se hace uso del coeficiente de restitución. En clases discutimos dos tipos de colisiones: las colisiones elásticas, en que se conserva la energía y las colisiones plásticas. Entre estos dos extremos existen situaciones en las que no se conserva la energía, pero en las cuales las dos partículas no siguen juntas después del choque. Por supuesto, en estas situaciones intermedias no se puede usar la conservación de la energía. En lugar de la conservación de energía se especifica el **coeficiente de restitución** e que está definido como el cuociente entre las velocidades relativas después y antes del choque, a lo largo de la línea de impacto. La línea de impacto está definida como la dirección normal al plano de contacto (ver figura).

72. Dos bolas de billar A y B tienen la misma masa $m = 0{,}2[kg]$. Si A choca a B con una velocidad $(v_A)_i = 2[m/s]$ como se indica, determine su velocidad final después de la colisión. La bola B está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es $e = 0{,}75$.

73. Dos monedas A y B tienen velocidades iniciales como se indica, justo antes de chocar en el punto O. Si sus masas son respectivamente $m_A = 7[grs]$ y $m_b = 3[grs]$ y la superficie sobre la que se mueven es suave, determine las velocidades justo después del choque. El coeficiente de restitución es $e = 0{,}65$.

74. Dos cilíndros de caucho (de los que se usan en hockey sobre hielo) A y B cada uno de masa $m = 0,2[kg]$ chocan en el punto O y son deflectados a lo largo de las líneas punteadas que se muestran en la figura. Determine las velocidades de A y B después del choque, suponiendo que la superficie de hielo es suave.

Notas Bibliográficas e Históricas:

i) La noción de "Centro de Masa" fue introducida por Arquímedes de Siracusa (287–212 AC), y desarrollada mas tarde por Pappus de Alexandria, Guido Ubaldi, Simon Stevin, John Wallis, Pierre Varignon, entre otros.

ii) Las leyes de choque fueron descritas por primera vez por John Wallis, Christopher Wren y Christiaan Huygens. De acuerdo al libro de René Dugas, **Histoire de la Mécanique**, Eds. J. Gabay 1996, Paris, (Cáp. V, p. 165), en el año 1668, la Sociedad Real de Londres llamó a concurso para determinar las leyes de las colisiones de los cuerpos. El 26 de noviembre de 1668, Wallis presentó un ensayo sobre el choque inelástico de los cuerpos. El 17 de diciembre de 1668, y el 4 de enero de 1669, Wren y Huygens, independientemente presentaron ensayos sobre los choques elásticos. El ensayo de Wallis apareció publicada en su tratado *Mechanica, sive de Motu* aparecido en Londres entre 1669 y 1671. El ensayo de Wren apareció publicado en la revista *Philosophical Transactions* en 1669. Finalmente el ensayo de Huygens aparece publicado en su obra póstuma *De Motu corporum ex percusione*, aparecido en 1703. Christopher Wren (1632–1723) es un destacado arquitecto inglés que jugó un papel fundamental en la reconstrucción de Londres luego del gran incendio de 1666. Wren fue el arquitecto de la Catedral de San Pablo en Londres. Para leer mas sobre las contribuciones científicas de Wren se puede consultar el libro de J. Arthur Bennett, *The math science of Christopher Wren*, Cambridge University Press, 2002. La historia del desarrollo de las leyes de colisiones está presentada en el libro de W. J. Stronge, *Impact Mechanics*, Cambridge University Press, 2000.

iii) Distintos tipos de cohetes se conocen desde la Antigüedad. Quizás la primera descripción histórica de un cohete data del año 1232 DC, durante el sitio de Beijing por los Mongoles. En dicha oportunidad los defensores de la ciudad dispararon varios cohetes con fuego. Durante el siglo XIII, el uso de los cohetes había llegado a Francia e Italia. En 1448, los Coreanos inventaron el primer sistema de lanzamiento de cohetes múltiples, usando pólvora (en el lenguaje local este sistema se llama "Singijeon"). En 1633, Lagari Hasan Çelebi lanzó un cohete de 7 alas a través del Bósforo, desde "Sarayburnu", en Estambul para celebrar el nacimiento de Evliya, hija del Sultán Murad IV (este hecho es recordado en la película reciente (1996) "Estambul bajo mis alas" del cineasta turco Mustafa Altioklar). La ecuación del cohete, desarrollada en la Sección 6.1 de este capítulo fue derivada por William Moore, en 1813, en su tratado "Treatise on the motion of rockets and an Essay on Naval Gunnery in Theory and Practice", G. & S. Robinson, Londres. La ecuación del cohete fue reobtenida más tarde por el científico ruso Konstantin Tsiolkovsky (1857–1935) en 1903 (y también por I. V. Meshchenrsky, en su tesis *Dinámica de un punto de masa variable*, San Petersburgo, Rusia, 1897). El primer cohete de combustible líquido fue construído y lanzado por el físico de EE.UU. Robert Goddard (1882–1945) en 1926. Los cohetes han jugado un papel central en el desarrollo de la carrera espacial.

iv) La primera máquina impulsada por fuerzas de reacción fue la "Aeolipila", o "máquina de Herón", inventada por el matemático Herón de Alejandría (10–70 DC).

La "Aeolipila" consiste en una esfera llena de vapor, que puede girar libremente con respecto a un eje que pasa por su centro, con toberas inclinadas por las cuales sale el vapor haciendo un ángulo con la normal a la esfera impulsándola (un mecanismo muy semejante a los regadores automáticos modernos).

Referencias

[1] Rafael Benguria, María Cristina Depassier, *Problemas Resueltos de Mecánica Clásica*, Primera Edición, Textos Universitarios, Ediciones Universidad Católica, Santiago, Chile, 1996.

[2] Lev D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Mecánica, Volumen 1 del Curso de Física Teórica*, Editorial Reverté SA, Barcelona, 1965.

©Rafael Benguria, Septiembre de 2014.