Trabajo virtual

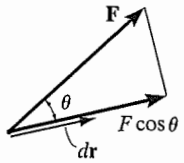
11

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

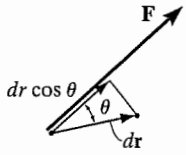
- Presentar el principio del trabajo virtual y mostrar cómo se aplica para encontrar la configuración del equilibrio de un sistema de elementos conectados mediante pasadores.
- Establecer la función de la energía potencial y utilizar el método de la energía potencial para investigar el tipo de equilibrio o estabilidad de un cuerpo rígido o sistema de elementos conectados mediante pasadores.

11.1 Definición de trabajo

El *principio del trabajo virtual* fue propuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli en el siglo XVIII. Proporciona un método alternativo para resolver problemas que implican el equilibrio de una partícula, un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos conectados. Sin embargo, antes de analizar este principio, primero debemos definir el trabajo producido por una fuerza y por un momento de par.



(a)



(b)

Fig. 11-1

Trabajo de una fuerza. Una fuerza realiza trabajo cuando experimenta un desplazamiento en la dirección de su línea de acción. Por ejemplo, considere la fuerza **F** que se muestra en la figura 11-1*a*, la cual experimenta un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$. Si θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento, entonces la componente de **F** en la dirección del desplazamiento es $F \cos \theta$. Y entonces el trabajo producido por **F** es

$$dU = \mathrm{F}\, dr \cos \theta$$

Observe que esta expresión también es el producto de la fuerza F y la componente de desplazamiento en la dirección de la fuerza, $dr \cos \theta$, figura 11-1*b*. Si usamos la definición del producto punto (ecuación 2-14) el trabajo también puede escribirse como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como lo indican las ecuaciones anteriores, el trabajo es un *escalar*, y como otras cantidades escalares, tiene una magnitud que puede ser *positiva* o *negativa*.

En el sistema SI, la unidad de trabajo es un *joule* (J), que es el trabajo producido por una fuerza de 1 N que se desplaza a través de una distancia de 1 m en la dirección de la fuerza (1 J = 1 N · m). La unidad del trabajo en el sistema FPS es el pie-libra (pie · lb), que es el trabajo producido por una fuerza de 1 lb que se desplaza una distancia de 1 pie en la dirección de la fuerza.

El momento de una fuerza tiene la misma combinación de unidades; sin embargo, los conceptos de momento y trabajo no están relacionados de ninguna forma. Un momento es una cantidad vectorial, mientras que el trabajo es un escalar.

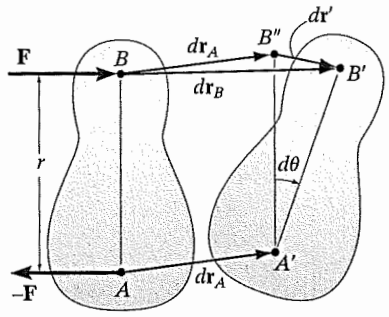


Fig. 11-2

Trabajo de un momento de par. La rotación de un momento de par también produce trabajo. Considere el cuerpo rígido de la figura 11-2, el cual está sometido al par de fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ que produce un momento de par **M** que tiene una magnitud $M = Fr$. Cuando el cuerpo experimenta el desplazamiento diferencial que se muestra, los puntos A y B se mueven $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ hasta sus posiciones finales A' y B', respectivamente. Como $d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}'$, se puede pensar en este movimiento como en una *traslación* $d\mathbf{r}_A$, donde A y B se mueven hasta A' y B'', y una *rotación* alrededor de A', donde el cuerpo gira a través del ángulo $d\theta$ respecto de A. Las fuerzas de par no trabajan durante la traslación $d\mathbf{r}_A$ porque cada fuerza realiza la misma cantidad de desplazamiento en direcciones opuestas, y así cancelan el trabajo. Sin embargo, durante la rotación **F** se desplaza $dr'' = r\, d\theta$, y por lo tanto realiza un trabajo $dU = F\, dr'' = F\, r\, d\theta$. Como $M = Fr$, entonces el trabajo del momento de par **M** es

$$dU = M d\theta$$

Si **M** y $d\theta$ tienen el mismo sentido, el trabajo es *positivo*; sin embargo, si tienen un sentido opuesto, el trabajo será *negativo*.

Trabajo virtual. Las definiciones del trabajo de una fuerza y de un par han sido presentadas en términos de *movimientos reales* expresados mediante desplazamientos diferenciales con magnitudes de dr y $d\theta$. Considere ahora un *movimiento imaginario* o *virtual* de un cuerpo en equilibrio estático, el cual indica un desplazamiento, o una rotación, que es *supuesto* y *no existe realmente*. Estos movimientos son cantidades diferenciales de primer orden y se denotarán mediante los símbolos δr y $\delta\theta$ (delta r y delta θ), respectivamente. El *trabajo virtual* realizado por una fuerza que sufre un desplazamiento virtual δr es

$$\boxed{\delta U = F \cos\theta \, \delta r} \tag{11-1}$$

Del mismo modo, cuando un par sufre una rotación virtual $\delta\theta$ en el plano de las fuerzas del par, el *trabajo virtual* es

$$\boxed{\delta U = M \, \delta\theta} \tag{11-2}$$

11.2 Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual establece que si un cuerpo está en equilibrio, entonces la suma algebraica del trabajo virtual realizado por todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo, es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo. Entonces,

$$\delta U = 0 \tag{11-3}$$

Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de la partícula (pelota) que descansa sobre el piso, figura 11-3. Si "imaginamos" que la pelota se desplaza hacia abajo una cantidad virtual δy, entonces el peso efectúa trabajo virtual positivo, $W\,\delta y$, y la fuerza normal efectúa trabajo virtual negativo, $-N\,\delta y$. Por equilibrio, el trabajo virtual total debe ser cero, de modo que $\delta U = W\,\delta y - N\,\delta y = (W-N)\,\delta y = 0$. Como $\delta y \neq 0$, entonces $N = W$ como se requiere al aplicar $\Sigma F_y = 0$.

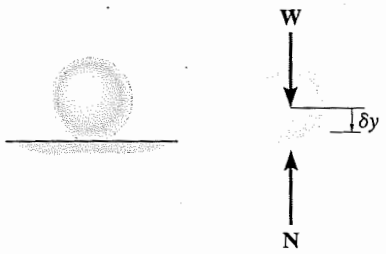
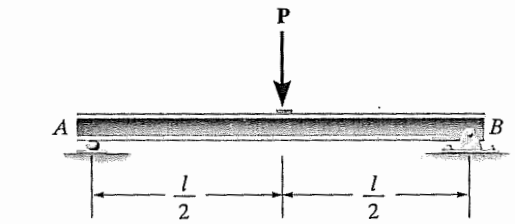


Fig. 11-3

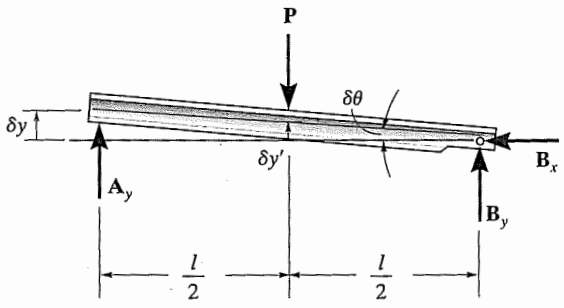
De una manera semejante, también podemos aplicar la ecuación del trabajo virtual $\delta U = 0$ a un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas coplanares. Aquí, las traslaciones virtuales separadas en las direcciones x y y y una rotación virtual con respecto a un eje perpendicular al plano x-y que pasa por un punto arbitrario O, corresponderán a las tres ecuaciones de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_O = 0$. Al escribir estas ecuaciones, *no es necesario* incluir el trabajo realizado por las *fuerzas internas* que actúan dentro del cuerpo, ya que un cuerpo rígido *no se deforma* cuando está sometido a una carga externa y, además, cuando el cuerpo se mueve a través un desplazamiento virtual, las fuerzas internas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos, de manera que el correspondiente trabajo efectuado por cada par de fuerzas se cancelará.

Para demostrar una aplicación, considere la viga simplemente apoyada de la figura 11-4*a*. Cuando a la viga se le da una rotación virtual $\delta\theta$ con respecto al punto B, figura 11-4*b*, las únicas fuerzas que trabajan son $\mathbf{P}$ y $\mathbf{A}_y$. Como $\delta y = l\,\delta\theta$ y $\delta y' = (l/2)\,\delta\theta$, la ecuación de trabajo virtual para este caso es $\delta U = A_y(l\,\delta\theta) - P(l/2)\,\delta\theta = (A_y l - Pl/2)\,\delta\theta = 0$. Como $\delta\theta \neq 0$, entonces $A_y = P/2$. Si se excluye $\delta\theta$, observe que los términos entre paréntesis representan en realidad la aplicación de $\Sigma M_B = 0$.

Como se vio en los dos ejemplos anteriores, no se obtiene ninguna ventaja al resolver problemas de equilibrio de cuerpo rígido mediante el principio del trabajo virtual. Esto se debe a que para cada aplicación de la ecuación del trabajo virtual, el desplazamiento virtual, común a cada término, se factoriza y deja una ecuación que podría obtenerse de manera *más directa* al aplicar simplemente las ecuaciones de equilibrio.



(a)



(b)

Fig. 11-4

11.3 Principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos conectados

El método del trabajo virtual es particularmente efectivo para resolver problemas de equilibrio que implican un sistema de varios cuerpos rígidos *conectados*, como los que se muestran en la figura 11-5.

Se dice que cada uno de estos sistemas tiene sólo un grado de libertad puesto que el arreglo de los eslabones puede especificarse por completo con sólo una coordenada θ. En otras palabras, con esta única coordenada y la longitud de los elementos, podemos ubicar la posición de las fuerzas **F** y **P**.

En este texto consideraremos sólo la aplicación del principio del trabajo virtual a sistemas que contienen un grado de libertad.* Como son menos complicados, servirán como una forma de acercarse a la solución de problemas más complejos que implican sistemas con muchos grados de libertad. A continuación se presenta el procedimiento para resolver problemas que involucran un sistema de cuerpos rígidos conectados sin fricción.

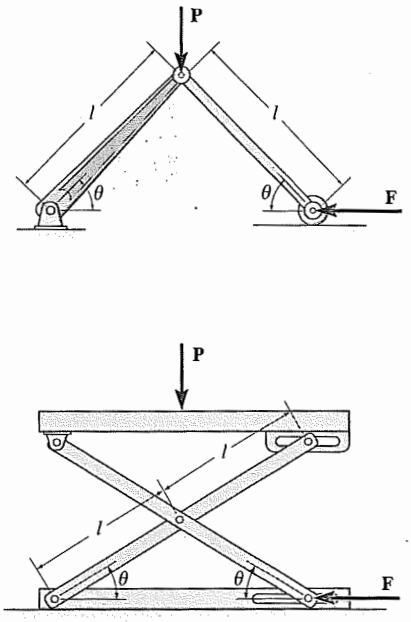
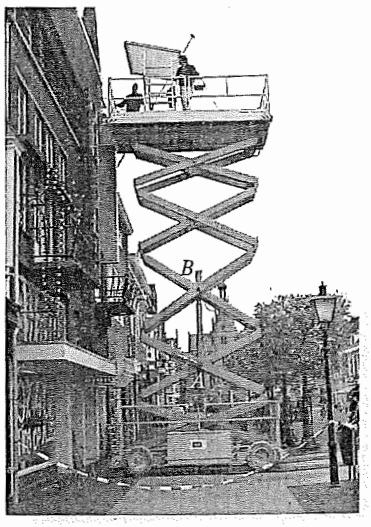


Fig. 11-5

Puntos importantes

- Una fuerza realiza trabajo cuando se mueve a través de un desplazamiento en la dirección de la fuerza. Un momento de par efectúa trabajo cuando se mueve a través de una rotación colineal. Específicamente, se realiza trabajo positivo cuando la fuerza o el momento de par y sus desplazamientos tienen el mismo sentido de dirección.
- Por lo general, el principio del trabajo virtual se usa para determinar la configuración de equilibrio para un sistema de elementos de conexión múltiple.
- Un desplazamiento virtual es imaginario, es decir, no ocurre realmente. Es un diferencial dado en la dirección positiva de la coordenada de posición.
- Las fuerzas o los momentos de par que no se desplazan virtualmente no efectúan trabajo virtual.



Este elevador de tijeras tiene un grado de libertad. Sin necesidad de desmembrar el mecanismo, la fuerza en el cilindro hidráulico AB requerida para hacer funcionar el elevador puede determinarse *directamente* si aplicamos el principio del trabajo virtual.

*En ocasiones, a este método de aplicar el principio del trabajo virtual se le llama *método de los desplazamientos virtuales* ya que se aplica un desplazamiento, lo que resulta en el cálculo de una fuerza real. Aunque no se usará aquí, también podemos aplicar el principio del trabajo virtual como un *método de fuerzas virtuales*. Este método se usa a menudo para aplicar una fuerza virtual y después determinar los desplazamientos de los puntos en un cuerpo deformable. Vea R.C. Hibbeler, *Mechanics of Materials*, 7a. edición, Pearson/Prentice Hall, 2007.

Procedimiento para el análisis

Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el diagrama de cuerpo libre del sistema completo de cuerpos conectados y defina la *coordenada* q.
- Grafique la "posición deflexionada" del sistema en el diagrama de cuerpo libre cuando el sistema experimenta un desplazamiento virtual *positivo* δq.

Desplazamientos virtuales.

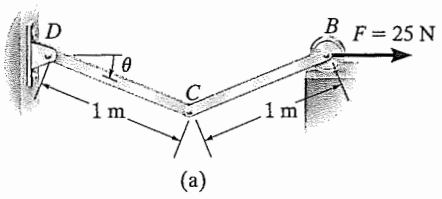
- Indique las *coordenadas de posición* s, medidas desde un *punto fijo* en el diagrama de cuerpo libre. Estas coordenadas se dirigen hacia las fuerzas que realizan trabajo.
- Cada uno de estos ejes coordenados debe ser *paralelo* a la línea de acción de la fuerza hacia la que está dirigida, de manera que el trabajo virtual a lo largo del eje coordenado pueda calcularse.
- Relacione cada una de las coordenadas de posición s con la coordenada independiente q; luego *diferencie* esas expresiones para representar cada uno de los desplazamientos virtuales δs en términos de δq.

Ecuación del trabajo virtual.

- Escriba la *ecuación del trabajo virtual* para el sistema y suponga que, sea posible o no, todas las coordenadas de posición s experimentan desplazamientos virtuales *positivos* δs. Si una fuerza o momento de par tiene la misma dirección que el desplazamiento virtual positivo, el trabajo es positivo. En caso contrario es negativo.
- Exprese el trabajo de *cada* fuerza y momento de par en la ecuación, en términos de δq.
- Factorice este desplazamiento común de todos los términos y despeje la fuerza, el momento de par o la posición q de equilibrio, desconocidos.

EJEMPLO 11.1

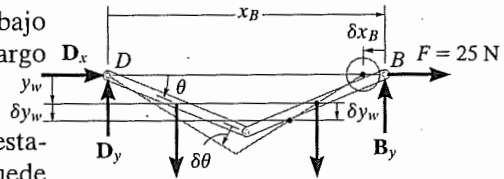
Determine el ángulo θ necesario para lograr el equilibrio del eslabonamiento de dos elementos que se muestra en la figura 11-6*a*. Cada elemento tiene una masa de 10 kg.



(a)

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El sistema tiene sólo un grado de libertad, ya que la ubicación de ambos eslabones puede especificarse mediante la sola coordenada independiente ($q =$) θ. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-6*b*, cuando θ tiene una rotación virtual *positiva* $\delta\theta$ (en el sentido de las manecillas del reloj), sólo la fuerza **F** y los dos pesos de 98.1 N realizan trabajo (las fuerzas reactivas $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$ están fijas, y $\mathbf{B}_y$ no se mueve a lo largo de su línea de acción).



(b)

Fig. 11-6

Desplazamientos virtuales. Si el origen de coordenadas se establece en el soporte de pasador *fijo D*, la ubicación de **F** y **W** puede especificarse mediante las *coordenadas de posición* x_B y y_w. Para determinar el trabajo, observe que las coordenadas son paralelas a las líneas de acción de sus fuerzas asociadas. Al expresar las coordenadas de posición en términos θ y al obtener las derivadas, resulta

$$x_B = 2(1 \cos\theta)\ \text{m} \qquad \delta x_B = -2 \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta\ \text{m} \tag{1}$$

$$y_w = \tfrac{1}{2}(1 \operatorname{sen}\theta)\ \text{m} \qquad \delta y_w = 0.5 \cos\theta\, \delta\theta\ \text{m} \tag{2}$$

Se observa por los signos de esas ecuaciones, y está indicado en la figura 11-6*b*, que un *incremento* de θ (es decir, $\delta\theta$) ocasiona una *disminución* en x_B y un *incremento* de y_w.

Ecuación del trabajo virtual. Si los desplazamientos virtuales δx_B y δy_w, fuesen *ambos positivos*, entonces las fuerzas **W** y **F** realizarían trabajo positivo ya que las fuerzas y sus correspondientes desplazamientos tendrían el mismo sentido. Por tanto, la ecuación del trabajo virtual para el desplazamiento $\delta\theta$ es

$$\delta U = 0; \qquad W\,\delta y_w + W\,\delta y_w + F\,\delta x_B = 0 \tag{3}$$

Al sustituir las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3 para relacionar los desplazamientos virtuales con el desplazamiento común virtual $\delta\theta$ resulta

$$98.1(0.5 \cos\theta\, \delta\theta) + 98.1(0.5 \cos\theta\, \delta\theta) + 25(-2 \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta) = 0$$

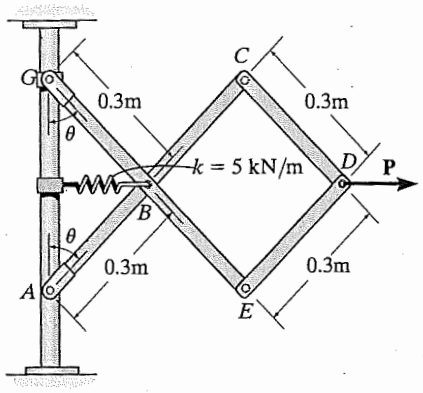
Observe que el "trabajo negativo" realizado por **F** (fuerza en el sentido opuesto al desplazamiento) se ha *tomado en cuenta* en la ecuación anterior mediante el "signo negativo" de la ecuación 1. Al factorizar el *desplazamiento común* $\delta\theta$ y despejar θ, si se observa que $\delta\theta \neq 0$, obtenemos

$$(98.1 \cos\theta - 50 \operatorname{sen}\theta)\, \delta\theta = 0$$

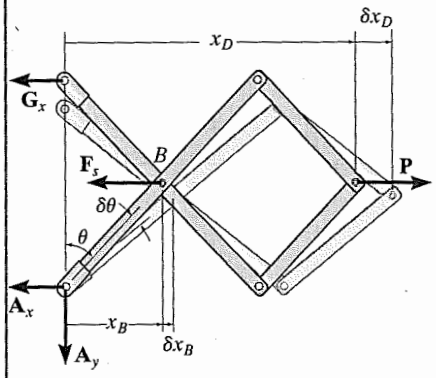
$$\theta = \tan^{-1}\frac{98.1}{50} = 63.0^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

NOTA: si este problema se hubiera resuelto con las ecuaciones de equilibrio, habría sido necesario desmembrar los eslabones y aplicar tres ecuaciones escalares a *cada* eslabón. El principio del trabajo virtual, por medio del cálculo, ha eliminado esta tarea para que la respuesta se obtenga directamente.

EJEMPLO 11.2



(a)



(b)

Fig. 11-7

Determine la fuerza P requerida en la figura 11-7*a*, la cual es necesaria para mantener el equilibrio del eslabonamiento de tijeras cuando $\theta = 60°$. El resorte está sin estirar cuando $\theta = 30°$. Ignore la masa de los eslabones.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Sólo $\mathbf{F}_s$ y $\mathbf{P}$ realizan trabajo cuando θ experimenta un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, figura 11-7*b*. Para la posición arbitraria θ, el resorte está estirado (0.3 m) sen θ − (0.3 m) sen 30°, de forma que

$$F_s = ks = 5000 \text{ N/m } [(0.3 \text{ m}) \operatorname{sen}\theta - (0.3 \text{ m}) \operatorname{sen} 30°]$$
$$= (1500 \operatorname{sen}\theta - 750)\ N$$

Desplazamientos virtuales. Las coordenadas de posición, x_B y x_D, medidas desde el *punto fijo A*, se usan para localizar $\mathbf{F}_s$ y $\mathbf{P}$. Estas coordenadas son paralelas a la línea de acción de sus fuerzas correspondientes. Al expresar x_B y x_D en términos del ángulo θ y mediante trigonometría,

$$x_B = (0.3 \text{ m}) \operatorname{sen}\theta$$
$$x_D = 3[(0.3 \text{ m}) \operatorname{sen}\theta] = (0.9 \text{ m}) \operatorname{sen}\theta$$

Al diferenciar, obtenemos los desplazamientos virtuales de los puntos B y D.

$$\delta x_B = 0.3 \cos\theta\, \delta\theta \tag{1}$$
$$\delta x_D = 0.9 \cos\theta\, \delta\theta \tag{2}$$

Ecuación del trabajo virtual. La fuerza $\mathbf{P}$ realiza trabajo positivo puesto que actúa en el sentido positivo de su desplazamiento virtual. La fuerza de resorte $\mathbf{F}_s$ efectúa trabajo positivo, ya que actúa en forma opuesta a su desplazamiento virtual positivo. Así, la ecuación del trabajo virtual toma la forma

$$\delta U = 0; \qquad -F_s\delta x_B + P\delta x_D = 0$$
$$-[1500 \operatorname{sen}\theta - 750](0.3 \cos\theta\, \delta\theta) + P(0.9 \cos\theta\, \delta\theta) = 0$$
$$[0.9P + 225 - 450 \operatorname{sen}\theta] \cos\theta\, \delta\theta = 0$$

Como $\cos\theta\, \delta\theta \neq 0$, entonces esta ecuación requiere que

$$P = 500 \operatorname{sen}\theta - 250$$

Cuando $\theta = 60°$,

$$P = 500 \operatorname{sen} 60° - 250 = 183 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 11.3

Si la caja de la figura 11-8*a* tiene una masa de 10 kg, determine el momento de par M necesario para mantener el equilibrio cuando $\theta = 60°$. Ignore la masa de los elementos.

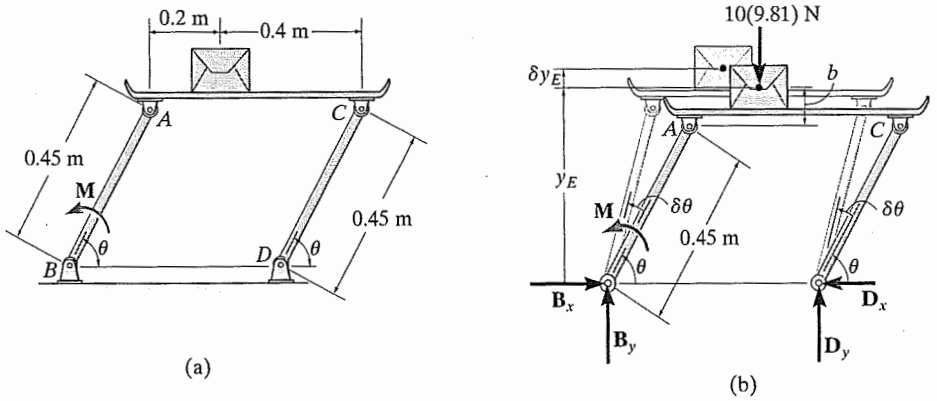


Fig. 11-8

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Cuando θ experimenta un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, sólo el momento de par **M** y el peso de la caja realizan trabajo, figura 11-8*b*.

Desplazamientos virtuales. La coordenada de posición y_E medida desde el *punto fijo B*, ubica el peso, 10(9.81) N. Aquí,

$$y_E = (0.45 \text{ m}) \operatorname{sen} \theta + b$$

donde b es una distancia constante. Al diferenciar esta ecuación obtenemos

$$\delta y_E = 0.45 \text{ m} \cos \theta \, \delta\theta \qquad (1)$$

Ecuación del trabajo virtual. La ecuación del trabajo virtual toma la forma

$$\delta U = 0; \qquad M\delta\theta - [10(9.81) \text{ N}]\delta y_E = 0$$

Al sustituir la ecuación 1 en esta ecuación

$$M\delta\theta - 10(9.81) \text{ N}(0.45 \text{ m} \cos \theta \, \delta\theta) = 0$$
$$\delta\theta(M - 44.145 \cos \theta) = 0$$

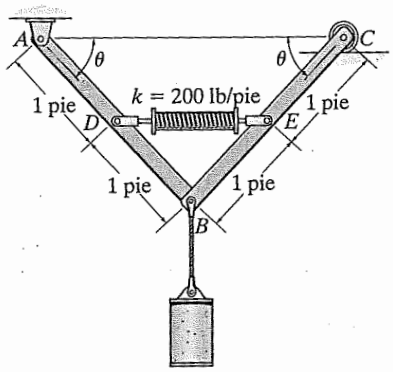
Como $\delta\theta \neq 0$, entonces

$$M - 44.145 \cos \theta = 0$$

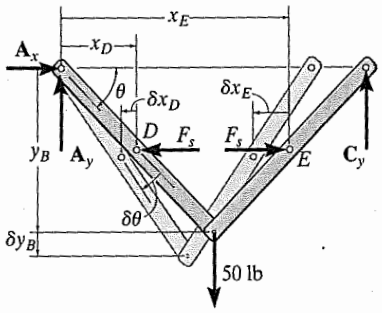
Como se requiere que $\theta = 60°$, entonces

$$M = 44.145 \cos 60° = 22.1 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 11.4



(a)



(b)

Fig. 11-9

El mecanismo de la figura 11-9*a* sostiene el cilindro de 50 lb. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio si el resorte tiene una longitud no deformada de 2 pies cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los elementos.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Cuando el mecanismo experimenta un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, figura 11-9*b*, sólo $\mathbf{F}_s$ y la fuerza de 50 lb realizan trabajo. Como la longitud final del resorte es 2(1 pie cos θ), entonces

$$F_s = ks = (200 \text{ lb/pie})(2 \text{ pies} - 2 \text{ pies} \cos\theta) = (400 - 400\cos\theta) \text{ lb}$$

Desplazamientos virtuales. Las coordenadas de posición x_D y x_E se establecen a partir del *punto fijo A* para localizar $\mathbf{F}_s$ en D y en E. La coordenada y_B, también medida desde A, especifica la posición de la fuerza de 50 lb en B. Las coordenadas se pueden expresar en términos de θ con trigonometría.

$$x_D = (1 \text{ pie})\cos\theta$$
$$x_E = 3[(1 \text{ pie})\cos\theta] = (3 \text{ pies})\cos\theta$$
$$y_B = (2 \text{ pies})\,\text{sen}\,\theta$$

Al diferenciar, obtenemos los desplazamientos virtuales de los puntos D, E y B como

$$\delta x_D = -1\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \tag{1}$$
$$\delta x_E = -3\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \tag{2}$$
$$\delta y_B = 2\cos\theta\,\delta\theta \tag{3}$$

Ecuación del trabajo virtual. La ecuación del trabajo virtual se escribe como si todos los desplazamientos virtuales fueran positivos, por tanto

$$\delta U = 0; \qquad F_s\delta x_E + 50\delta y_B - F_s\delta x_D = 0$$

$$(400 - 400\cos\theta)(-3\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta) + 50(2\cos\theta\,\delta\theta)$$
$$-(400 - 400\cos\theta)(-1\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta) = 0$$
$$\delta\theta(800\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 800\,\text{sen}\,\theta + 100\cos\theta) = 0$$

Como $\delta\theta \neq 0$, entonces

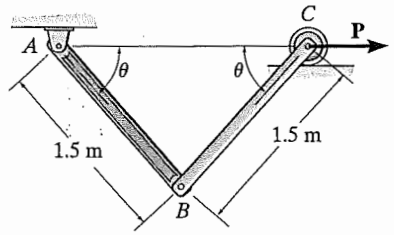
$$800\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 800\,\text{sen}\,\theta + 100\cos\theta = 0$$

Al resolver por prueba y error,

$$\theta = 34.9° \qquad \textit{Resp.}$$

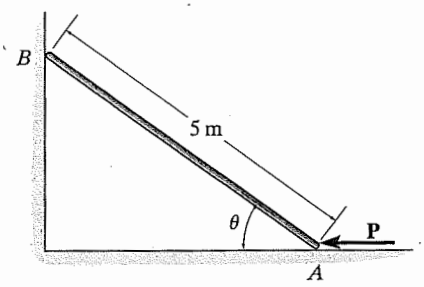
PROBLEMAS FUNDAMENTALES

F11-1. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del eslabonamiento en $\theta = 60°$. Cada eslabón tiene una masa de 20 kg.



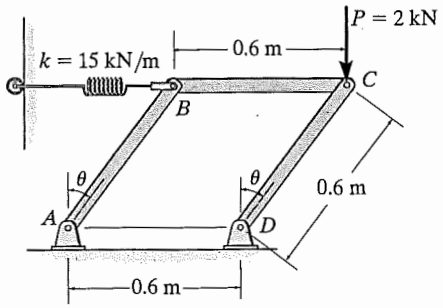
F11-1

F11-2. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para sostener la barra lisa de 50 kg en equilibrio en $\theta = 60°$.



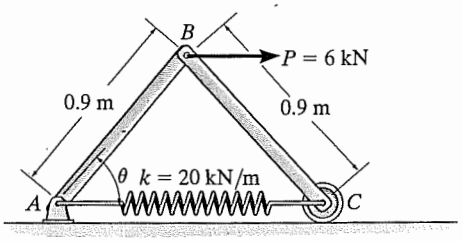
F11-2

F11-3. El eslabonamiento está sometido a una fuerza de $P = 2$ kN. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los eslabones.



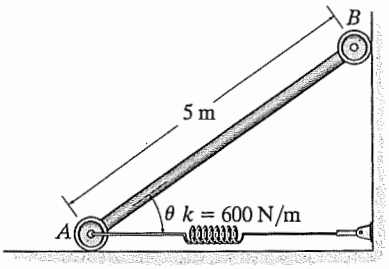
F11-3

F11-4. El eslabonamiento está sometido a una fuerza de $P = 6$ kN. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 60°$. Ignore la masa de los eslabones.



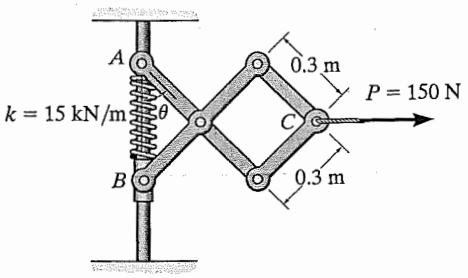
F11-4

F11-5. Determine el ángulo θ con el cual la barra de 50 kg se encuentra en equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 60°$.



F11-5

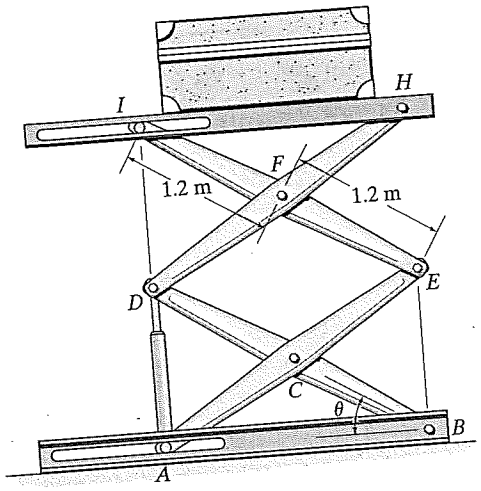
F11-6. El eslabonamiento de tijeras está sometido a una fuerza de $P = 150$ N. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los eslabones.



F11-6

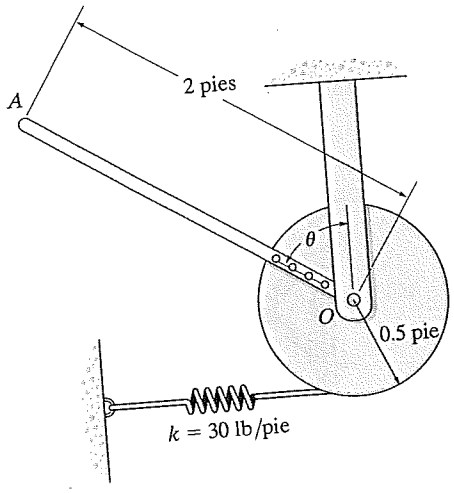
PROBLEMAS

•11-1. El embalaje de 200 kg está sobre la mesa elevadora en la posición $\theta = 30°$. Determine la fuerza necesaria en el cilindro hidráulico AD para lograr el equilibrio. Ignore la masa de los componentes de la mesa elevadora.



Prob. 11-1

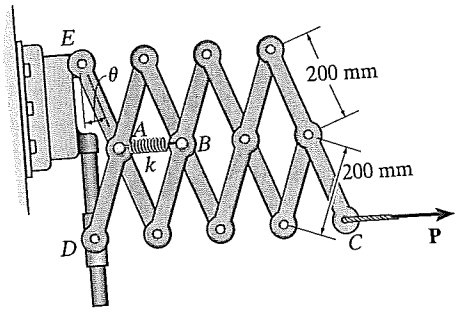
11-2. La barra uniforme OA tiene un peso de 10 lb. Cuando la barra está en posición vertical, $\theta = 0°$, el resorte no está deformado. Determine el ángulo θ para equilibrio si el extremo del resorte se enrolla alrededor de la periferia del disco cuando éste gira.



Prob. 11-2

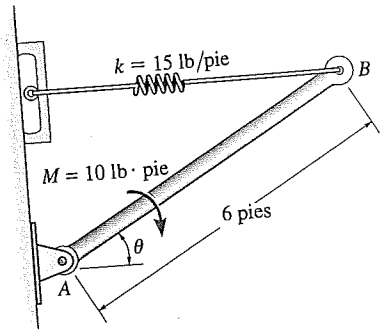
11-3. Las "tijeras de Nuremberg" están sometidas a una fuerza horizontal de $P = 600$ N. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. El resorte tiene una rigidez de $k = 15$ kN/m y está sin deformar cuando $\theta = 15°$.

***11-4.** Las "tijeras de Nuremberg" están sometidas a una fuerza horizontal de $P = 600$ N. Determine la rigidez k del resorte necesaria para el equilibrio cuando $\theta = 60°$. El resorte está sin deformar cuando $\theta = 15°$.



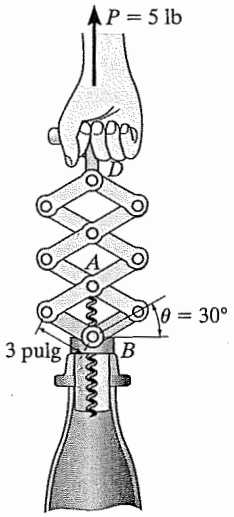
Probs. 11-3/4

•11-5. Determine la fuerza desarrollada en el resorte y que se requiere para mantener la barra uniforme AB de 10 lb en equilibrio cuando $\theta = 35°$.



Prob. 11-5

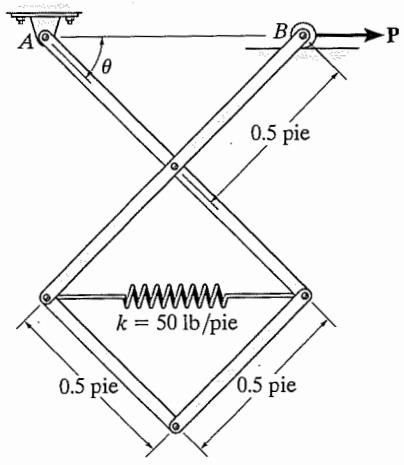
11-6. Si se aplica una fuerza de $P = 5$ lb a la manija del mecanismo, determine la fuerza que ejerce el tornillo sobre el corcho de la botella. El tornillo está unido al pasador en A y pasa por el collarín que está unido al cuello de la botella en B.



Prob. 11-6

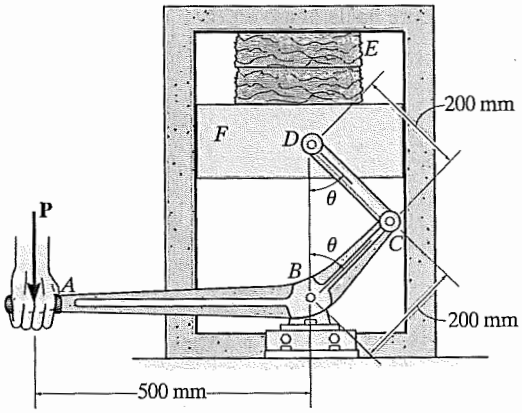
11-7. El mecanismo conectado mediante pasadores está restringido en A por un pasador y en B por un rodillo. Si $P = 10$ lb, determine el ángulo θ necesario para lograr el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$. Ignore el peso de los elementos.

***11-8.** El mecanismo conectado mediante pasadores está restringido en A por un pasador y en B por un rodillo. Determine la fuerza P que debe aplicarse al rodillo para mantener al mecanismo en equilibrio cuando $\theta = 30°$. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$. Ignore el peso de los elementos.



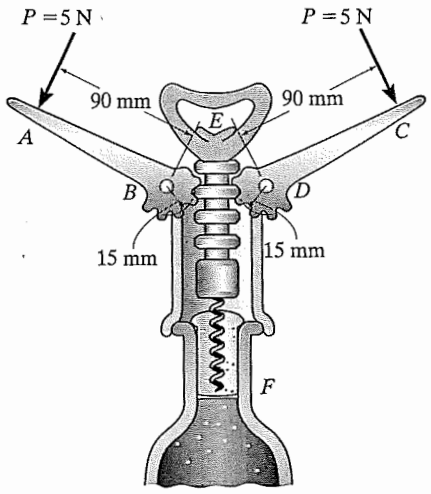
Probs. 11-7/8

•**11-9.** Si se aplica una fuerza $P = 100$ N al brazo de la prensa de palanca acodillada, determine la fuerza de apriete desarrollada en el bloque cuando $\theta = 45°$. Ignore el peso del bloque.



Prob. 11-9

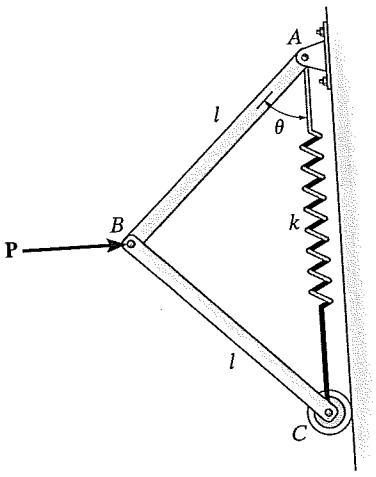
11-10. Determine la fuerza de jalón desarrollada en el corcho, cuando se aplican las fuerzas a las manijas del destapador de botellas.



Prob. 11-10

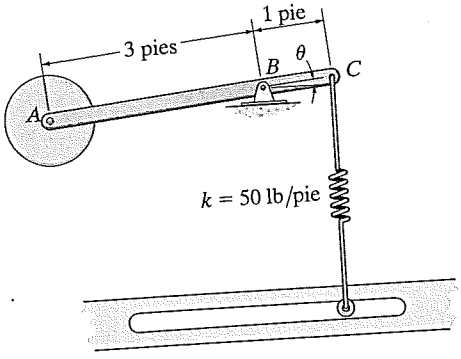
11-11. Si el resorte tiene una rigidez k y una longitud no deformada l_0, determine la fuerza P cuando el mecanismo está en la posición mostrada. Ignore el peso de los elementos.

***11-12.** Resuelva el problema 11-11 si la fuerza **P** se aplica verticalmente hacia abajo en B.



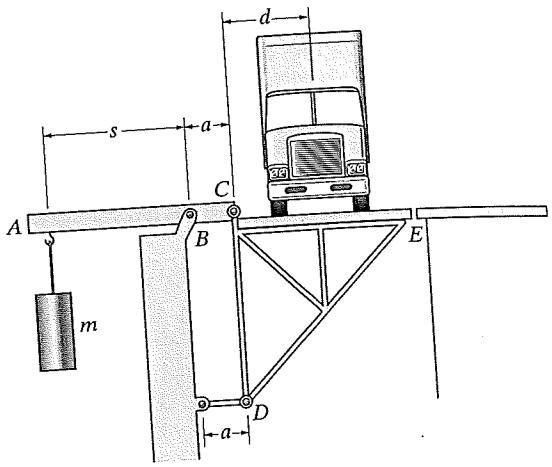
Probs. 11-11/12

•11-13. Determine los ángulos θ para el equilibrio del disco de 4 lb con el principio del trabajo virtual. Ignore el peso de la barra. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$ y siempre permanece en posición vertical debido a la guía de rodillo.



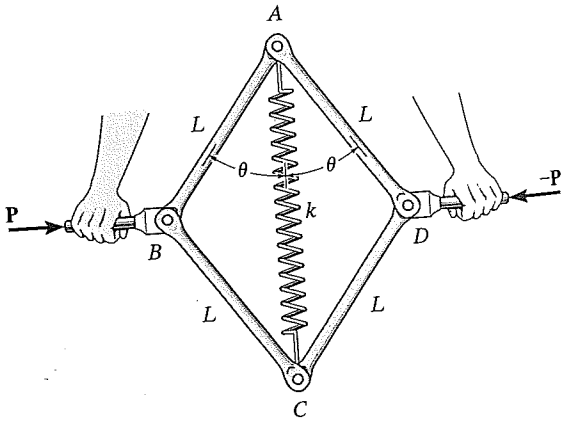
Prob. 11-13

11-14. El camión se pesa en la báscula de inspección de la carretera. Si se coloca una masa m conocida a una distancia s desde el fulcro B de la báscula, determine la masa del camión m_t si su centro de gravedad se ubica a una distancia d desde el punto C. Cuando la báscula está vacía, el peso de la palanca ABC equilibra a la báscula CDE.



Prob. 11-14

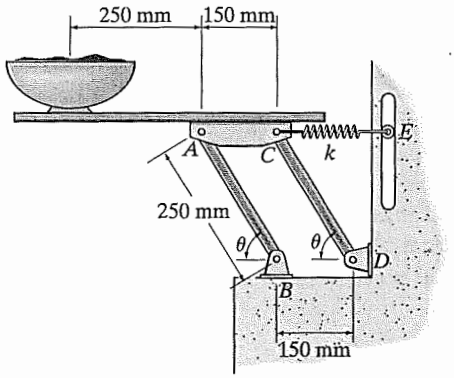
11-15. El dispositivo se usa para hacer ejercicio. Consiste en cuatro barras conectadas mediante pasadores, cada barra tiene una longitud L, y un resorte de rigidez k con longitud no deformada $a(< 2L)$. Si se aplican fuerzas horizontales sobre las manijas de manera que θ disminuya lentamente, determine el ángulo θ para el que la magnitud de **P** resulta un máximo.



Prob. 11-15

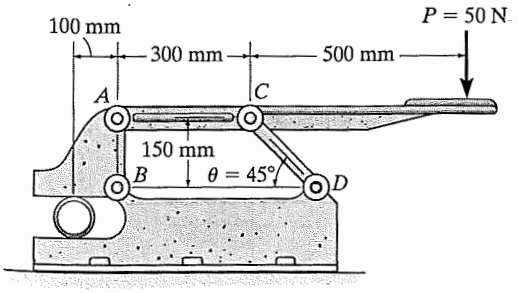
***11-16.** Una mesa de servicio uniforme de 5 kg se sostiene en cada lado mediante dos pares de eslabones idénticos, *AB* y *CD*, y resortes *CE:* Si el tazón tiene una masa de 1 kg, determine el ángulo θ con el que la mesa está en equilibrio. Cada uno de los resortes tiene una rigidez de $k = 200$ N/m y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90°$. Ignore la masa de los eslabones.

•11-17. Una mesa de servicio uniforme de 5 kg se sostiene en cada lado mediante dos pares de eslabones idénticos, *AB* y *CD*, y resortes *CE*. Si el tazón tiene una masa de 1 kg y está en equilibrio cuando $\theta = 45°$, determine la rigidez k de cada resorte. Los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta = 90°$. Ignore la masa de los eslabones.



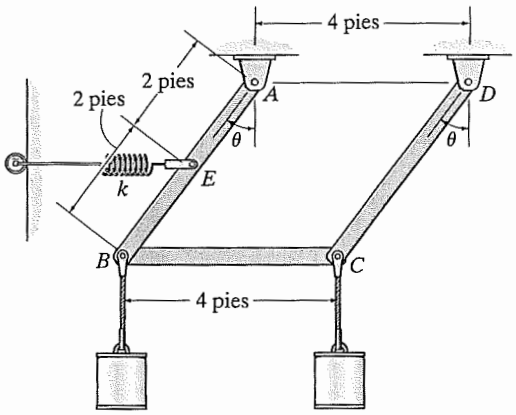
Probs. 11-16/17

11-18. Si se aplica una fuerza vertical de $P = 50$ N a la palanca acodillada de la mordaza, determine la fuerza de apriete ejercida sobre el tubo.



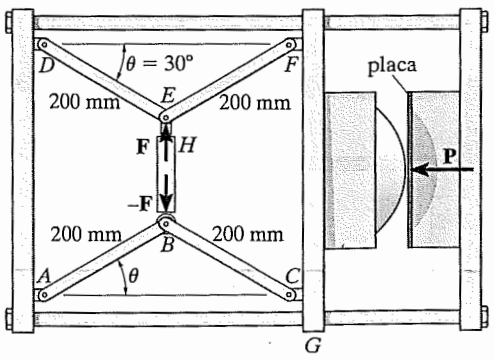
Prob. 11-18

11-19. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$ y tiene una rigidez de $k = 1000$ lb/pie. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio si cada uno de los cilindros pesa 50 lb. Ignore el peso de los elementos. El resorte permanece horizontal en cualquier momento debido al rodillo.



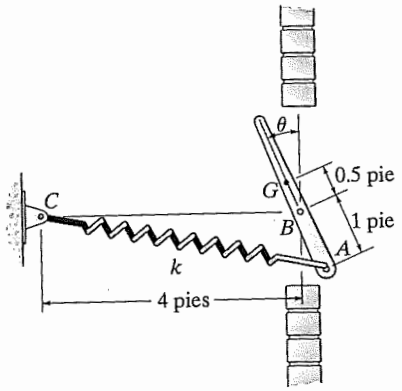
Prob. 11-19

***11-20.** La máquina que se ilustra se usa para dar forma a placas metálicas. Consiste en dos fiadores *ABC* y *DEF*, los cuales funcionan mediante un cilindro hidráulico. Los fiadores empujan la barra móvil *G* hacia delante, y presionan la placa en la cavidad. Si la fuerza que ejerce la placa sobre la cabeza es $P = 8$ kN, determine la fuerza F en el cilindro hidráulico cuando $\theta = 30°$.



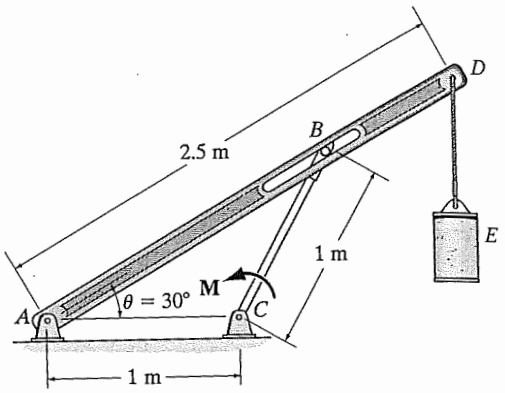
Prob. 11-20

•11-21. La placa de una ventila está sostenida en B mediante un pasador. Si pesa 15 lb y tiene su centro de gravedad en G, determine la rigidez k del resorte de manera que la placa permanezca en equilibrio cuando $\theta = 30°$. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$.



Prob. 11-21

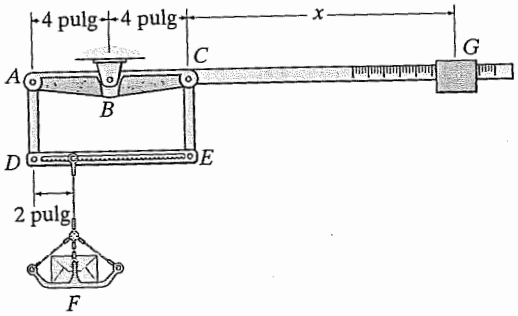
***11-24.** Determine la magnitud del momento de par **M** requerido para sostener el cilindro de 20 kg en la configuración que se muestra. La clavija lisa en B puede deslizarse libremente dentro de la ranura. Ignore la masa de los elementos.



Prob. 11-24

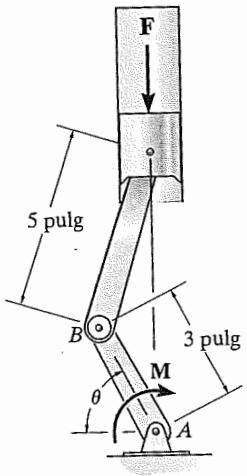
11-22. Determine el peso del bloque G requerido para equilibrar la palanca diferencial cuando la carga F de 20 lb se coloca sobre la bandeja. La palanca está en equilibrio cuando la carga y el bloque no están sobre la palanca. Considere que $x = 12$ pulg.

11-23. Si la carga F pesa 20 lb y el bloque G pesa 2 lb, determine su posición x necesaria para lograr el equilibrio de la palanca diferencial. La palanca está en equilibrio cuando la carga y el bloque no están sobre la palanca.



Probs. 11-22/23

•11-25. El cigüeñal está sometido a un par de torsión de $M = 50$ lb · pie. Determine la fuerza vertical **F** de compresión aplicada al pistón que se necesita para lograr el equilibrio cuando $\theta = 60°$.



Prob. 11-25

11

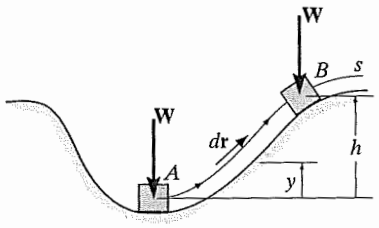
*11.4 Fuerzas conservadoras

Si el trabajo de una fuerza depende sólo de sus posiciones inicial y final, y es *independiente* de la trayectoria que recorre, entonces la fuerza se conoce como una *fuerza conservadora*. El peso de un cuerpo y la fuerza de un resorte son dos ejemplos de fuerzas conservadoras.

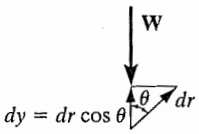
Peso. Considere un bloque de peso **W** que viaja a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 11-10*a*. Cuando se desplaza hacia arriba por la trayectoria una cantidad $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo es $dU = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r}$, o $dU = -W(dr \cos\theta) = -W(dr \cos\theta) = -W\,dy$, como se muestra en la figura 11-10*b*. En este caso, el trabajo es *negativo* ya que **W** actúa en el sentido opuesto a dy. De modo que si el bloque se mueve desde A hasta B, a través del desplazamiento vertical h, el trabajo es

$$U = -\int_0^h W\,dy = -Wh$$

Por lo tanto, el peso de un cuerpo es una fuerza conservadora, debido a que el trabajo realizado por el peso depende sólo del *desplazamiento vertical* del cuerpo, y es independiente de la trayectoria a lo largo de la cual viaja éste.



(a)



(b)

Fig. 11-10

Fuerza de resorte. Ahora considere el resorte linealmente elástico de la figura 11-11, el cual experimenta un desplazamiento ds. El trabajo es *negativo* debido a que $\mathbf{F}_s$ actúa en sentido opuesto al de ds. Entonces, el trabajo de $\mathbf{F}_s$ cuando el bloque se desplaza desde $s = s_1$ hasta $s = s_2$ es

$$U = -\int_{s_1}^{s_2} ks\,ds = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)$$

Aquí, el trabajo depende sólo de las posiciones inicial y final del resorte, s_1 y s_2, medidas desde la posición no deformada del resorte. Como este resultado es independiente de la trayectoria tomada por el bloque mientras se mueve, entonces la fuerza de resorte también es una *fuerza conservadora.*

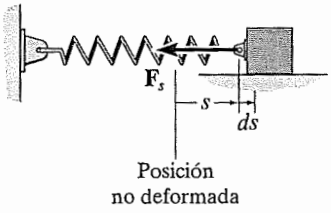


Fig. 11-11

Fricción. Al contrario de una fuerza conservadora, considere la fuerza de *fricción* ejercida por una superficie fija sobre un cuerpo deslizante. El trabajo realizado por la fuerza de fricción depende de la trayectoria; cuanto más larga sea la trayectoria, mayor será el trabajo. En consecuencia, las fuerzas de fricción son *no conservadoras*, y la mayor parte del trabajo realizado por ellas se disipa en el cuerpo en la forma de calor.

*11.5 Energía potencial

Cuando una fuerza conservadora actúa sobre un cuerpo, le proporciona la capacidad de realizar trabajo. Esta capacidad, medida como *energía potencial*, depende de la ubicación del cuerpo en relación con una posición de referencia fija o *datum* (plano de referencia).

Energía potencial gravitacional. Si un cuerpo está ubicado a una distancia *y por arriba* de una referencia fija horizontal o plano de referencia, como en la figura 11-12, el peso del cuerpo tiene energía potencial gravitacional *positiva* V_g y puesto que **W** tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando el cuerpo es llevado al plano de referencia. De la misma forma, si el cuerpo está localizado a una distancia *y por abajo* del plano de referencia, V_g es *negativa* puesto que el peso efectúa trabajo negativo cuando el cuerpo es movido hacia arriba hasta el plano de referencia, en el cual, $V_g = 0$.

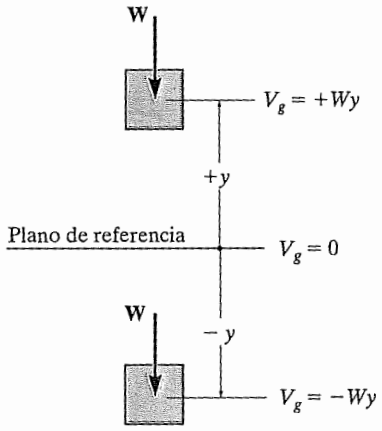


Fig. 11-12

Si y se mide como *positiva hacia arriba*, entonces la energía potencial gravitacional del peso **W** es

$$V_g = Wy \tag{11-4}$$

Energía potencial elástica. Cuando un resorte está estirado o comprimido en una cantidad s desde su posición no deformada (el plano de referencia), la energía almacenada en el resorte se denomina *energía potencial elástica*. Se determina a partir de

$$V_e = \tfrac{1}{2} ks^2 \tag{11-5}$$

Esta energía siempre es una cantidad positiva, ya que la fuerza de resorte que actúa sobre el cuerpo unido realiza trabajo *positivo* sobre el cuerpo mientras la fuerza regresa al cuerpo a la posición del resorte no deformado, figura 11-13.

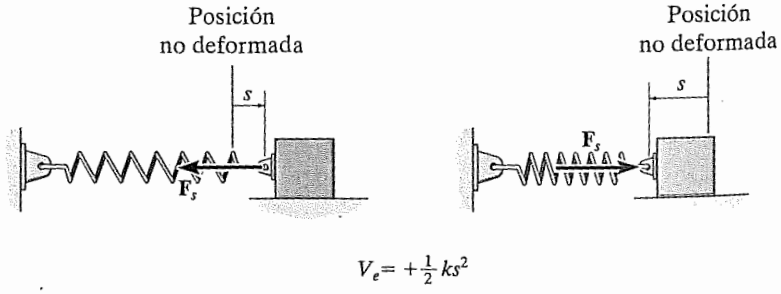


Fig. 11-13

Función potencial. En el caso general, si un cuerpo está sometido *tanto* a fuerzas gravitatorias *como* elásticas, la *energía potencial o función potencial V* del cuerpo puede expresarse como la suma algebraica

$$\boxed{V = V_g + V_e} \tag{11-6}$$

donde la medida de V depende de la ubicación del cuerpo con respecto a un plano de referencia seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 11-4 y 11-5.

En particular, si un *sistema* sin fricción de cuerpos rígidos conectados tiene *un solo grado de libertad*, de modo que su posición vertical desde el plano de referencia está definida por la coordenada q, entonces la función potencial para el sistema puede expresarse como $V = V(q)$. El trabajo realizado por todos los pesos y fuerzas de resorte que actúan sobre el sistema para moverlo desde q_1 hasta q_2, se mide por la *diferencia* en V; es decir,

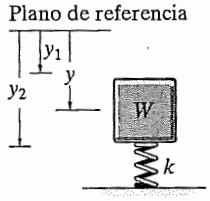
$$U_{1-2} = V(q_1) - V(q_2) \tag{11-7}$$

Por ejemplo, la función potencial para un sistema que consiste en un bloque de peso **W** sostenido por un resorte, como en la figura 11-14, puede expresarse en términos de la coordenada $(q =)\ y$, medida desde una referencia fija ubicada en la longitud no deformada del resorte. Aquí

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Wy + \tfrac{1}{2}ky^2 \end{aligned} \tag{11-8}$$

Si el bloque se mueve desde y_1 hasta y_2, entonces al aplicar la ecuación 11-7 el trabajo de **W** y $\mathbf{F}_s$ es

$$U_{1-2} = V(y_1) - V(y_2) = -W(y_1 - y_2) + \tfrac{1}{2}ky_1^2 - \tfrac{1}{2}ky_2^2$$



(a)

Fig. 11-14

*11.6 Criterio de la energía potencial para el equilibrio

Si un sistema sin fricción conectado tiene un grado de libertad, y su posición está definida por la coordenada q, entonces si se desplaza desde q hasta $q + dq$, la ecuación 11-7 toma la forma de

$$dU = V(q) - V(q + dq)$$

o bien

$$dU = -dV$$

Si el sistema está en equilibrio y experimenta un *desplazamiento virtual* δq, en vez de un desplazamiento real dq, entonces la ecuación anterior se convierte en $\delta U = -\delta V$. Sin embargo, el principio del trabajo virtual requiere que $\delta U = 0$ y, por tanto, $\delta V = 0$, por lo que es posible escribir $\delta V = (dV/dq)\,\delta q = 0$. Como $\delta q \neq 0$, esta expresión se escribe de la siguiente manera

$$\boxed{\frac{dV}{dq} = 0} \tag{11-9}$$

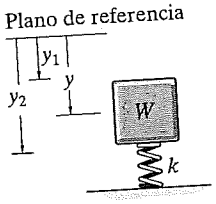
Por consiguiente, *cuando un sistema sin fricción de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio, la primera derivada de su función potencial es cero*. Por ejemplo, con la ecuación 11-8 podemos determinar la posición de equilibrio para el resorte y el bloque de la figura 11-14*a*. Tenemos

$$\frac{dV}{dy} = -W + ky = 0$$

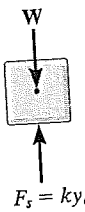
Entonces, la posición de equilibrio $y = y_{eq}$ es

$$y_{eq} = \frac{W}{k}$$

Por supuesto, este *mismo resultado* se puede obtener al aplicar $\Sigma F_y = 0$ a las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 11-14*b*.



(a)

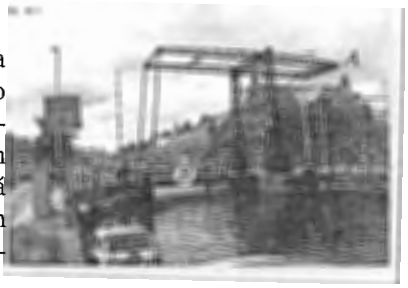


(b)

Fig. 11-14

*11.7 Estabilidad de la configuración del equilibrio

La función potencial V de un sistema también puede usarse para investigar la estabilidad de la configuración del equilibrio, el cual se clasifica como *estable*, *neutro* o *inestable*.

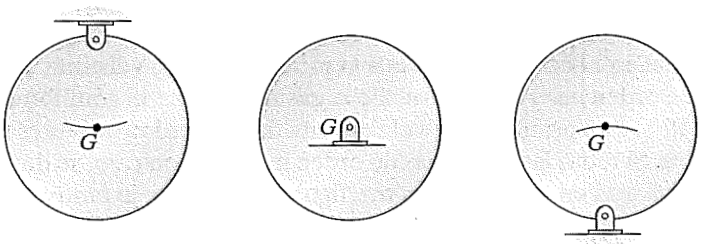


El contrapeso en A equilibra el peso de la plataforma B de este puente levadizo simple. Al aplicar el método de la energía potencial podemos estudiar la estabilidad de la estructura para diferentes posiciones de equilibrio de la plataforma.

Equilibrio estable. Se dice que un sistema es *estable* si tiene una tendencia a regresar a su posición original cuando se le da un pequeño desplazamiento al sistema. En este caso, la energía potencial del sistema está en su *mínimo*. En la figura 11-15*a*, cuando al disco se le da un pequeño desplazamiento, su centro de gravedad G siempre se moverá (girará) de regreso a su posición de equilibrio, la cual se encuentra en el *punto más bajo* de su trayectoria. Ésta es la razón por la que la energía potencial del disco está en su *mínimo*.

Equilibrio neutro. Se dice que un sistema está en *equilibrio neutro* si el sistema permanece en equilibrio aun cuando se le dé un pequeño desplazamiento desde su posición original. En este caso, la energía potencial del sistema es *constante*. En la figura 11-15*b*, se muestra el equilibrio neutro, donde un disco está articulado en G. Cada vez que se gira el disco, se establece una nueva posición de equilibrio y la energía potencial permanece sin cambios.

Equilibrio inestable. Se dice que un sistema es *inestable*. Si tiene una tendencia a *desplazarse aún más lejos* de su posición de equilibrio original cuando se le da un pequeño desplazamiento. En este caso, la energía potencial del sistema es un *máximo*. En la figura 11-15*c*, se muestra una posición de equilibrio inestable del disco. Aquí el disco girará alejándose de su posición de equilibrio cuando su centro de gravedad es desplazado ligeramente. En el *punto más alto*, su energía potencial es un *máximo*.



Equilibrio estable (a) Equilibrio neutro (b) Equilibrio inestable (c)

Fig. 11-15

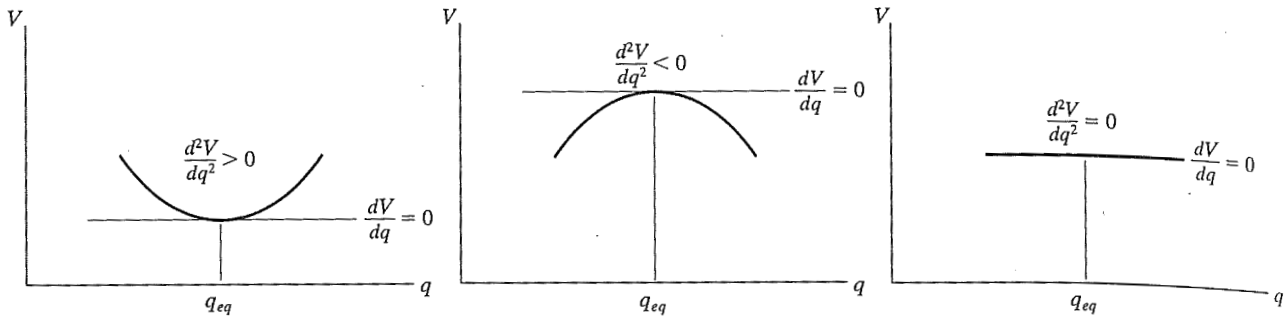


Fig. 11-16

Sistema con un grado de libertad. Si un sistema tiene sólo un grado de libertad, y su posición se define mediante la coordenada q, entonces se puede graficar la función potencial V para el sistema en términos de q, figura 11-16. Siempre que el sistema esté en *equilibrio*, entonces dV/dq, lo cual representa la pendiente de esta función, debe ser igual a cero. Por tanto, una investigación de la estabilidad en la configuración del equilibrio requiere la evaluación de la segunda derivada de la función potencial.

Si d^2V/dq^2 es mayor que cero, figura 11-16*a*, la energía potencial del sistema será un *mínimo*. Esto indica que la configuración del equilibrio es *estable*. Por consiguiente,

$$\frac{dV}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad \text{equilibrio estable} \qquad (11\text{-}10)$$

Si d^2V/dq^2 es menor que cero, figura 11-16*b*, la energía potencial del sistema será un *máximo*. Esto indica una configuración *inestable* del equilibrio. Por tanto,

$$\frac{dV}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \qquad \text{equilibrio inestable} \qquad (11\text{-}11)$$

Por último, si d^2V/dq^2 es igual a cero, será necesario investigar las derivadas de orden más alto para determinar la estabilidad. La configuración del equilibrio será *estable* si la primera derivada distinta de cero es de un orden *par* y es *positiva*. De la misma manera, el equilibrio será *inestable* si esta primera derivada distinta de cero es impar o si es par y negativa. Si todas las derivadas de orden más alto son *cero*, se dice que el sistema está en *equilibrio neutro*, figura 11-16*c*. Por lo tanto,

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \cdots = 0 \qquad \text{equilibrio neutro} \qquad (11\text{-}12)$$

Esta condición ocurre sólo si la función de energía potencial para el sistema es constante en q_{eq} o en la vecindad de éste.



11 Cuando hay vientos fuertes o si pasan por una curva, estas carretas con caña de azúcar pueden volverse inestables y volcarse, ya que cuando están cargadas al máximo sus centros de gravedad están muy arriba y fuera del camino.

Procedimiento para el análisis

Con los métodos de energía potencial, las posiciones de equilibrio y la estabilidad de un cuerpo o de un sistema de cuerpos conectados, y que tienen un solo grado de libertad, se pueden obtener por el siguiente procedimiento.

Función potencial.

- Bosqueje el sistema de modo que quede ubicado en alguna *posición arbitraria* especificada por la coordenada q.
- Establezca un *plano de referencia* horizontal a través de un *punto fijo** y exprese la energía potencial gravitacional V_g en términos del peso W de cada elemento y de su distancia vertical y desde el plano de referencia, $V_g = Wy$.
- Exprese la energía potencial elástica V_e del sistema en términos del estiramiento o la compresión s de cualquier resorte conectado, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$.
- Formule la función potencial $V = V_g + V_e$, y exprese las *coordenadas de posición* y y s en términos de la coordenada independiente q.

Posición de equilibrio.

- La posición de equilibrio del sistema se determina al tomar la primera derivada de V y establecerla como igual a cero, $dV/dq = 0$.

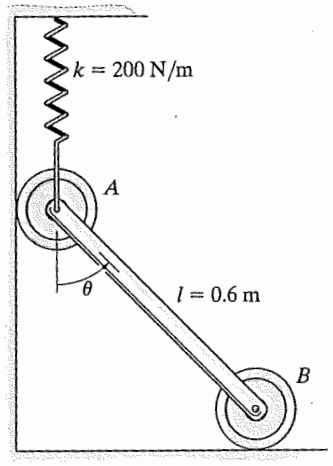
Estabilidad.

- La estabilidad en la posición de equilibrio se determina por la evaluación de la segunda derivada o la derivada de mayor orden de V.
- Si la segunda derivada es mayor que cero, el sistema es estable; si todas las derivadas son iguales a cero, el sistema está en equilibrio neutro; y si la segunda derivada es menor que cero, el sistema es inestable.

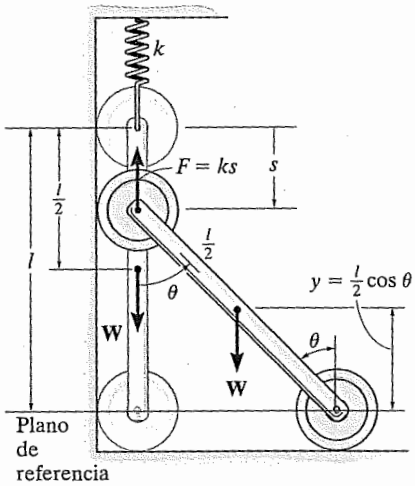
*La ubicación del plano de referencia es *arbitraria* ya que sólo se requieren los *cambios* o diferenciales de V para investigar la posición de equilibrio y su estabilidad.

EJEMPLO 11.5

El eslabón uniforme que se muestra en la figura 11-17*a* tiene una masa de 10 kg. Si el resorte no está alargado cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo θ necesario para el equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



(a)



(b)

Fig. 11-17

SOLUCIÓN

Función potencial. El plano de referencia se establece en la parte inferior del eslabón, figura 11-17*b*. Cuando el eslabón se ubica en la posición arbitraria θ, el resorte aumenta su energía potencial al alargarse y el peso disminuye su energía potencial. Por tanto,

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 + Wy$$

Como $l = s + l\cos\theta$ o $s = l(1 - \cos\theta)$, y $y = (l/2)\cos\theta$, entonces

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 + W\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

Posición de equilibrio. La primera derivada de V es

$$\frac{dV}{d\theta} = kl^2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

o bien

$$l\left[kl(1 - \cos\theta) - \frac{W}{2}\right]\operatorname{sen}\theta = 0$$

Esta ecuación se satisface siempre que

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \theta = 0° \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{W}{2kl}\right) = \cos^{-1}\left[1 - \frac{10(9.81)}{2(200)(0.6)}\right] = 53.8° \qquad \textit{Resp.}$$

Estabilidad. La segunda derivada de V es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl^2(1 - \cos\theta)\cos\theta + kl^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

$$= kl^2(\cos\theta - \cos 2\theta) - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

Al sustituir valores para las constantes, con $\theta = 0°$ y $\theta = 53.8°$, se obtiene

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = 200(0.6)^2(\cos 0° - \cos 0°) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos 0°$$

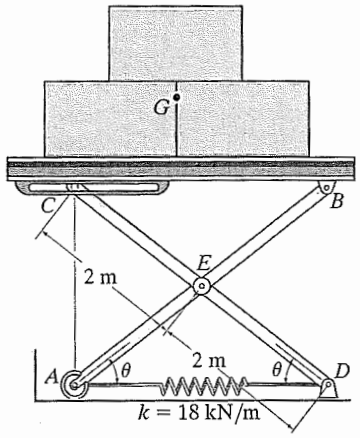
$$= -29.4 < 0 \qquad \text{(equilibrio inestable en } \theta = 0°) \qquad \textit{Resp.}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=53.8°} = 200(0.6)^2(\cos 53.8° - \cos 107.6°) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos 53.8°$$

$$= 46.9 > 0 \qquad \text{(equilibrio estable en } \theta = 53.8°) \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 11.6

Si el resorte AD de la figura 11-18*a* tiene una rigidez de 18 kN/m y no está deformado cuando $\theta = 60°$, determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. La carga tiene una masa de 1.5 Mg. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



(a)

SOLUCIÓN

Energía potencial. La energía potencial gravitacional para la carga con respecto al plano de referencia fijo, que se muestra en la figura 11-18*b*, es

$$V_g = mgy = 1500(9.81)\ \text{N}[(4\ \text{m})\ \text{sen}\ \theta + h] = 58\,860\ \text{sen}\ \theta + 14\,715h$$

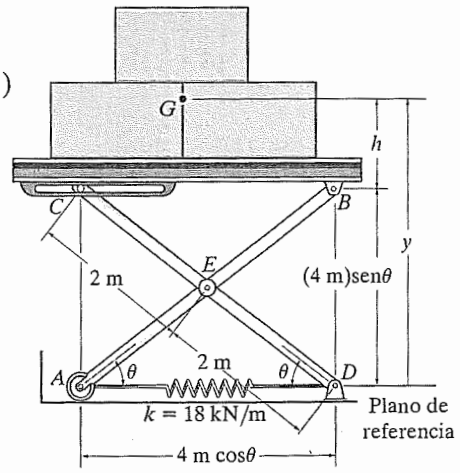
donde h es una distancia constante. A partir de la geometría del sistema, el alargamiento del resorte cuando la carga está sobre la plataforma es $s = (4\ \text{m})\cos\theta - (4\ \text{m})\cos 60° = (4\ \text{m})\cos\theta - 2\ \text{m}$.

Por consiguiente, la energía potencial elástica del sistema es

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}(18\,000\ \text{N/m})(4\ \text{m}\cos\theta - 2\ \text{m})^2 = 9000(4\cos\theta - 2)^2$$

Por lo tanto, la función de energía potencial para el sistema es

$$V = V_g + V_e = 58\,860\ \text{sen}\ \theta + 14\,715h + 9000(4\cos\theta - 2)^2 \qquad (1)$$



(b)

Fig. 11-18

Equilibrio. Cuando el sistema está en equilibrio,

$$\frac{dV}{d\theta} = 58\,860\cos\theta + 18\,000(4\cos\theta - 2)(-4\ \text{sen}\ \theta) = 0$$

$$58\,860\cos\theta - 288\,000\ \text{sen}\ \theta\cos\theta + 144\,000\ \text{sen}\ \theta = 0$$

Como $\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta$,

$$58\,860\cos\theta - 144\,000\ \text{sen}\ 2\theta + 144\,000\ \text{sen}\ \theta = 0$$

Al resolver por prueba y error

$$\theta = 28.18°\ \text{y}\ \theta = 45.51° \qquad \textit{Resp.}$$

Estabilidad. Si se obtiene la segunda derivada de la ecuación 1,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -58\,860\ \text{sen}\ \theta - 288\,000\cos 2\theta + 144\,000\cos\theta$$

Al sustituir $\theta = 28.18°$ se obtiene

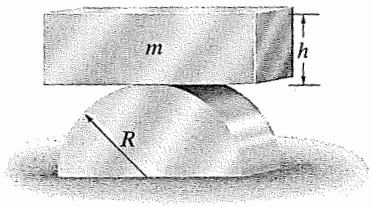
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -60\,409 < 0 \qquad \text{Inestable} \qquad \textit{Resp.}$$

Y para $\theta = 45.51°$,

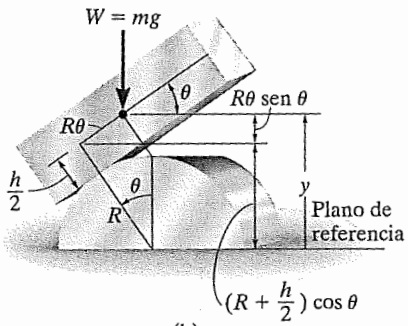
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 64\,073 > 0 \qquad \text{Estable} \qquad \textit{Resp.}$$

11

EJEMPLO 11.8



(a)



(b)

Fig. 11-19

El bloque homogéneo con masa m descansa sobre la superficie superior del medio cilindro, figura 11-19*a*. Demuestre que ésta es una condición de equilibrio inestable si $h > 2R$.

SOLUCIÓN

Función potencial. La referencia se establece en la base del cilindro, figura 11-19*b*. Si el bloque se desplaza una cantidad θ desde la posición de equilibrio, la función potencial es

$$V = V_e + V_g$$

$$= 0 + mgy$$

A partir de la figura 11-18*b*,

$$y = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto,

$$V = mg\left[\left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta\right]$$

Posición de equilibrio.

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\left[-\left(R + \frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta\right] = 0$$

$$= mg\left(-\frac{h}{2}\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta\right) = 0$$

Observe que $\theta = 0°$ satisface esta ecuación.

Estabilidad. Al tomar la segunda derivada de V se obtiene

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\left(-\frac{h}{2}\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta\right)$$

En $\theta = 0°$,

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = -mg\left(\frac{h}{2} - R\right)$$

Como todas las constantes son positivas, el bloque estará en equilibrio inestable siempre que $h > 2R$, porque entonces $d^2V/d\theta^2 < 0$.

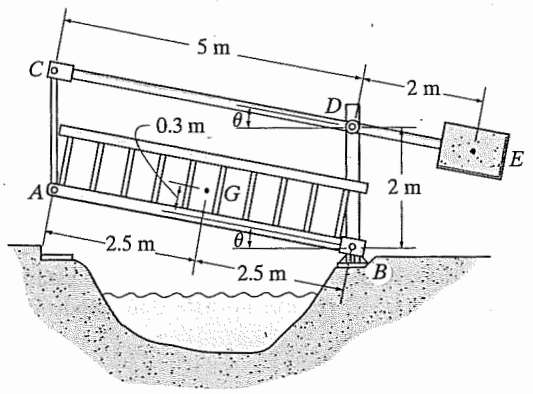
PROBLEMAS

11-26. Si la energía potencial para un sistema conservador de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (4x^3 - x^2 - 3x + 10)$ pies · lb, donde x está dada en pies, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

11-27. Si la energía potencial para un sistema conservador de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (24 \operatorname{sen} \theta + 10 \cos 2\theta)$ pies · lb, $0° \leq \theta \leq 90°$, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

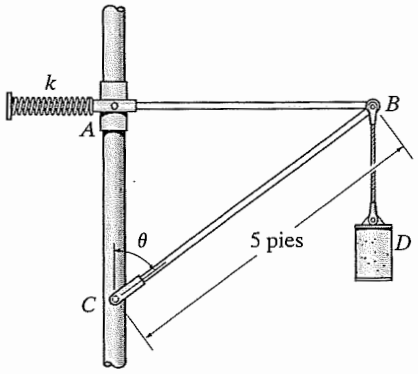
***11-28.** Si la energía potencial para un sistema conservador de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (3y^3 + 2y^2 - 4y + 50)$ J, donde y está dada en metros, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

•**11-29.** El puente de 2 Mg, con centro de masa en el punto G, se eleva mediante dos vigas CD, localizadas a cada lado del puente. Si el contrapeso E de 2 Mg está unido a las vigas como se muestra en la figura, determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. Ignore el peso de las vigas y de las barras de unión.



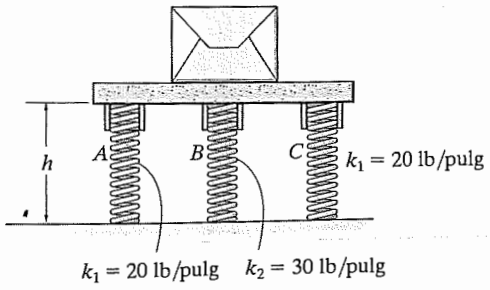
Prob. 11-29

11-30. El resorte tiene una rigidez $k = 600$ lb/pie y no está deformado cuando $\theta = 45°$. Si el mecanismo está en equilibrio cuando $\theta = 60°$, determine el peso del cilindro D. Ignore el peso de los elementos. La barra AB permanece horizontal en cualquier momento puesto que el collar puede deslizarse libremente a lo largo de la guía vertical.



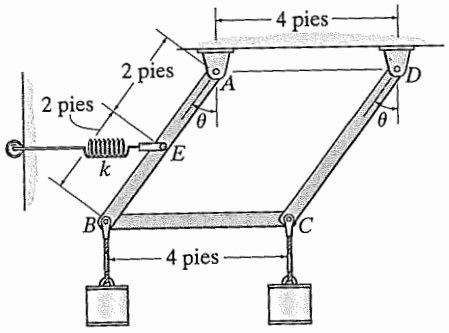
Prob. 11-30

11-31. Si los resortes en A y C tienen una longitud no deformada de 10 pulgadas mientras que el resorte en B tiene una longitud no deformada de 12 pulgadas, determine la altura h de la plataforma cuando el sistema está en equilibrio. Investigue la estabilidad de esta configuración de equilibrio. El paquete y la plataforma tienen un peso total de 150 lb.



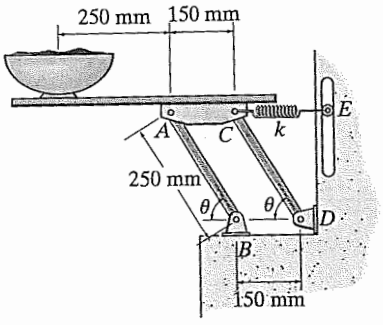
Prob. 11-31

*11-32. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$ y tiene una rigidez de $k = 1000$ lb/pie. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio si cada uno de los cilindros pesa 50 lb. Ignore el peso de los elementos.



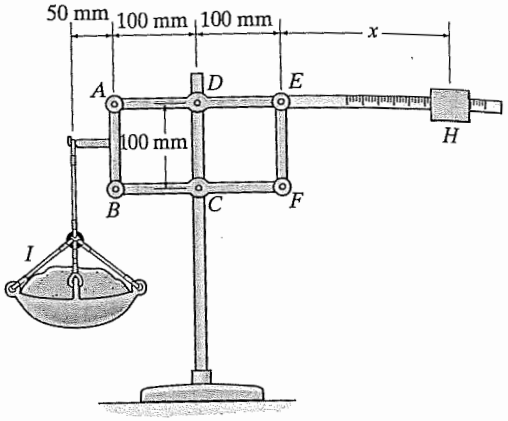
Prob. 11-32

•11-33. Una mesa de servicio uniforme de 5 kg se sostiene en cada lado mediante dos pares de eslabones idénticos, AB y CD, y resortes CE. Si el tazón tiene una masa de 1 kg, determine el ángulo θ con el que la mesa está en equilibrio. Cada uno de los resortes tiene una rigidez de $k = 200$ N/m y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90°$. Ignore la masa de los eslabones.



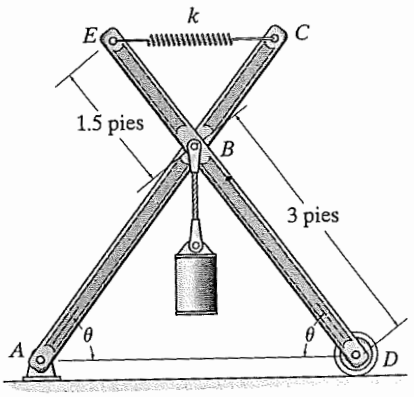
Prob. 11-33

11-34. Si se coloca una carga I de 10 kg sobre la bandeja, determine la posición x del bloque H de 0.75 kg para lograr el equilibrio. La báscula está en equilibrio cuando el peso y la carga no se encuentran sobre ella.



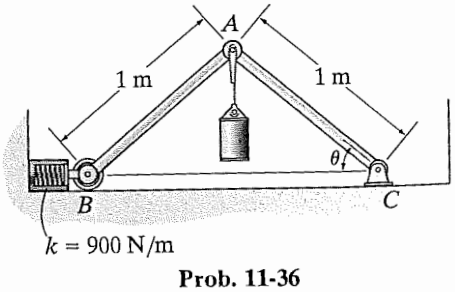
Prob. 11-34

11-35. Determine los ángulos θ necesarios para el equilibrio del cilindro de 200 lb e investigue la estabilidad de cada posición. El resorte tiene una rigidez de $k = 300$ lb/pie y una longitud no deformada de 0.75 pie.



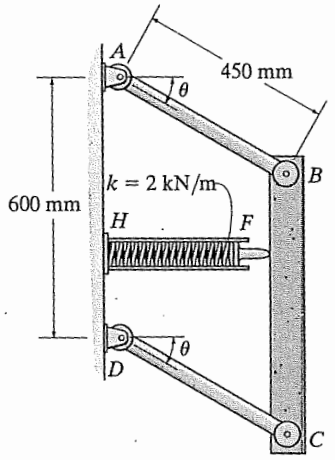
Prob. 11-35

*11-36. Determine los ángulos θ necesarios para el equilibrio del cilindro de 50 kg e investigue la estabilidad de cada posición. El resorte no está deformado cuando $\theta = 60°$.



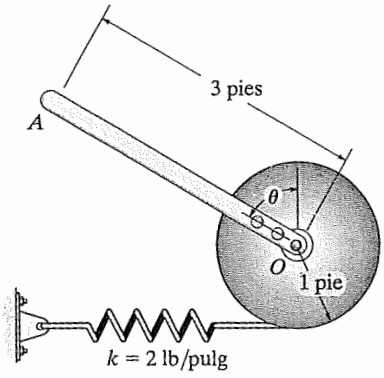
Prob. 11-36

•11-37. Si el mecanismo está en equilibrio cuando $\theta = 30°$, determine la masa de la barra BC. El resorte tiene una rigidez de $k = 2$ kN/m y no está deformado cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los eslabones.



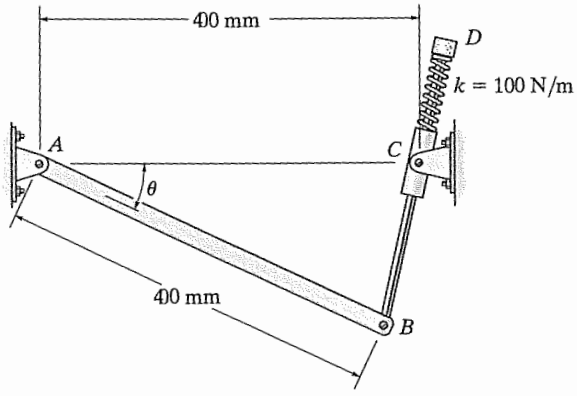
Prob. 11-37

11-38. La barra uniforme OA pesa 20 lb, y cuando la barra está en posición vertical, el resorte no está deformado. Determine la posición θ necesaria para el equilibrio. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



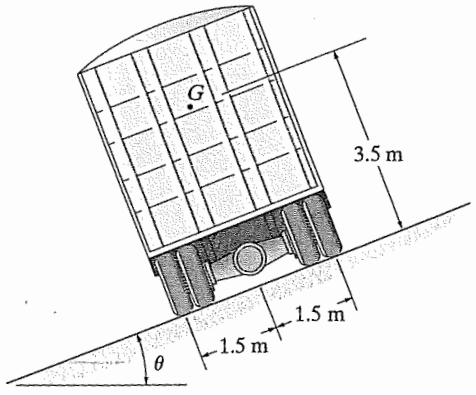
Prob. 11-38

11-39. El eslabón uniforme AB tiene una masa de 3 kg y está conectado mediante pasadores en sus dos extremos. La barra BD, que tiene un peso insignificante, pasa a través de un bloque giratorio en C. Si el resorte tiene una rigidez de $k = 100$ N/m y no está deformado cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo θ necesario para el equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. Ignore el tamaño del bloque giratorio.



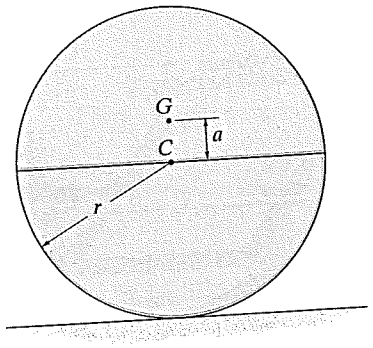
Prob. 11-39

***11-40.** El camión tiene una masa de 20 Mg y su centro de masa en G. Determine la pendiente máxima θ en la que puede estacionarse sin voltearse e investigue la estabilidad en esta posición.



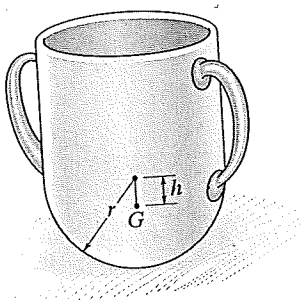
Prob. 11-40

•11-41. El cilindro está hecho de dos materiales de tal forma que tiene una masa m y centro de gravedad en el punto G. Muestre que cuando G se encuentra por arriba del centroide C del cilindro, el equilibrio es inestable.



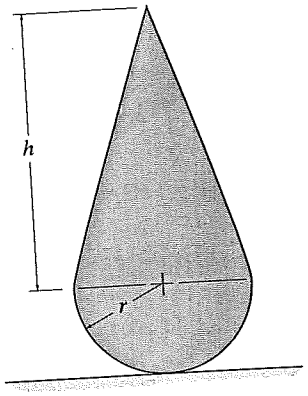
Prob. 11-41

11-42. La taza tiene un fondo semiesférico y una masa m. Determine la posición h del centro de masa G de modo que la taza esté en equilibrio neutro.



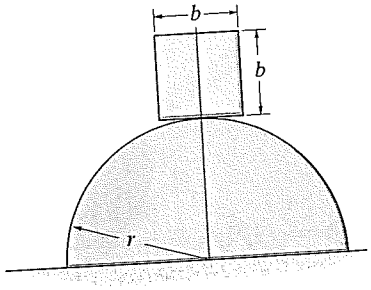
Prob. 11-42

11-43. Determine la altura h del cono en términos del radio r de la semiesfera de modo que el ensamble esté en equilibrio neutro. Tanto el cono como la semiesfera están hechos del mismo material.



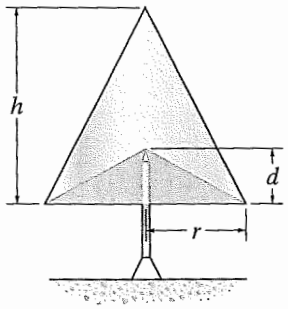
Prob. 11-43

***11-44.** Un bloque homogéneo descansa en la parte superior de la superficie cilíndrica. Obtenga la relación entre el radio r del cilindro y la dimensión b del bloque para obtener equilibrio estable. *Sugerencia:* establezca la función de energía potencial para un ángulo θ pequeño, es decir, aproxime $\operatorname{sen}\theta \approx 0$ y $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.



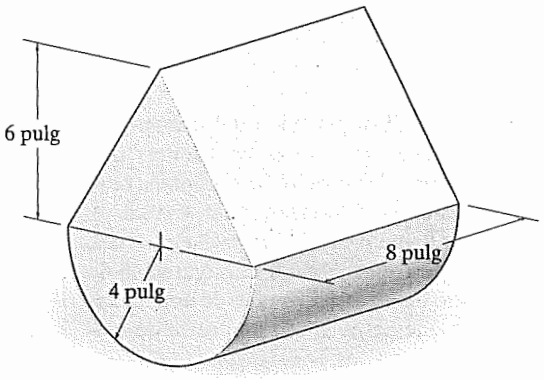
Prob. 11-44

•**11-45.** El cono homogéneo tiene una cavidad cónica cortada en su base como se muestra en la figura. Determine la profundidad d de la cavidad en términos de h de manera que el cono se equilibre sobre el pivote y permanezca en equilibrio neutro.



Prob. 11-45

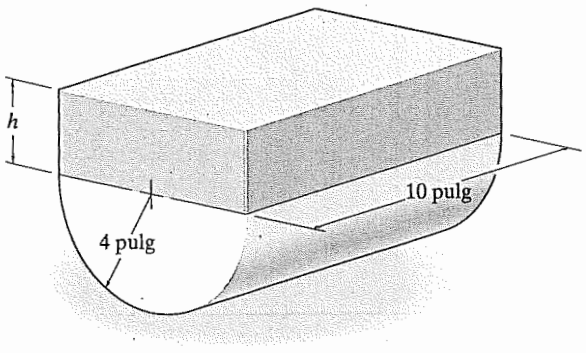
*11-48. El ensamble que se ilustra consta de un cilindro semicircular y un prisma triangular. Si el prisma pesa 8 lb y el cilindro pesa 2 lb, investigue la estabilidad cuando el ensamble descansa en la posición de equilibrio.



Prob. 11-48

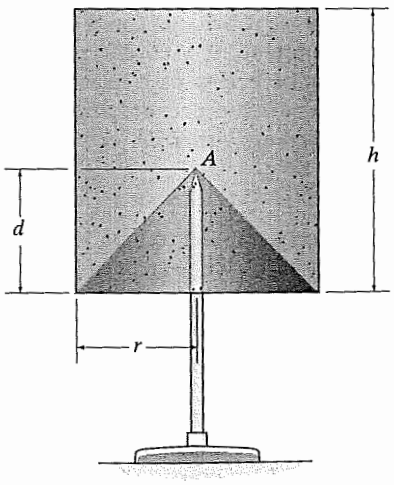
11-46. El ensamble que se ilustra consiste en un semicilindro y un bloque rectangular. Si el bloque pesa 8 lb y el semicilindro pesa 2 lb, investigue la estabilidad cuando el ensamble descansa en la posición de equilibrio. Considere $h = 4$ pulg.

11-47. El semicilindro de 2 lb sostiene al bloque rectangular que tiene un peso específico de $\gamma = 80$ lb/pie^3. Determine la altura h del bloque que producirá un equilibrio neutro en la posición que se ilustra.



Probs. 11-46/47

•**11-49.** Un orificio cónico se taladra en la base del cilindro, y éste se sostiene por medio del fulcro en A. Determine la distancia d mínima para que el cilindro permanezca en equilibrio estable.



Prob. 11-49

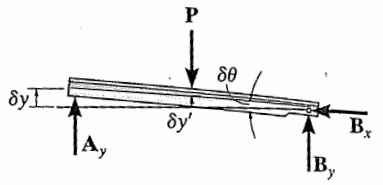
REPASO DEL CAPÍTULO

Principio del trabajo virtual

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo realizarán *trabajo virtual* cuando el cuerpo experimente un desplazamiento o una rotación diferencial *imaginaria*.

δy, $\delta y'$—desplazamientos virtuales

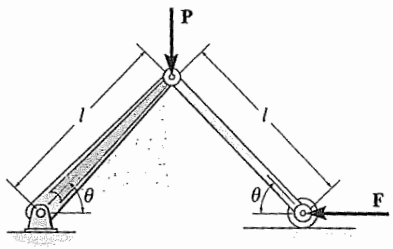
$\delta\theta$—rotación virtual



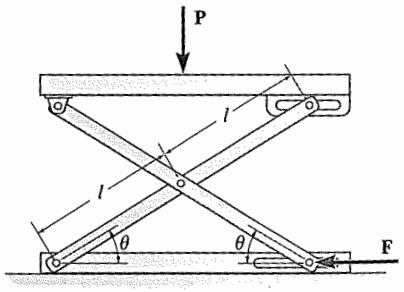
Para el equilibrio, la suma del trabajo virtual realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a cero para cualquier desplazamiento virtual. A esto se le llama *principio del trabajo virtual*, y es útil para determinar la configuración de equilibrio de un mecanismo o de una fuerza reactiva que actúe sobre una serie de elementos conectados.

$$\delta U = 0$$

Si el sistema de elementos conectados tiene un grado de libertad, entonces su posición puede especificarse por medio de una coordenada independiente como θ.



Para aplicar el principio del trabajo virtual, primero es necesario usar *coordenadas de posición* para localizar todas las fuerzas y momentos actuantes sobre el mecanismo que efectuarán trabajo cuando éste experimente un movimiento virtual $\delta\theta$.

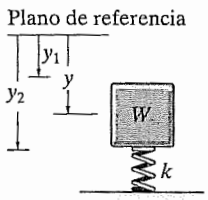


Las coordenadas se relacionan con la coordenada independiente θ, y entonces esas expresiones se diferencian para relacionar los desplazamientos coordenados *virtuales* con el desplazamiento virtual $\delta\theta$.

Por último, la ecuación del trabajo virtual para el mecanismo se escribe en función del desplazamiento virtual común $\delta\theta$ y luego se iguala a cero. Al factorizar $\delta\theta$ fuera de la ecuación, es posible determinar entonces la fuerza desconocida o el momento de par desconocido, o bien la posición de equilibrio θ.

Criterio de la energía potencial para el equilibrio

Cuando un sistema está sometido sólo a fuerzas conservadoras, como las fuerzas del peso o las de un resorte, entonces la configuración del equilibrio puede determinarse con la *función V de la energía potencial* para el sistema.



(a)

$$V = V_g + V_e = -W_y + \tfrac{1}{2}ky^2$$

La función de la energía potencial se establece al expresar la energía potencial del peso y del resorte para el sistema en términos de la coordenada independiente q.

Una vez formulada la función de la energía potencial, su primera derivada se establece como igual a cero. La solución proporciona la posición de equilibrio q_{eq} para el sistema.

$$\frac{dV}{dq} = 0$$

La estabilidad del sistema se puede investigar si se toma la segunda derivada de V.

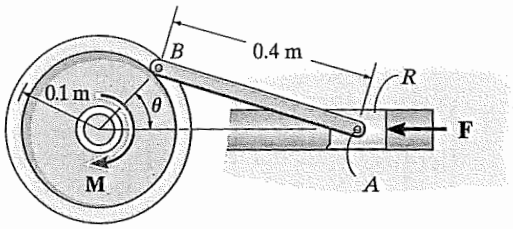
$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad \text{equilibrio estable}$$

$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \qquad \text{equilibrio inestable}$$

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \cdots = 0 \qquad \text{equilibrio neutro}$$

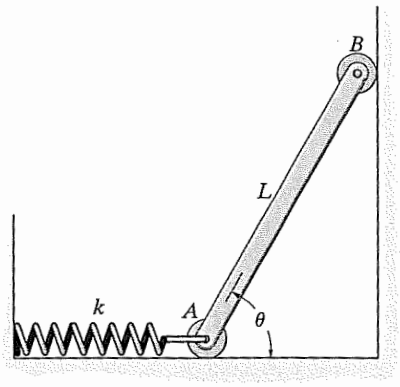
PROBLEMAS DE REPASO

11-50. La prensa punzonadora consiste en el pisón R, que conecta a la barra AB y a un volante. Si se aplica un par de torsión de $M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$ al volante, determine la fuerza F aplicada en el pisón para mantener la barra en la posición $\theta = 60°$.



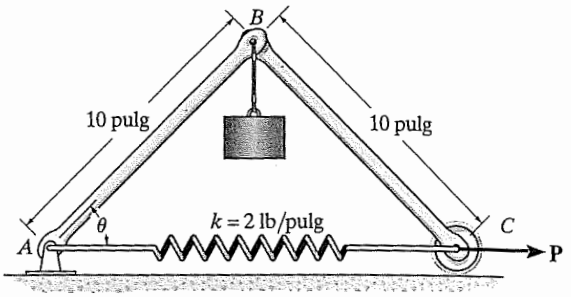
Prob. 11-50

11-51. La barra uniforme tiene un peso W. Determine el ángulo θ necesario para el equilibrio. El resorte no está comprimido cuando $\theta = 90°$. Ignore el peso de los rodillos.



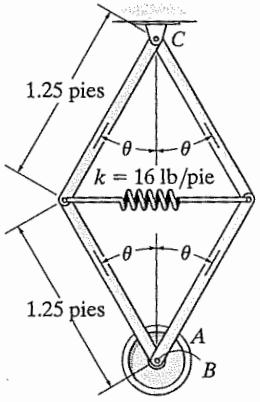
Prob. 11-51

*11-52. Los eslabones uniformes AB y BC pesan cada uno 2 lb y el cilindro pesa 20 lb. Determine la fuerza horizontal P requerida para mantener el mecanismo en $\theta = 45°$. El resorte tiene una longitud no alargada de 6 pulg.



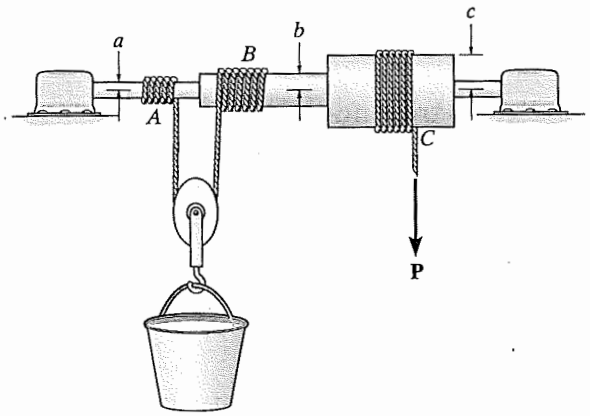
Prob. 11-52

•11-53. El resorte unido al mecanismo tiene una longitud no alargada cuando $\theta = 90°$. Determine la posición θ necesaria para el equilibrio e investigue la estabilidad del mecanismo en esta posición. El disco A está conectado mediante un pasador al bastidor colocado en B y tiene un peso de 20 lb.



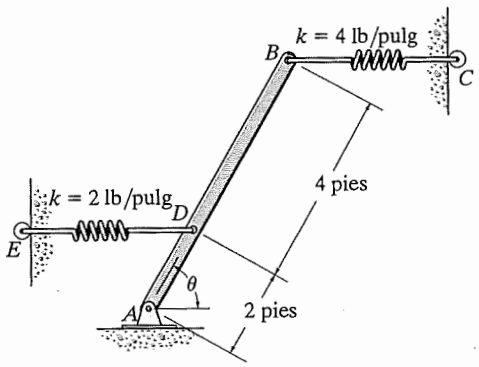
Prob. 11-53

11-54. Determine la fuerza P que debe aplicarse a la cuerda enrollada alrededor del tambor en C, la cual es necesaria para elevar el cubo que tiene una masa m. Observe que mientras el cubo se eleva, la polea rueda sobre una cuerda que se enrolla sobre la flecha B y se desenrolla de la flecha A.



Prob. 11-54

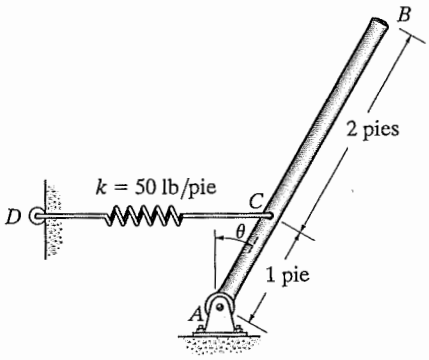
11-55. La barra uniforme AB pesa 100 lb. Si ambos resortes DE y BC no están alargados cuando $\theta = 90°$, determine el ángulo θ necesario para el equilibrio por el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. Ambos resortes actúan siempre en la posición horizontal debido a las guías de rodillo colocadas en C y E.



Prob. 11-55

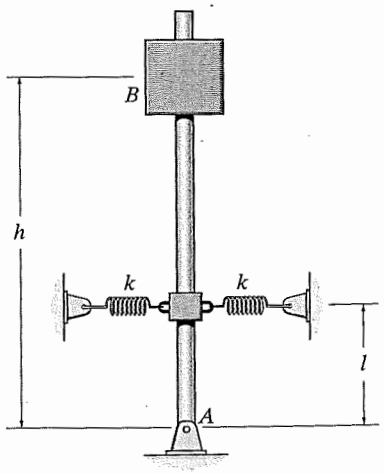
***11-56.** La barra uniforme AB tiene un peso de 10 lb. Si el resorte DC no está estirado cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo θ necesario para el equilibrio por el principio del trabajo virtual. El resorte siempre permanece en la posición horizontal debido a la guía de rodillo en D.

•11-57. Resuelva el problema 11-56 con el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad de la barra cuando está en la posición de equilibrio.



Probs. 11-56/57

11-58. Determine la altura h del bloque B de modo que la barra esté en equilibrio neutro. Los resortes no están estirados cuando la barra se encuentra en la posición vertical. El bloque tiene un peso W.



Prob. 11-58